1. Hallar la función característica de las siguientes distribuciones:

   a) $\mathcal{P}(\lambda)$
   b) $\mathcal{B}i(n,p)$
   c) $\mathcal{U}(a,b)$
   d) $\varepsilon(\lambda)$
   e) $\Gamma(n,\lambda)$.
   Sugerencia: La distribución $\Gamma(n,\lambda)$ coincide con la de la suma de n variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.

   Calcular a partir de su función característica la esperanza y la varianza de cada una de ellas.

2. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Compruebe utilizando funciones características que

   a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1), Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \Longrightarrow X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.
   b) $X \sim \mathcal{B}i(n,p), Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Longrightarrow X+Y \sim \mathcal{B}i(n+m,p)$.

3. Probar que una variable aleatoria X es simétrica respecto del origen si y sólo si $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$ para todo t.

4. *a)* Calcular la función característica asociada a una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$.
   Sugerencia: Utilizar la igualdad
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|t|}.$$
   b) Verificar que si X es una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$ entonces $\phi_{2X} = \phi_X^2$. Observar que esto dice que ϕ_{X+Y} puede coincidir con $\phi_X \cdot \phi_Y$ aunque X e Y no sean independientes.
   c) Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$. Hallar para cada $n \in \mathbb{N}$ la distribución del promedio $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. ¿Contradicen sus resultados algún teorema conocido?

5. Sea X una variable aleatoria con media cero y varianza finita tal que para cierta variable aleatoria $Y \sim X$ independiente de X se verifica que $X+Y$ y $X-Y$ son independientes.

   a) Probar que $\phi_X(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{2}\right)\right]^3 \phi_X\left(-\frac{t}{2}\right)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Deducir que si $\phi_X(t) \neq 0$ entonces
   $$\frac{\phi_X(t)}{\phi_X(-t)} = \left[\frac{\phi_X\left(\frac{t}{2}\right)}{\phi_X\left(-\frac{t}{2}\right)}\right]^2 = \cdots = \left[\frac{\phi_X\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\phi_X\left(-\frac{t}{2^n}\right)}\right]^{2^n}$$
   para todo $n \in \mathbb{N}$.
   b) Probar que $\phi_X(t) = \phi_X(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Deducir que $\phi_X(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{2}\right)\right]^4$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
   Sugerencia: Estudiar el cociente $\frac{\phi_X(t)}{\phi_X(-t)}$ utilizando el desarrollo de Taylor de orden 2 de ϕ_X en $t_0 = 0$.
   c) Concluir que $X \sim \mathrm{N}\left(0,\sigma^2\right)$.
   d) Probar que el resultado sigue valiendo aún si la media de X es distinta de cero.

6. *a)* Sea $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sqrt{n}\big(\overline{Z}_n - \mu\big) \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2)$.

b) Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 tal que para algún $n_0 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ se verifica que $\sqrt{n_0}\big(\overline{X}_{n_0} - \mu\big) \sim X_1 - \mu$. Probar que $X_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.[1]

7. Probar que no existen variables aleatorias X y Z independientes e idénticamente distribuidas tales que

$$X - Z \sim \mathcal{U}[-1, 1].$$

8. Probar mediante el estudio de funciones características que la distribución binomial de parámetros n y p converge en distribución cuando $n \to +\infty$ y $np \to \lambda > 0$ a la distribución de Poisson de parámetro λ.

9. Probar mediante el estudio de funciones características la ley débil de los grandes números para variables aleatorias i.i.d. con esperanza finita sin asumir la finitud del segundo momento.

10. Sean $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias definidas para cada $n \in \mathbb{N}$ como $X_n = c_n Y_n$. Probar que:

    a) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| = c < +\infty$ entonces $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$ con $X \sim \mathcal{C}(0, 1)$.

    b) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| = +\infty$ entonces no existe ninguna variable aleatoria Z tal que $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$.

    c) Si $c_n = \frac{1}{n}$ entonces $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} 0$.
    Sugerencia: Puede resultarle útil la desigualdad $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \log(n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

11. *a*) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución dada por $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}.$$

    Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[-1, 1]$.
    Sugerencia: Utilizar la identidad $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$.

    b) Sea $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$. y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{W_k}{2^k}.$$

    Probar que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[0, 1]$. Interpretar el resultado obtenido.

12. Sea $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios tal que para todo n las variables aleatorias X_n e Y_n son independientes y vale que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$. Probar que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X' + Y'$, donde X' e Y' son independientes y tales que $X' \sim X$ e $Y' \sim Y$.

13. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que satisface $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n - X) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ para ciertas variables aleatorias X y Z.

    a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} X$.

[1] Observar que este resultado dice que la distribución normal es la única invariante por la estandarización correspondiente al Teorema del Límite Central. ¿Es razonable esto?

b) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ y varianza σ^2. Mostrar que

$$n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ \\ \infty & \text{si } \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde $n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \infty$ significa que para todo $M > 0$ se tiene $\lim_{n\to+\infty} P(|n^\alpha(\overline{X}_n - \mu)| \leq M) = 0$. ¿Qué sucede si $\alpha = \frac{1}{2}$?[2]

14. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria no necesariamente definidas sobre un mismo espacio. Probar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$ para toda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

15. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que satisface $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ para un determinado parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ y cierta variable aleatoria X.

   a) Probar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en μ entonces $a_n(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} g'(\mu)X$.
   Sugerencia: Observar que para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos la escritura

   $$g(x) = g(\mu) + \big(g'(\mu) + T(x)\big)(x - \mu)$$

   donde $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua con $T(\mu) = 0$.

   b) Probar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con derivada segunda en μ y tal que $g'(\mu) = 0$ entonces $a_n^2(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{g''(\mu)}{2}X^2$.

16. Sean $X_1, \ldots, X_{100}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad dada por

   $$f_X(x) = \frac{2}{x^3}1_{(1,\infty)}(x)\,.$$

   Calcular aproximadamente $P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}\right)$.

   Sugerencia: Hallar la distribución de $\log X$.

17. Rehacer los ejercicios 1 y 2 de la práctica 8 utilizando el Teorema del Límite Central: pero donde se pide acotar la probabilidad, calcularla de manera aproximada. Comparar con las cotas obtenidas a partir de la desigualdad de Tchebychev.

18. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ se define la variable aleatoria[3][4]

   $$F_n(t) = \frac{\#\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i \leq t\}}{n}.$$

   a) Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface $F_n(t) \xrightarrow{cs} F(t)$.

   b) Mostrar que $\sqrt{n}\big(F_n(t) - F(t)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}\big(0, F(t)(1 - F(t))\big)$.

---

[2] Observar que esto muestra que las fluctuaciones del promedio con respecto a su media son de orden $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en el casos de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita.

[3] Observar que la aplicación $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de distribución acumulada aleatoria, es decir, si definimos $F_n : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F_n(\omega, t) = F_n(t)(\omega)$ entonces para cada $\omega \in \Omega$ la aplicación $F_n(\omega, \cdot)$ es una función de distribución acumulada.

[4] A las funciones de distribución acumulada F_n se las conoce como *medidas empíricas* (o *funciones de distribución muestral*) y son estimadores de la función de distribución F. Valen resultados de convergencia de F_n a F aún más fuertes de los que se muestran aquí.

19. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0,\theta]$ para cierto $\theta > 0$. Probar que $\sqrt{n}\big(\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}\big(0, 3^{-1}\big)$.

20. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$ y $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n {X_i}^2} \qquad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n {X_i}^2}} \qquad W_n = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2,$$

hallar el límite en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

21. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro λ. Hallar el límite en distribución de $\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \lambda^2)$.

22. Sean X_n e Y_m dos variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros n y m, respectivamente.

 a) Probar que
$$\frac{(X_n - n) + (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \text{cuando } n, m \to +\infty.$$

 b) Probar que
$$\frac{(X_n - n) - (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{D} Z \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \text{cuando } n, m \to +\infty.$$

23. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad
$$f(x) = \frac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}-1}1_{(1,+\infty)}(x)$$
para cierto $0 < \alpha < 1$.

 a) Hallar el límite de
$$Y_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_k}.$$
¿En qué sentidos puede garantizar esta convergencia? No analizar convergencia en L^p.

 b) Probar que
$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\left(\log\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_k} - \alpha\right)}{\sqrt{\log\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_k}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}(0,\alpha).$$

 c) Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = \alpha$. Probar que
$$W_n = \frac{1}{\alpha_n}\left[\left(\frac{\sqrt{n}\,(\log R_n - \alpha)}{\sqrt{\log R_n}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{n}\,(\log T_n - \alpha)}{\sqrt{\log T_n}}\right)^2\right] \xrightarrow{\mathcal{D}} W \sim \chi^2(2).$$
donde
$$R_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_{2k-1}} \quad \text{y} \quad T_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_{2k}}$$
para cada $n \in \mathbb{N}$.