

1. El diámetro  $D$  expresado en decímetros del tronco de una cierta especie de árboles es una variable aleatoria continua (o absolutamente continua) con función de densidad

$$f_D(x) = k x \mathbb{1}_{(0,10)}(x)$$

- a) Hallar el valor de la constante  $k$ .
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 decímetros?
- c) ¿Cómo se modifica la probabilidad anterior si se sabe que el diámetro mide más de 5 decímetros?
- d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan diámetro entre 4 y 6 decímetros.
- e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 decímetros sea no menor a 0,99?
2. El colectivo que toma Felipe para ir al trabajo llega a la parada en algún momento entre las 10 y las 10:30 de la mañana con distribución uniforme. Felipe llega a la parada a las 10 de la mañana.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 10 minutos?
- b) Si el colectivo no ha llegado todavía a las 10:15, hallar la probabilidad de que Felipe tenga que esperar por lo menos otros 10 minutos más.

3. Se dice que una variable aleatoria  $X$  tiene distribución simétrica respecto de  $\theta \in \mathbb{R}$  si  $X - \theta \sim \theta - X$ .

- a) Dar dos ejemplos de variables aleatorias con distribución simétrica, una discreta y otra continua.
- b) Sea  $X$  una variable aleatoria absolutamente continua. Probar que  $X$  tiene distribución simétrica respecto de  $\theta$  si y sólo si  $f_X$  es simétrica respecto de  $\theta$ , i.e.  $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  
*Sugerencia:* Si encuentra problemas técnicos, puede suponer que la densidad  $f_X$  es una función continua.<sup>1</sup>

4. Una fábrica produce pilas cuya duración en horas, cuando se las destina para un determinado uso, tiene distribución normal de parámetros  $\mu_0 = 53$  y  $\sigma_0^2 = 25$ . No obstante, un desperfecto en un sector de la fábrica produjo un cambio en la calidad de las pilas: del total que se fabrica una proporción 0,7 de ellas tiene la duración correcta mientras que las restantes están falladas y tienen una duración en horas con distribución normal de parámetros desconocidos  $\mu_1$  y  $\sigma_1^2$ . Desafortunadamente, no hay forma de distinguir entre una pila común y una fallada a simple vista. Sea  $D$  la duración en horas de una pila extraída al azar del lote de producción de la fábrica.

- a) Calcular  $\mu_1$  y  $\sigma_1^2$  sabiendo que  $P(D \geq 47) = 0,82688$  y  $P(D \geq 60) = 0,05746$ .
- b) Calcular la función de densidad de la duración en horas de una pila extraída al azar del lote de producción de la fábrica.
- c) Si se extrae una pila al azar del lote de producción y se observa que dura más de 51 horas en funcionamiento, ¿cuál es la probabilidad de que sea una pila fallada?

---

<sup>1</sup>Aunque puede mostrarse que el resultado vale para una densidad  $f_X$  arbitraria.

5. **Definición.** Una variable aleatoria  $X$  tiene la *propiedad de falta de memoria* si para todo par de números reales  $s$  y  $t$  se verifica  $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$ .

Probar que una variable aleatoria  $X$  posee la propiedad de falta de memoria si y sólo si tiene distribución exponencial<sup>2</sup> de parámetro  $\lambda = -\log(P(X > 1))$ .

6. Sean  $\lambda > 0$  y  $X$  una variable aleatoria con distribución  $\mathcal{E}(\lambda)$ . Probar que  $Y = [X] + 1$  tiene distribución geométrica de parámetro  $p = 1 - e^{-\lambda}$ , donde  $[x]$  denota la parte entera de  $x$ .

7. Definimos la función Gamma  $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  por la fórmula

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

a) Probar que  $\Gamma$  está bien definida<sup>3</sup>.

b) Mostrar que  $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$  para todo  $\alpha > 1$ . Deducir que  $\Gamma(n) = (n - 1)!$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

c) Probar que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

*Sugerencia:* Hallar la función de densidad de  $Z^2$  para  $Z$  una variable aleatoria con distribución normal estándar. ¿Es la densidad obtenida la de una distribución conocida? ¿Cuál?

8. Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $Z$  una variable aleatoria con distribución  $\Gamma(n, \lambda)$ . Probar que para todo  $z > 0$  se tiene

$$F_Z(z) = P(X_z \geq n)$$

donde  $X_z$  es una variable aleatoria con distribución  $\mathcal{P}(z\lambda)$ .

9. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada  $F$ . Mostrar que  $F(X)$  tiene distribución  $\mathcal{U}[0, 1]$ <sup>4</sup>.

10. Sea  $U$  una variable con distribución  $\mathcal{U}(0,1)$ . Encontrar una función  $g$  tal que  $g(U)$  tenga distribución

a)  $\mathcal{E}(1)$

b) Doble exponencial de parámetro uno, es decir, con función de densidad  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$

c)  $Bi(5, 1/3)$

d) Una distribución discreta con rango  $R_X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y respectivas probabilidades puntuales  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

11. Don Zoilo tiene dos vacas, Aurora y Belinda. La cantidad de leche en litros que da Aurora en un día es una variable aleatoria  $X$  con distribución  $\mathcal{E}(0,2)$ . Belinda, en cambio, da 5 litros el 20% de las veces que es ordeñada y el resto no da nada. Don Zoilo ordeña a Belinda solamente los días en que Aurora da menos de 6 litros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Aurora dé más de 6 litros en exactamente dos días de la próxima semana? Cabe aclarar que los fines de semana Don Zoilo no ordeña a sus vacas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que Don Zoilo obtenga más de 8 litros en un día?

<sup>2</sup>Este ejercicio muestra que la distribución exponencial exhibe una propiedad de falta de memoria análoga a la de la distribución geométrica. Esto no es coincidencia, como lo muestra el ejercicio siguiente.

<sup>3</sup>Mostrar que la integral impropia converge para todo  $\alpha > 0$ .

<sup>4</sup>Recordar que la inversa generalizada se define por  $F^{-1}(y) = \inf \{x : F(x) \geq y\}$ .

- c) Con la leche que obtiene de Aurora, Don Zoilo fabrica manteca. La cantidad de manteca en kilos que obtiene con  $X$  litros de leche es  $W = g(X)$  siendo

$$g(X) = \begin{cases} \sqrt[3]{X} & \text{si } X \leq 8 \\ \frac{1}{7}(X-1)^2 - 5 & \text{si } 8 < X \leq 15 \\ 2X - 7 & \text{si } 15 < X \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de la cantidad de manteca fabricada.

12. Sean  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  y  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$  sucesiones convergentes tales que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \mu$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \sigma$ .

- a) Probar que si  $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .<sup>5</sup>  
b) ¿Qué sucede con la convergencia en distribución si  $|\mu| = +\infty$  o  $\sigma = +\infty$ ?

13. Hallar el límite en distribución de la sucesión  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en cada uno de los siguientes casos:

- a) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  la variable aleatoria  $Z_n$  tiene distribución uniforme en el conjunto  $\{\frac{i}{n} : 1 \leq i \leq n\}$ .  
b) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  la variable aleatoria  $nZ_n$  tiene distribución geométrica de parámetro  $\frac{\lambda}{n}$ .

---

<sup>5</sup>Por convención, denotamos por  $N(\mu, 0)$  a la variable aleatoria constante  $\mu$ .