Práctica 7

Integración y variedades riemannianas

1. Probar que la integración de formas en una variedad diferenciable orientada M cumple las siguientes propiedades.

   a) Si $-M$ denota la variedad on la orientación opuesta, entonces $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$.

   b) $\int_M a\omega_1 + b\omega_2 = a\int_M \omega_1 + b\int_M \omega_2$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

   c) Si ω es una n-forma continua y no negativa entonces $\int_M \omega \geq 0$ y la igualdad se verifica sólo si $\omega = 0$.

   d) Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo entre variedades conexas orientadas y ω es una forma integrable en N, entonces $\int_M f^*\omega = \pm\int_N \omega$, donde el signo depende de si f preserva o invierte la orientación.

2. Sea M compacta, sin borde y de dimensión n, y sea $\omega \in \Omega^n(M)$ que no se anula. Probar que ω no es exacta.

3. *a*) Sea $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Probar que α es cerrada, pero no exacta.

   b) Más generalmente, sea $\omega(x) = \sum_{0\leq i<n}(-1)^i x_i\, dx_0 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \in \Omega(\mathbb{R}^n)$. Probar que $\alpha \in \Omega(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, dada por $\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^n}\omega(x)$, es cerrada pero no exacta. (Sugerencia: mostrar que $\int_{S^{n-1}} \omega \neq 0$. De hecho, vale que $\int_{S^{n-1}} \omega = |S^{n-1}|$.)

4. Sea M una variedad diferenciable y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada.

   a) Si S es subvariedad de M compacta, sin borde, orientada y de dimensión k tal que $S = \partial W$ para alguna subvariedad W de M, entonces $\int_S \omega = 0$.

   b) Si W es subvariedad orientable de dimensión $k+1$ con borde $\partial W = S \sqcup T$ donde S y T son subvariedades de dimensión k con la orientación inducida, entonces $\int_S \omega = -\int_T \omega$.

5. Probar que el toro T no es difeomorfo a la esfera S^2.
   (Sugerencia: hallar una 1-forma en T cerrada que no sea exacta, y ver que toda 1-forma en S^2 cerrada es exacta.)

6. Sea M una variedad.

   a) Probar que si $\theta, \tilde{\theta} \in \Omega^k(M)$, entonces $\theta = \tilde{\theta}$ si y sólo si se verifica

   $$\int_\sigma \theta = \int_\sigma \tilde{\theta}$$

   para cada $\sigma : S \to M$ con S compacta, orientada y de dimensión k.

   b) Sea $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$. Probar que existe una única $\theta \in \Omega^k(M)$ tal que para toda $N \subseteq M$ subvariedad orientable compacta, con borde y de dimensión k vale

   $$\int_S \theta = \int_{\partial S} \omega.$$

Notación: si $\alpha \in \Omega^{1+k}(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, se define su *contracción*

$$\iota_X\alpha = \alpha(X, -, \dots, -) \in \Omega^k(M).$$

7. Dada M variedad de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión, se da a M la estructura riemanniana inducida, es decir para $p \in M$ y $v, w \in T_pM$ vale $\langle v, w\rangle_p := \langle df(v), df(w)\rangle_{f(p)}$. Probar que si M es orientada y η es el campo de vectores normales unitarios en $f(M)$ que dan la orientación, entonces la forma de volumen en M está dada por

$$\omega = f^*(\iota_\eta(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1})).$$

8. Recordar que, dada una carta (U, φ) en una variedad riemanniana M, su forma de volumen se escribe como $\Omega|_U = \sqrt{\det g_{i,j}}\, d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n$, donde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial\varphi_i}, \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\rangle$.

   a) Calcular la matriz (g_{ij}) para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ en coordenadas polares y esféricas.

   b) Calcular la matriz (g_{ij}) y la forma de volumen para S^1 y S^2, y calcular los respectivos volúmenes.

9. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, orientado y de dimensión n.

   a) Probar que para cada k se puede definir un producto interno en $\Lambda^k(V)$ dado por

   $$\langle \wedge_i v_i, \wedge_j w_j\rangle = \det\left(\langle v_i, w_j\rangle_{i,j}\right).$$

   b) Sea $(v_i)_{0\le i<k} \in V^k$ una k-upla de vectores tangentes. Entonces existe un único $z \in \wedge^{n-k}V$ (el *producto vectorial* de los v_i) tal que para cada $(w_i)_{k\le i<n} \in V^{n-k}$ se cumple

   $$\langle z, w_k \wedge \cdots \wedge w_{n-1}\rangle = \omega(v_0, \dots, v_{k-1}, w_k, \dots, w_{n-1}),$$

   donde ω es la forma de volumen orientado de V. Probar que el producto vectorial define una función lineal $\wedge^k V \to \wedge^{n-k}V$, es decir, un elemento $P \in \wedge^k V^* \otimes \wedge^{n-k}V$. ¿Qué pasa si invertimos la orientación de V?
   En el caso $k = n-1$, escribir a P en términos de una base ortonormal $(e_i)_{0\le i<n}$ y su base dual $(e^j)_{0\le j<n}$, y relacionar con la forma ω del ejercicio 3. Si $V = \mathbb{R}^3$, relacionar con el producto vectorial usual.

   c) Probar que si $V = T_pM$ era el espacio tangente a una variedad riemanniana orientada, y S es una subvariedad orientada de dimensión k con forma de volumen ω, entonces para cada k-upla de vectores $(v_i)_i \in (T_pS)^k$ se tiene

   $$|\omega(\dots, v_i, \dots)| = \|\cdots \wedge v_i \wedge \dots\|.$$

   Si $k = n-1$, probar que el vector normal orientado en p está dado por

   $$N_p = P(v_1, \dots, v_{n-1}),$$

   donde $v_1, \dots, v_{n-1}$ es una base ortonormal orientada de T_pS.

10. (*Arquímedes, circa -250*) Sea $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_0 > 0\}$ el mar, con $n = 3$. Sea $S \subseteq M$ un cuerpo sumergido (subvariedad compacta de dimensión n, con borde). En cada punto $x \in \partial S$, el mar hace una fuerza $F(x) = -kx_0\eta(x)$, donde kx_0 es la presión del agua (que es proporcional a la profundidad x_0, con $k > 0$ constante) y η es el vector tangente unitario hacia afuera. La fuerza total es entonces $F_{\partial S} = \int_{\partial S}\omega$, donde $\omega(x) = -kx_0P$ es una $n-1$ forma en M con valores en $\mathbb{R}^n$ (es decir, es una n-upla de elementos de $\Omega^{n-1}(M)$), porque $P : \wedge^{n-1}V \to \mathbb{R}^n$ es el producto vectorial de $\mathbb{R}^n$. Probar que

$$F_{\partial S} = -k\,|S|\,e_0.$$