Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2013

Práctica 8

Cohomología de de Rham

1. Sea $0 \to C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^n \to 0$ un complejo (finito) de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Probar que $\sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} C^q = \sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} H^q(C^*)$. Deducir que si el complejo es exacto, entonces $\sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} C^q = 0$.

2. Calcular la cohomología de de Rham de las siguientes variedades.
   - La esfera $\mathbb{S}^n$.
   - La variedad M_r que se obtiene quitando r puntos al plano.
   - La banda de Möbius abierta.

3. Calcular la cohomología de de Rham con soporte compacto de las variedades del ejercicio anterior.

4. ¿Puede $\mathbb{R}^2$ escribirse como unión de dos abiertos conexos U y V tales que su intersección no sea conexa?

5. Sean p, q dos puntos distintos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que un cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ separa a p de q si esos dos puntos pertencen a componentes conexas distintas de $\mathbb{R}^n - A$. Dados dos cerrados disjuntos A y B y dos puntos distintos p, q de $\mathbb{R}^n - (A \cup B)$, probar que si ni A ni B separan a los puntos, entonces tampoco los separa $A \cup B$.

6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados con $A, B \neq \mathbb{R}^n$. Probar que si A y B son homeomorfos, entonces $H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - A) \simeq H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - B)$. Deducir que para todo A, B cerrados de $\mathbb{R}^n$ homeomorfos (incluso para A o B igual a $\mathbb{R}^n$), $\mathbb{R}^n - A$ y $\mathbb{R}^n - B$ tienen la misma cantidad de componentes conexas.

7. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio homeomorfo a S^k (para $1 \leq k \leq n-2$). Probar que
$$H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - A) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0, n-k-1, n-1, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

8. Probar que si M es orientable, sin borde, conexa y no compacta de dimensión n, entonces $H^n(M) = 0$.

9. Sea M una variedad compacta, sin borde y orientable de dimensión $n = 2m$ con m impar. Probar que $H^m(M)$ tiene dimensión par. Deducir que la característica de Euler $\chi(M)$ es par.

10. Sea M una variedad compacta, sin borde y orientable de dimensión impar. Probar que $\chi(M) = 0$.

11. Sean $U, V \subset M$ abiertos tales que U, V y $U \cap V$ son de tipo finito. Probar que $U \cup V$ es de tipo finito y $\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$.

12. Sea $W \subset \mathbb{C}$ una región compacta con borde suave y $p \in \mathbb{C}[X]$ polinomio no constante que no tiene raíces en ∂W. Probar que la cantidad de ceros de p en W contados con multiplicidad coincide con el grado de $p/|p| : \partial W \to \mathbb{S}^1$.

13. Calcular el grado de la función antípoda $a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $a(x) = -x$.

14. Probar que son equivalentes.

    a) n es impar.

    b) Existe un campo vectorial nunca nulo en $\mathbb{S}^n$.

    c) La antípoda es homotópica a la identidad.

15. Recordar que dada $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\cos t, \sin t) = (\cos g(t), \sin g(t))$. En ese caso, se tiene que $g(t + 2\pi) = g(t) + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Probar que $\deg f = k$.

16. Sean $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Probar que f y g son homotópicas si y sólo si tienen el mismo grado.

17. Probar que una función diferenciable $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ se puede extender suavemente al disco D^2 si y sólo si $\deg f = 0$.