Práctica 10

1. **Ecuación de Euler**: $a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

   a) Mostar que el cambio de variable $x = e^t$ transforma esta ecuación en una lineal a coeficientes constantes. ¿Dónde están definidas las soluciones de la ecuación transformada?

   b) Hallar la solución general de:
   - $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$
   - $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 3xy' = 0$

2. **Ecuación de Legendre**

   a) Hallar mediante desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$, todas las soluciones de:
   $$(1 - z^2)w'' - 2zw' + a(a + 1)w = 0$$
   Mostrar que si $a \in \mathbb{N}$, la ecuación admite por solución un polinomio P_n tal que $P_n(1) = 1$.

   Nota: P_n es el $n-$ésimo polinomio de Legendre.

   b) Probar la fórmula de **Olinde Rodrigues**:
   $$P_n(z) = \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2 - 1)^n\right]$$

3. **Ecuación de Hermite**: $w'' - 2zw' + 2aw = 0$

   a) Hallar todas las soluciones.

   b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}_0$, la ecuación admite un polinomio H_n como solución.

   c) Probar que $H_n(z) = (-1)^n\, e^{z^2}\, \frac{d^n}{dz^n}\left[e^{-z^2}\right]$ es la solución de la ecuación para $a = n$.

4. Hallar los puntos singulares de las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de ellos son regulares en el sentido de Fuchs.

   a) $z^2 w'' + (z + z^2)w' - w = 0$

   b) $zw'' + 4w = 0$

   c) $z^2 w'' + 3z^2 w' - 5w = 0$

   d) $z^2 w'' + \operatorname{sen} z\, w' + \cos z\, w = 0$

5. **Ecuación de Laguerre:** $zw'' + (1 - z)w' + aw = 0$

a) Verificar que $z = 0$ es un punto singular regular de la ecuación y hallar una solución de la forma: $z^r \sum_{n\geq 1} a_n z^n$.

b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}$, la ecuación admite un polinomio L_n como solución.

c) Verificar que $L_n(z) = e^z \dfrac{d^n}{dz^n}[z^n\, e^{-z}]$, el $n-$ésimo polinomio de Laguerre, es solución de la ecuación si $a = n$.

6. **Ecuación de Bessel:** $z^2 w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0$, $\nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\nu \geq 0$.

a) Mostrar que la ecuación tiene una solución de la forma: $z^\nu \sum_{n>0} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$

Comprobar que tomando $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ se obtiene la solución:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

llamada **función de Bessel de primera especie de orden ν.**

b) Mostrar que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la ecuación tiene una solución de la forma: $z^{-\nu} \sum_{n>0} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$. Tomado $a_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu + 1)}$ se obtiene la solución

$$I_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

c) Deducir que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la solución general de la ecuación es:

$$\omega(z) = A\, I_\nu(z) + B\, I_{-\nu}(z) \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

d) Usando el método de Frobenius y eligiendo $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$, mostrar que la solución general — para $\nu = 0$ — es:

$$\omega(z) = A\, I_0(z) + B\left[\log(z)\, I_0(z) + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\right]$$

Nota: si $\nu \in \mathbb{Z}$, la ecuación es del segundo tipo de Fuchs. Usando Frobenius se calcula una solución linealmente independiente con I_ν:

$$N_\nu(z) = (\log z)\, I_\nu(z) + z^{-\nu} P_\nu(z) + z^\nu f(z)$$

llamada **función de Neumann o de Bessel de segunda especie de orden** ν. P_ν es un polinomio tal que $P_\nu(0) \neq 0$ y f es una función entera. Por lo tanto, la solución general en este caso es:

$$\omega(z) = A\, I_\nu(z) + B\, N_\nu(z) \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

7. Probar que $z\,I_1(z)$ es solución de la ecuación:

$$zw'' - w' + zw = 0$$

8. Mostrar que las ecuaciones de Legendre, Bessel, Hermite y Laguerre responden a un problema de Sturm-Liouville si $a = \nu = n$ y $z \in \mathbb{R}$.

9. Utilizando series de Fourier, encontrar la solución del siguiente problema (ecuación del calor):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad \text{en } (0,2) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,2) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,\infty) \end{cases}$$

con $f(x) = x^2 - 2x$ en $(0,2)$

10. Utilizando series de Fourier, encontrar la solución del siguiente problema (ecuación de las ondas):

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad \text{en}(0,1) \times (-\infty,+\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,\infty) \end{cases} \qquad \text{donde } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1/2 \\ 1-x & \text{si} \quad 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

11. Utilizando series de Fourier, encontrar la solución del siguiente problema (ecuación de las ondas con rozamiento):

$$\begin{cases} u_{tt} + 4u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{en}(0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(2x), \quad x \in (0,1) \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,\infty) \end{cases}$$

12. Utilizando series de Fourier, encontrar la solución del siguiente problema en coordenadas polares (r,θ):

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 & \text{en el disco} \quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\} \\ u(x,y) &= f(\theta) & \text{en } \partial D \end{cases}$$

Encontrar una expresión integral de la solución. (Problema de Dirichlet en el disco).

Si v es una conjugada armónica de u, ¿qué expresión se obtiene de v en términos de series de Fourier? ¿Qué relación existe con el desarrollo de Laurent de $F = u + iv$ en el disco D ?

13. Resolver utilizando la transformada de Fourier

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{tx} - 2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

14. Utilizar la transformada de Fourier para encontrar una solución explícita de la siguiente ecuación diferencial para la función $u = u(x, y)$,

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} & = & 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : y > 0\} \\ u(x,0) & = & f(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

(problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un semiplano) donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ es dada. Obtener una fórmula integral de la forma

$$u(x,y) = (P_y * f)(x)$$

donde P_y es un núcleo (conocido como el núcleo de Poisson).

15. a) Utilizar la transformada de Fourier para resolver la siguiente ecuación diferencial, para la función $u = u(x,t)$,

$$\begin{cases} u_t & = & u_{xx} & \text{en} & \mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) : t > 0\} \\ u(x,0) & = & f(x) & \text{en} & \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ es dada (problema de Cauchy para la ecuación del calor). Obtener una fórmula integral cómo en el ejercicio anterior, ¿qué núcleo interviene?

b) Encontrar la solución explícita cuando

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

c) ¿Qué sucede si cambiamos la ecuación por $u_t = iu_{xx}$? (ecuación de Schrödinger)

16. *a*) Utilizar la transformada de Fourier para resolver la siguiente ecuación diferencial, para la función $u = u(x,t)$,

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & u_{xx} & \text{en} \quad \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R} \\ u_t(x,0) & = & v_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R} \end{array}$$

(ecuación de las ondas) para u_0 y v_0 suficientemente regulares.

b) Probar que la energía

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (|u_x(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2)\, dx$$

es constante en el tiempo.