

Formas diferenciales y orientación

1. Se define el rango de un tensor como la mínima cantidad de tensores elementales que hay que sumar para obtenerlo.
 - a) Probar que el rango de una transformación lineal $V \rightarrow W$, vista como elemento de $V^* \otimes W$, coincide con el rango usual (la dimensión de su imagen).
 - b) Probar que si $n < 4$, entonces todos los tensores de $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ son elementales. ¿Qué pasa si $n = 4$? (Sugerencia: Un elemento de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ puede pensarse como transformación lineal entre dos espacios de dimensión n)
2. Sea g una función bilineal en un \mathbb{R} -espacio vectorial V con producto interno. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V . Probar que $\sum_i g(v_i, v_i)$ no depende de la base elegida. Concluir que $\sum_i v_i \otimes v_i$ es un tensor bien definido (que no depende de B).
3. Sean $\eta \in \Omega^1(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$, mostrar que
 - a) $f\eta \in \Omega^1(M)$,
 - b) $d(fg) = fdg + gdf$.
4. Sean $M = \mathbb{R}^n$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, y $\langle X, - \rangle$ definido de la siguiente manera: si $v \in T_p M$, $\langle X, v \rangle := \langle X_p, v \rangle$. Mostrar que $\langle X, - \rangle$ es una 1-forma. Mostrar que toda 1-forma es de esta manera. Por ejemplo, $df = \langle \nabla f, - \rangle$.
5. Sea X una variedad, ω una 1-forma. Sean (U, φ) , (V, ψ) dos cartas alrededor de un punto $x \in X$. Si $\omega(x) = \sum_i \alpha_i d\varphi_i = \sum_j \beta_j d\psi_j$, encontrar la relación entre los α_i y los β_j .
6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{K} de característica 0, φ y ψ en V^* . Mostrar que la aplicación $(v, w) \mapsto \varphi(v)\psi(w)$ es una aplicación bilineal definida en $V \times V$ a valores en \mathbb{K} . Mostrar que bajo la identificación $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{K}) \cong (V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$, esta forma bilineal se corresponde con $\varphi \otimes \psi$.
7. Sea $u \in \Lambda^k(V)$ y $v \in \Lambda^l(V)$. Entonces $u \wedge v \in \Lambda^{k+l}(V)$ cumple $u \wedge v = (-1)^{kl}v \wedge u$.
8. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Definir $\det(f)$ sin apelar a ninguna base de V . Probar que si g es otro endomorfismo, $\det(fg) = \det(f)\det(g)$. (Sugerencia: considerar $\Lambda^n V$)
9. Dada una variedad M , definir apropiadamente el fibrado exterior k -ésimo $\Lambda^{k*}(M)$ y probar que una k -forma C^∞ equivale a una sección a ese fibrado.
10. Probar que una k -forma ω es C^∞ si y sólo si para toda familia X_1, \dots, X_k , $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, la función $\omega(X_1, \dots, X_k)$ definida por $\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \omega_p(X_1(p), \dots, X_k(p))$ es diferenciable.
11. Una función $f : M \rightarrow N$ diferenciable induce $f^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ definida por $f^*(g) = g \circ f$ en Ω^0 y $(f^*w)_p(v_1, \dots, v_k) = w_p(df(v_1), \dots, df(v_k))$ en Ω^k .
 - a) Probar la buena definición de f^* , es decir, que f^*w es suave si w lo es.
 - b) Probar que f^* es morfismo de \mathbb{R} -álgebras, es decir, que es \mathbb{R} -lineal y $f^*(w \wedge v) = f^*(w) \wedge f^*(v)$.

12. Sea ω una k -forma en M , con $k \geq 1$, ¿es cierto que $\omega \wedge \omega = 0$? ¿Qué pasa si $\dim M = 3$?
13. Sea M una variedad diferenciable. Probar que TM es una variedad orientable.
14. Probar que si M tiene un atlas de la forma $\mathcal{A} = \{(U, \varphi); (V, \psi)\}$ donde $U \cap V$ es conexo, entonces M es orientable.
15. Ver que toda M paralelizable es orientable.
16. Sea M y N variedades diferenciables. Probar que son equivalentes
 - a) M y N son orientables,
 - b) $M \times N$ es orientable.
17. Probar que la esfera S^n y \mathbb{R}^n son orientables. Probar que el n -toro T^n y el cilindro son orientables.
18. Sea M una variedad orientable conexa y $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Si \mathcal{A} es un atlas orientado compatible con la orientación, probar que para dos cartas $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$ ($i = 1, 2$) el signo de $J(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})$ es constante (donde está definida la composición). Interpretar.
19. Sea X una variedad diferenciable, (U, φ) una carta y $\omega \in \Omega^k(X)$. Calcular $d\omega|_U$ en las coordenadas de (U, φ) para los casos $0 \leq k \leq 2$.
20. Sea $\omega \in \Omega^k(X)$. Probar que

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}).$$

21. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable.
 - a) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v) := \langle F(x), v \rangle$ define una 1-forma en \mathbb{R}^3 . Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en \mathbb{R}^3 , probar que ω determina un único campo G en \mathbb{R}^3 tal que $\omega_G^1 = \omega$.
 - b) Demostrar ahora que $\omega_F^2(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v \rangle$ define una 2-forma en \mathbb{R}^3 . Calcular sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en \mathbb{R}^3 tal que $\omega_G^2 = \omega$.
 - c) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$. Encontrar la relación entre
 - 1) df y ∇f ,
 - 2) $\nabla \times F$ y $d\omega_F^1$,
 - 3) $\nabla \cdot F$ y $d\omega_F^2$ (aquí identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \simeq C^\infty(\mathbb{R}^3)$ usando la base $dx \wedge dy \wedge dz$).
 Concluir, usando la relación $d \circ d = 0$, las fórmulas clásicas $\nabla \times \nabla \equiv 0$ y $\nabla \cdot \nabla \times \equiv 0$.