Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2013

Práctica 9

Geometría Riemanniana

1. Sea M una variedad y sea (U, φ) una carta de M. Probar que la asignación

$$(X, \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \mapsto \sum_i X(\alpha_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

define una conexión en U.

2. Sea $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la carta usal y sea g la métrica dada por $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$ y $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.

3. Sea $M = \mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica dada por $g_{ii} = 1$, si $1 \leq i \leq n$, $g_{n+1n+1} = -1$ y $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.

4. Sea ∇ una conexión sobre una variedad M, y sea $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ su torsión. Probar que T es $C^\infty(M)$-bilineal.

5. Sean (M, g) una variedad riemanniana con la conexión riemanniana y $\alpha : I \to M$ una curva suave. Probar que si X e Y son campos paralelos a lo largo de α, entonces el ángulo entre X e Y es una función constante.

6. Probar que si ∇_i son conexiones y $\sum_i \alpha_i = 1$, entonces $\sum_i \alpha_i \nabla_i$, es una conexión.

7. Probar que si ∇ es una conexión con torsión T, entonces $\nabla - \frac{1}{2}T$ es una conexión simétrica. Encontrar sus símbolos de Christoffel en función de los de ∇.

8. Sean M una variedad riemanniana de diemensión n y ∇ una conexión en M. Sean $\alpha : I \to M$ una curva suave, $t_0 \in I$ y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ una base de $T_{\alpha(t_0)}M$. Dados $X_1, \ldots, X_n$ campos paralelos a lo largo de α tales que $X_i(t_0) = v_i$, probar lo siguiente.

   a) El conjunto $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ es linealmente independiente para todo $t \in I$.

   b) Si Y es un campo paralelo a lo largo de α tal que $Y(t_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, entonces $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(t)$ para todo $t \in I$.

   c) Los campos paralelos a lo largo de α forman un espacio vectorial de dimensión n.

9. Sea G un grupo de Lie, y sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una base de campos invariantes a izquierda. Sea ∇ la conexión determinada por $\nabla_{X_i} X_j = 0$ para todo i, j.

   a) Mostrar que esta definición es independiente de la base de campos invariantes elegida.

   b) Calcular la torsión de esta conexión.