

Grupos y álgebras de Lie y curvas integrales

1. Sea G un grupo de Lie conexo y U en entorno abierto de e .
 - a) Probar que existe un abierto V tal que $e \in V \subset U$ que cumple $V = V^{-1}$, donde $V^{-1} = \{g^{-1}, g \in V\}$.
 - b) Probar que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, donde $U^n = \{g_1 g_2 \dots g_n, g_i \in U\}$.
2. Sea G grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo que es al mismo tiempo una subvariedad regular. Probar que H es cerrado en G .
3. Probar que $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}), A^t A = Id\}$ es grupo de Lie.
4. Sea H un subgrupo (en el sentido algebraico) de un grupo de Lie G . Probar que la clausura \overline{H} también es subgrupo de G .
5. Sea G un grupo de Lie que actúa sobre una variedad diferenciable M . Dado $x \in M$, considerar el grupo de isotropía G_x .
 - a) Probar que G_x es cerrado en G .
 - b) Si la acción es transitiva, probar que para todo $x, y \in M$, G_x y G_y son conjugados.
6. Probar que $O(n)$ actúa transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} y determinar los grupos de isotropía.
7. Probar que los siguientes grupos discretos G actúan en forma propiamente discontinua sobre la variedad M y calcular la variedad de órbitas M/G .
 - a) $G = \mathbb{Z}$ que actúa sobre $M = \mathbb{R}$ vía $m \cdot x = x + m$.
 - b) G el grupo de raíces n -ésimas de la unidad en \mathbb{C} (para un $n \in \mathbb{N}$ fijo) que actúa sobre \mathbb{S}^1 por multiplicación.
 - c) $G = \mathbb{Z}_2$ actuando en \mathbb{S}^n vía $\sigma \cdot x = -x$.
8. En la práctica 3 se probó que $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie para cualquier variedad M . Probar que $[\cdot, \cdot]$ no es $C^\infty(M)$ -bilineal. Más precisamente, probar que $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$, para f, g funciones diferenciables y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
9. Probar que el álgebra de Lie asociada a $GL(n, \mathbb{R})$ es $gl(n, \mathbb{R})$.
10. Sean G, H grupos de Lie y sean \mathfrak{g} y \mathfrak{h} sus álgebras de Lie asociadas (campos invariantes a izquierda). Dado un morfismo de grupos de Lie $f : G \rightarrow H$ e identificando las álgebras de Lie con los tangentes en las identidades, queda definido un morfismo $df : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Probar que df es morfismo de álgebras de Lie.
11. Sea $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ un álgebra de Lie. Si $\dim \mathfrak{g} = 1$, entonces \mathfrak{g} es abeliana (es decir $[\cdot, \cdot] \equiv 0$). Si $\dim \mathfrak{g} = 2$ demuestre que, o bien \mathfrak{g} es abeliana, o bien existe una base $\{x, y\}$ de \mathfrak{g} tal que $[x, y] = x$.
12. Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ y definamos $[v, w] := v \times w$. Verificar que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie.
13. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ un par de campos f -relacionados. Probar que si c es una curva integral de X entonces fc es una curva integral de Y .

14. Si (U, φ) es una carta de M , calcular una curva integral del campo $\partial\varphi_1$.
15. Sea $N \subseteq M$ una subvariedad cerrada y $X \in \mathfrak{X}(M)$ tangente a N , es decir, para cada $p \in N$ se tiene $X_p \in T_p N$. Probar que N es invariante por el flujo de X , es decir, una curva integral de X que pasa por N se mantiene en N . ¿Es invariante también su complemento $M \setminus N$? Mostrar con un ejemplo que la hipótesis de que N es cerrada es necesaria.
16. En cada uno de los siguientes casos calcular el grupo uniparamétrico generado por el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.
 - a) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ (vía la identificación $T_x \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$).
 - b) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.
 - c) $M = \text{GL}_n$, $X(A) = BA$, con $B \in M_n(\mathbb{R})$.
17. Sea M una variedad, $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo, $c : (a, b) \rightarrow M$ la curva integral maximal tal que $c(0) = p$. Si $\exists t \neq 0$ tal que $c(t) = p$, probar que $(a, b) = \mathbb{R}$.
18. En cada uno de los siguientes casos probar que $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ es un grupo uniparamétrico y calcular su generador infinitesimal $X \in \mathfrak{X}(M)$
 - a) $M = V$ un \mathbb{R} -espacio vectorial (de dimensión finita) y $\phi(t, v) = ta + v$, con $a \in M$ fijo.
 - b) $M = T^2 = S^1 \times S^1$, $\phi(t, z, w) = (e^{2t}z, e^{-t}w)$.
 - c) $M = S^1 \times \mathbb{R}$, $\phi(t, z, x) = (e^{tx}, z)$.