Práctica 6

1. Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

   a) $0 < |z| < 1$

   b) $1 < |z| < 2$

   c) $|z| > 2$

   d) $1 < |z-2| < 2$

2. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones en las regiones indicadas:

   a) $\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ en $0 < |z-1| < 1$ y en $|z-1| > 1$

   b) $\dfrac{z^2-1}{(z+2)(z+3)^2}$ en $0 < |z+3| < 1$ y en $2 < |z| < 3$.

3. **a)** Decidir dónde convergen las series de Laurent de las siguientes funciones alrededor de z_0:

   i) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ $(z_0 = 0)$ **ii)** $f(z) = e^z + \dfrac{z^2+1}{z^2-2z+1}$ $(z_0 = 1)$

   b) ¿Cuánto vale el coeficiente de z en el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{e^z}{z-1}$ en la región $|z| > 1$?

4. Si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, probar que el desarrollo en serie de Laurent de f en la corona $1 < |z| < 2$ tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos no nulos.

5. Probar que en todo disco perforado $0 < |z| < \epsilon$ la función $e^{\frac{1}{z}}$ toma todos los valores complejos salvo el cero.

6. Sea $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$. Mostrar que f tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y explicar por qué este hecho muestra que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

   es una función que, si bien es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$, no coincide con su serie de Taylor en ningún entorno de cero.

7. Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Determinar su naturaleza. Si es evitable, definir $f(0)$ de modo que resulte holomorfa en $z = 0$. Si es un polo, hallar la parte singular.

   a) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-1)}$ **b)** $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$ **c)** $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

   d) $f(z) = \dfrac{\log(z+1)}{z}$ **e)** $f(z) = \dfrac{1}{z}\cos(\dfrac{1}{z})$ **f)** $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$

   g) $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}(\dfrac{1}{z})$

8. Hallar y clasificar las singularidades en $\mathbb{C}$ de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = \dfrac{1+z^2}{z(z-1)^2}$ **b)** $f(z) = \dfrac{1}{z^3}\operatorname{sen} z$ **e)** $f(z) = \dfrac{\cos z}{z+1}$

   f) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ **g)** $f(z) = \cos\left(\frac{\pi}{z-\pi}\right)$ **h)** $-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{z^2+1})}$

   i) $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)z}$

9. **a)** Mostrar que $f(z) = \operatorname{tg} z$ es meromorfa en $\mathbb{C}$.

   b) Hallar sus polos y el orden de los mismos.

   c) Determinar la parte singular de f en cada polo.

10. Sea $f(z) = \dfrac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0}$. Probar

    a) ∞ es a lo sumo una singularidad aislada de f.

    b) si $m \leq n$, f es holomorfa en ∞. ¿Cuánto vale f en el punto en el infinito?

    c) si $m > n$, ∞ es un polo de f. Hallar su orden.

11. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\mathbb{C}_\infty$:

    a) $\dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$ **b)** $\dfrac{\cos z - 1}{z^6 + z^4}$

    c) $\dfrac{\cos z - 1}{(z-2\pi)^2} + \dfrac{z-3}{(z+1)^2(z-2)}$ **d)** $e^{\frac{z}{1-z}}$

    e) $\dfrac{e^{z^2+\frac{1}{z^2}-1}}{z^2-1}$

12. **a)** Hallar una función f no holomorfa en 0 y tal que $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$.

    b) Mostrar que una función puede ser holomorfa en ∞ y tener residuo no nulo allí.

c) Probar que si f tiene una singularidad esencial en $z = a$, $\dfrac{1}{f}$ tiene una singularidad esencial, o no aislada, en $z = a$.

d) Mostrar que si ∞ es un cero de f de orden mayor que 1, entonces $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$.

e) Mostrar que si ∞ es un cero simple de f, entonces $\operatorname{Res}(f, \infty) = -\lim_{z \to \infty} z f(z)$.

13. Probar:

a) Si a es un polo de orden m de f y definimos $g(z) = (z - a)^m f(z)$, entonces $\operatorname{Res}(f, a) = \dfrac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$.

b) Si a es un polo simple de f, entonces $\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z)$

14. Sea f una función meromorfa en un abierto conexo G. Probar:

a) Si f tiene un polo de orden m en $a \in G$, su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\operatorname{Res}(f'/f, a) = -m$.

b) Si f tiene un cero de orden m en $b \in G$, su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\operatorname{Res}(f'/f, b) = m$.

c) Si f tiene un polo simple en a y g es holomorfa en a entonces $\operatorname{Res}(fg, a) = \operatorname{Res}(f, a).g(a)$.

15. Calcular los residuos de las funciones del ejercicio 8, en cada una de sus singularidades aisladas.

16. **a)** Clasificar en $\mathbb{C}_\infty$ las singularidades de:

i) $\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{z}{z+3})}{(z + 2 - \frac{i}{4\pi})(1 - e^{1/(z+2)})}$ **ii)** $e^{az}(1 + e^z)^{-1} \quad (a \in \mathbb{C})$

b) Calcular el residuo en infinito de:

i) $\dfrac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ **ii)** $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)z}$

17. Hallar los residuos en $\mathbb{C}_\infty$ de las funciones del ejercicio 11, en cada una de sus singularidades aisladas.

18. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia $|z| = 2$, recorrida una vez en sentido positivo. Calcular:

a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^4 + 1} dz$

b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z+1)^4 (z^2 - 9)(z - 4)}$

c) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{\operatorname{sen} z^2}$ $\gamma : |z| = \frac{\pi}{2}$ en sentido negativo.

19. Sea $G = \mathbb{C} - [-1, 1]$. Se define en G la función $f(z) = z^2 \log\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$.

a) Calcular $\text{Res}(f, \infty)$.

b) Utilizando el método de los residuos, calcular:

$$\int_C f(z)dz \qquad\qquad \text{siendo} \quad C : |z| = 2$$

20. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}_\infty - \{-1, 2\}$ tal que -1 es un polo simple y 2 un polo doble. Se sabe además que:

- $\text{Res}(f, -1) = 1$ y $\text{Res}(f, 2) = 2$.
- $f(0) = \dfrac{7}{4}$ y $f(1) = \dfrac{5}{2}$.

Determinar f, y calcular su desarrollo en serie de Laurent en potencias de z y su residuo en ∞.