

- Una máquina produce artículos de 3 clases: A, B y C en proporciones 25 %, 25 % y 50 % respectivamente. Las longitudes de los artículos A y B siguen distribuciones  $\mathcal{U}[0, 1]$  y  $\mathcal{U}[0, 2]$  respectivamente y las longitudes de los artículos C se distribuyen según la densidad  $f(x) = (1 - \frac{x}{2})\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$ . Se eligen  $n$  artículos al azar de la producción total y se calcula el promedio de sus longitudes.
  - Dar una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre  $\frac{15}{24}$  y  $\frac{19}{24}$  si el tamaño de la muestra es  $n = 100$ .
  - ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre  $\frac{15}{24}$  y  $\frac{19}{24}$  sea mayor o igual que 0.90?
- Sea  $p$  la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye la legalización del consumo de marihuana ( $p$  es desconocida). Se toma una muestra de 50 personas elegidas al azar, se les pregunta si apoyan o no la legalización y se estima  $p$  a partir de la frecuencia relativa  $f_r$  que se define por

$$f_r = \frac{\text{Nº de personas encuestadas que están a favor de la legalización}}{50}$$

Observar que  $f_r$  es una variable aleatoria y  $p$  es simplemente un número. Cuanto más cerca se encuentre  $f_r$  de  $p$ , mejor estimador será. Hallar una cota superior para  $P(|f_r - p| > 0,1)$  que no dependa de  $p$ .

### 3. Desigualdad de Tchebychev a un lado

- Sea  $X$  una variable aleatoria con  $\mathbb{E}(X) = 0$  y  $\text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$ . Probar que para todo  $a > 0$  vale

$$P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

*Sugerencia:* Observar que para todo  $b > 0$  vale la desigualdad

$$P(X > a) = P(X + b > a + b) \leq P((X + b)^2 > (a + b)^2). \quad (1)$$

Aplicar la desigualdad de Markov en (1) y calcular el mínimo en  $b$  de la cota hallada.

- Un conjunto de 200 personas (integrado por 100 mujeres y 100 hombres) se divide aleatoriamente en 100 pares de 2 personas cada uno. Utilizar la desigualdad de Tchebychev a un lado para hallar una cota superior para la probabilidad de que menos de 30 de estos pares estén formados por una mujer y un hombre. Comparar con la cota obtenida a partir de la desigualdad de Tchebychev original.
- Sean  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes tal que  $X_1 \equiv 0$  y para  $n \geq 2$

$$P(X_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \text{si } k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \\ 1 - \frac{2}{n^2} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Probar que si  $\alpha > \frac{1}{2}$  entonces

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n^\alpha} \xrightarrow{P} 0.$$

*Sugerencia:*  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

5. Sean  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(X_n) = 0$ .
- Probar que si  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $X_n \xrightarrow{P} 0$ .
  - Probar que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu \in \mathbb{R}$  entonces  $X_n \xrightarrow{P} \mu$ .
6. Sean  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias y  $X$  otra variable aleatoria, todas ellas definidas sobre el mismo espacio.
- Escribir el conjunto  $\{X_n \rightarrow X\}$  en términos de eventos de la forma  $\{|X_n - X| \leq \alpha\}$  con  $\alpha > 0$  y verificar que es un evento perteneciente a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ .
  - Escribir el conjunto  $\{X_n \not\rightarrow X\}$  en términos de numerables eventos de la forma  $\{|X_n - X| > \alpha\}$  con  $\alpha > 0$ .
  - Verificar que  $\{X_n \rightarrow X\} = \{X_n - X \rightarrow 0\}$ .
  - Sea  $L^+ = \limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n$ , i.e., para cada  $\omega \in \Omega$  se define  $L^+(\omega) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega)$ .
    - Para cada  $\alpha > 0$  escribir el conjunto  $\{L^+ \geq \alpha\}$  en términos de numerables eventos de la forma  $\{X_n > r$  para infinitos valores de  $n\}$  con  $r \in \mathbb{R}$  y verificar que es un evento perteneciente a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ . Deducir que  $L^+$  es una variable aleatoria.
    - Para cada  $\alpha > 0$  escribir el conjunto  $\{L^+ > \alpha\}$  en términos de numerables eventos de la forma  $\{X_n > r$  para infinitos valores de  $n\}$  con  $r \in \mathbb{R}$  y verificar que es un evento perteneciente a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ .
  - Demostrar afirmaciones análogas a las del ítem d) para  $L^- = \liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n$ .
7. Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución  $\varepsilon(1)$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  definamos la variable aleatoria

$$Y_n = \frac{X_n}{\log(n+1)}.$$

- Probar que  $Y_n \xrightarrow{P} 0$ .
  - Probar que  $P(L^+ = 1) = 1$ , donde  $L^+ := \limsup_{n \rightarrow +\infty} Y_n$ .
  - Probar que  $P(L^- = 0) = 1$ , donde  $L^- := \liminf_{n \rightarrow +\infty} Y_n$ .
  - Deducir de los ítems anteriores que la sucesión  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no tiene límite casi seguro.
8. Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución  $N(0, 1)$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  definamos la variable aleatoria

$$Y_n = \frac{X_n}{\sqrt{\log n}}.$$

- Probar que  $Y_n \xrightarrow{P} 0$ .
- Probar que  $P(L^+ = \sqrt{2}) = 1$ , donde  $L^+ := \limsup_{n \rightarrow +\infty} Y_n$ .  
*Sugerencia:* Probar primero que si  $X \sim N(0, 1)$  entonces para todo  $x > 0$  valen las desigualdades

$$\frac{f_X(x)}{x + \frac{1}{x}} \leq P(X > x) \leq \frac{f_X(x)}{x}.$$

- Deducir que  $P(L^- = -\sqrt{2}) = 1$ , donde  $L^- := \liminf_{n \rightarrow +\infty} Y_n$ .
- Concluir a partir de los ítems anteriores que la sucesión  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no tiene límite casi seguro.
- Probar que  $P(|\sum_{k=1}^n X_k| < 2\sqrt{n \log n}$  para todo  $n$  suficientemente grande) = 1. Deducir a partir de este resultado la ley fuerte de los grandes números para variables aleatorias con distribución normal.

9. Se elige al azar un número  $X$  en el intervalo  $[0, 1]$ .<sup>1</sup>

- Dados  $k \in \mathbb{N}$  y una secuencia ordenada de  $k$  dígitos  $(a_1, \dots, a_k) \in \{0, \dots, 9\}^k$ , calcular la probabilidad para cada  $n \in \mathbb{N}$  de que dicha secuencia coincida con la de los dígitos del desarrollo decimal de  $X$  entre los lugares  $n$  y  $n + k - 1$ .
- Dados  $k \in \mathbb{N}$  y una secuencia ordenada de  $k$  dígitos  $(a_1, \dots, a_k) \in \{0, \dots, 9\}^k$ , calcular la probabilidad de que dicha secuencia aparezca infinitas veces en el desarrollo decimal de  $X$ .
- Calcular  $P(\text{Ocurren infinitos } A_n)$ , donde para cada  $n \in \mathbb{N}$  se define el evento  $A_n$  como

$$A_n = \{\text{El 9 aparece } n \text{ veces consecutivas en los } 2n \text{ primeros lugares del desarrollo decimal de } X\}.$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que  $X$  sea racional?

10. Se tira infinitas veces una moneda de manera independiente y con probabilidad  $p$  de obtener cara en cada lanzamiento.

- Dado  $k \in \mathbb{N}$  calcular la probabilidad de obtener infinitas rachas de  $k$  caras consecutivas.
- Sea  $A_n$  el evento de obtener una racha de caras consecutivas de longitud no menor que  $n$  entre los lanzamientos  $2^n$  y  $2^{n+1} - 1$ . Probar que

$$P(\text{Ocurren infinitos } A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Sugerencia:* Si  $p \geq \frac{1}{2}$  entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - (1 - p^n)^{\lfloor \frac{2^n}{n} \rfloor}\right) = +\infty$ .

11. Probar que una sucesión de variables aleatorias  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilidad a una variable aleatoria  $X$  si y sólo si toda subsucesión de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contiene otra subsucesión que converge casi seguramente a  $X$ .<sup>2</sup>

12. Una colección  $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$  de variables aleatorias se dice *acotada en probabilidad* o *tight* si dado  $\varepsilon > 0$  existe un compacto  $K_\varepsilon$  tal que

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} P(X_i \notin K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

- Probar que toda colección finita de variables aleatorias es acotada en probabilidad.
- Mostrar que una familia infinita de variables aleatorias no es necesariamente acotada en probabilidad.
- Sean  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias y  $X_0$  una variable aleatoria tal que  $X_n \xrightarrow{P} X_0$ . Probar que la familia  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  está acotada en probabilidad.

13. Sean  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dos sucesiones de variables aleatorias.

- Probar que si  $X_n \xrightarrow{P} 0$  e  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada en probabilidad entonces  $X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$ .
- Probar que si  $X_n \xrightarrow{P} X$  e  $Y_n \xrightarrow{P} Y$  entonces  $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$  y que  $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$ .
- Probar que si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada entonces para todo  $p \geq 1$  vale  $X_n \xrightarrow{P} 0 \iff X_n \xrightarrow{L^p} 0$ .

<sup>1</sup>Si un número admite dos desarrollos decimales se optará por el finito. Por ejemplo, se tomará 0.745 y no 0.744 $\hat{9}$ .

d) Mostrar con un ejemplo que la equivalencia del ítem anterior puede no valer si la sucesión  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no es acotada. ¿Es alguna de las implicaciones cierta siempre? ¿Cuál?

14. Sean  $(\mathbf{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de vectores aleatorios sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{X}_0$  otro vector aleatorio sobre  $\mathbb{R}^n$ .

- a) Probar que si  $\mathbf{X}_k \xrightarrow{P} \mathbf{X}_0$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función continua entonces  $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{P} g(\mathbf{X}_0)$ .  
*Sugerencia:* Tener presente que  $(\mathbf{X}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  es una sucesión acotada en probabilidad y que toda función continua es uniformemente continua sobre compactos.
- b) Probar que si  $\mathbf{X}_k \xrightarrow{cs} \mathbf{X}_0$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función continua entonces  $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{cs} g(\mathbf{X}_0)$ .
- c) Probar que si  $\mathbf{X}_k \xrightarrow{P} \mathbf{X}_0$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y acotada entonces  $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{L^p} g(\mathbf{X}_0)$  para todo  $p \geq 1$ .

15. Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias.

a) Supongamos que  $X_n \xrightarrow{P} k$  para cierta constante  $k \in \mathbb{R}$  no nula. Se define la sucesión  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  como

$$Z_n = \begin{cases} \frac{1}{X_n} & \text{si } X_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

Probar que  $Z_n$  es una variable aleatoria para todo  $n \in \mathbb{N}$  y que  $Z_n \xrightarrow{P} \frac{1}{k}$ . Adoptaremos la notación  $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{k}$  para referirnos a este hecho.

b) Supongamos que  $X_n \xrightarrow{P} X$  con  $P(X = 0) = 0$ . Se define la sucesión  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  como en el ítem anterior. Probar que  $Z_n \xrightarrow{P} Z$ , donde  $Z$  está definida por la fórmula

$$Z = \begin{cases} \frac{1}{X} & \text{si } X \neq 0 \\ 0 & \text{si } X = 0. \end{cases}$$

Adoptaremos la notación  $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{X}$  para referirnos a este hecho.

*Sugerencia:* Observar que  $\frac{X_n}{X} \xrightarrow{P} 1$  y aplicar el resultado establecido en el ítem anterior.

16. Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas definidas sobre el intervalo  $[0, 1]$  tales que  $0 < f(x) \leq kg(x)$  para todo  $x \in [0, 1]$ , donde  $k$  es una cierta constante positiva.

a) Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un punto elegido al azar en el cubo  $[0, 1]^n$ . Definimos las sucesiones de variables aleatorias  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  por las fórmulas

$$Y_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(X_i)}{n} \quad \text{y} \quad Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{g(X_i)}{n}.$$

Probar que

$$Y_n \xrightarrow{P} \int_0^1 f(x) dx \quad \text{y} \quad Z_n \xrightarrow{P} \int_0^1 g(x) dx.$$

b) Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{g(x_1) + \dots + g(x_n)} dx_1 \dots dx_n = \frac{\int_0^1 f(x) dx}{\int_0^1 g(x) dx}$$

17. Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución  $\mathcal{U}[0, 1]$ . Hallar el límite casi seguro de la sucesión  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donde para cada  $n \in \mathbb{N}$  la variable aleatoria  $Y_n$  se define como

$$Y_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i}.$$

18. Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que  $\mathbb{E}(X) = 1$ ,  $\mathbb{E}(X^2) = 2$  y  $\mathbb{E}(X^4) < +\infty$ . Probar que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{cs} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

19. Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución  $N(0, 1)$ . Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  definimos para cada  $n \in \mathbb{N}$  la variable aleatoria

$$Z_n = e^{aS_n - bn}$$

donde  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Probar que  $Z_n \xrightarrow{cs} 0 \iff b > 0$  pero que para  $r \geq 1$  se tiene  $Z_n \xrightarrow{L^r} 0 \iff r < \frac{2b}{a^2}$ .

20. Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con  $\mathbb{E}(|X_1|) = +\infty$ .

- Probar que para todo  $k \in \mathbb{N}$  se verifica  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n| > kn) = +\infty$ .
- Probar que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|X_n|}{n} = +\infty$ .
- Deducir que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty$ , donde  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .
- Concluir del ítem anterior que si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{cs} \mu$  para cierto  $\mu \in \mathbb{R}$  entonces  $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$ .