

PRÁCTICA 7: ESPACIOS NORMADOS

Ejercicio 1. Sea $(V, |||)$ un espacio normado (sobre $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Probar que se verifican:

- i) Las operaciones $+: V \times V \rightarrow V$ y $\cdot: K \times V \rightarrow V$ son continuas.
- ii) $B_r(x) = (\overline{B_r(x)})^\circ$.
- iii) $\text{diam}(B_r(x)) = 2r$ ($V \neq 0$).

Ejercicio 2. Sea $(V, |||)$ un espacio normado y sea $C \subset V$. Decimos que C es *convexo* si $\forall x, y \in C$ y $\forall t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1 - t)y \in C$.

- i) Probar que $B_r(x)$ es convexo.
- ii) Probar que si $(C_i)_{i \in I}$ son convexos, entonces $\cap_{i \in I} C_i$ lo es.
- iii) Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.
- iv) Probar que si C es convexo, entonces $\overline{C}$ lo es.

Ejercicio 3. Sea $(V, |||)$ un espacio normado y $S \subset V$ un subespacio vectorial. Probar que:

- i) $\overline{S}$ también es un subespacio.
- ii) Si $S \neq V$, entonces $S^\circ \neq \emptyset$.
- iii) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.
- iv) Si S es un hiperplano, entonces S es o bien denso o bien cerrado en V .

Ejercicio 4. Sea $(V, |||)$ un espacio normado y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge* si existe $\lim \sum_{i=1}^n x_i$. Decimos que la serie *converge absolutamente* si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge en $\mathbb{R}$.

- (a) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, entonces $x_n \rightarrow 0$.
- (b) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente y V es de Banach, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Ejercicio 5. Sea $(V, |||)$ un espacio normado y sea X un espacio métrico. Sea $f_n: X \rightarrow V$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se define para todo $n \in \mathbb{N}$ la suma parcial $S_n = \sum_{i=1}^n f_i$. Se definen las nociones de convergencia y convergencia uniforme de la serie como las de las sumas parciales. Probar el criterio de Weierstrass:

Si V es de Banach, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números reales tal que $\|f_n(x)\| \leq a_n$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.

Ejercicio 6. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperlanos.

- i) $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subset l^\infty$.
- ii) $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subset c$.
- iii) $\{x \in l^1 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\} \subset l^1$.
- iv) $\{x \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\} \subset l^2$.
- v) $\mathbb{R}[X] \subset C[0, 1]$.
- vi) $C^1[a, b] \subset C[a, b]$.

Ejercicio 7. Sean V y W espacios normados. Sea $T : V \rightarrow W$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

- i) T es continuo en 0;
- ii) $\exists x_0 \in v$ tal que T es continuo en x_0 ;
- iii) T es continuo;
- iv) T es uniformemente continuo;
- v) T es un operador acotado;
- vi) $\forall A \subset V$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 8. Sean V y W espacios normados y sea $T : V \rightarrow W$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M/ \|Tx\| \leq M\|x\|\}.$$

Ejercicio 9. Sean V, W espacios normados, $V \neq 0$. Supongamos que V es de dimensión finita. Probar que si $L(V, W)$ es de Banach, entonces W también. (En realidad la hipótesis de dimensión finita sobre V no es necesaria, esto se deduce del Teorema de Hahn-Banach)

Ejercicio 10. Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy.$$

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Ejercicio 11. Sea V un espacio normado de dimensión infinita y sea $W \neq 0$ un espacio normado. Probar que $Hom(V, W) \neq L(V, W)$.

Ejercicio 12.

i) Sea $\phi \in C[0, 1]$ y sea $T_\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que T_ϕ es un operador lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$.

ii) Sea $T : c \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Probar que T es lineal y continuo y hallar $\|T\|$.

iii) Sea $1 \leq p \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ el conjugado de p y sea $b \in l^{p'}$. Definimos $T_b : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ según

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n.$$

Probar que T_b es lineal, continuo y hallar $\|T_b\|$.

Ejercicio 13. Sea V un espacio normado y sea (W, i) su completación. Recordar que W es un espacio normado. Sea U un espacio de Banach y $T : V \rightarrow U$ un operador lineal continuo.

- (a) Probar que existe un único operador lineal continuo $T' : W \rightarrow U$ tal que $T'i = T$.
- (b) Probar que $\|T'\| = \|T\|$.
- (c) Probar que $L(V, U)$ y $L(W, U)$ son isométricamente isomorfos.

Ejercicio 14. Sean V un espacio de Banach y S, T subespacios cerrados, con $\dim T < \infty$. Probar que $S + T$ es cerrado.

Ejercicio 15. (Lema de Riesz) Sean V un espacio normado, $S \subset V$ un subespacio vectorial cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$. Probar que existe $x_\alpha \in V - S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha \forall s \in S$. *Sugerencia:* considerar $x \notin S$, $r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

Ejercicio 16. Sean V un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2$, $n \neq m$. Deducir que $\overline{B_1(0)}$ no es compacta.

Ejercicio 17. Principio de acotación uniforme para espacios de Banach: Sea V un espacio de Banach, W un espacio normado y $\mathcal{F}$ una familia de operadores lineales y continuos de V a W . Entonces son equivalentes:

- (i) $\{T(x) \mid T \in \mathcal{F}\} \subseteq W$ es acotado para todo $x \in V$.
- (ii) $\mathcal{F} \subseteq L(V, W)$ es acotado.

Ejercicio 18. Sea V un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.