

Transversalidad e intersección módulo 2

1. Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y sea $y \in \mathbb{R}$ un valor regular.
 - a) Probar que $f^{-1}(y)$ tiene un número par de puntos.
 - b) Si $f^{-1}(y)$ tiene $2k$ puntos, probar que f tiene al menos $2k$ puntos críticos.
2. Sea M variedad diferenciable y $A \subset M$ subespacio conexo. Probar que, si existe una retracción diferenciable, es decir una función diferenciable $r : M \rightarrow M$ tal que $r(M) = A$ y $r|_A = id$, entonces A es una subvariedad regular de M .
3. Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable, donde M es variedad con borde y N sin borde y sea $A \subset N$ subvariedad regular sin borde. Probar que si $f \pitchfork A$ y $\partial f \pitchfork A$, entonces $f^{-1}(A) \subset M$ es subvariedad regular con borde y $\partial(f^{-1}(A)) = \partial M \cap f^{-1}(A)$.
4. (Teorema de Sard para variedades con borde) Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable, M con borde y N sin borde. Entonces casi todo punto de N es valor regular de f y de ∂f .
5. Sean X, Y subvariedades de \mathbb{R}^n . Probar que para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $X + a \pitchfork Y$.
6. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ diferenciables, y sea $A \subseteq Z$ una subvariedad tal que $g \pitchfork A$. Probar que $f \pitchfork g^{-1}(A)$ sii $gf \pitchfork A$.
7. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ diferenciables, con X compacta. Sea W una subvariedad regular cerrada en Z y supongamos que g es transversal a W (y por lo tanto $g^{-1}(W)$ es subvariedad de Y). Probar que

$$I_2(f, g^{-1}(W)) = I_2(gf, W).$$

8. Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es nullhomotópica (i.e. homotópica a una constante), entonces $I_2(f, Z) = 0$ para toda subvariedad cerrada de dimensión complementaria Z , excepto quizás en el caso que la dimensión de X sea 0.
9. Probar que si Y es una variedad contráctil de dimensión positiva, entonces $I_2(f, Z) = 0$, para toda $f : X \rightarrow Y$ con X compacta y toda subvariedad Z cerrada en Y y de dimensión complementaria (incluso para el caso en el que la dimensión de X sea 0). Deducir que la única variedad compacta contráctil (sin borde) es el singleton.
10. Sea X compacta e Y conexa de la misma dimensión. Sea $f : X \rightarrow Y$ tal que $\deg_2(f) \neq 0$. Probar que f es sobreyectiva. En particular, si Y no es compacta, $\deg_2(g) = 0$ para toda $g : W \rightarrow Y$ tal que W compacta de la misma dimensión.
11. Dos subvariedades compactas X, Z de Y se dicen *cobordantes* si existe una subvariedad compacta con borde, W , en $Y \times I$ tal que $\partial W = X \times \{0\} \cup Z \times \{1\}$. Probar que si X y Z son cobordantes en Y , entonces $I_2(X, C) = I_2(Z, C)$ para toda subvariedad C cerrada en Y de dimensión complementaria a X y Z .
12. Probar que la ecuación

$$z^7 + \cos(|z|^2)(1 + 93z^4) = 0$$

tiene solución en \mathbb{C} .

13. Sea X una variedad de dimensión $n - 1$ que es el borde de una variedad compacta W . Sea $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable y sea $f = \partial F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Probar que, si $z \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular de F que no está en la imagen de f , entonces $F^{-1}(z)$ es finito y $W_2(f, z) =_2 \#F^{-1}(z)$. Sugerencias:
- Si z no está en la imagen de F entonces $W_2(f, z) = 0$.
 - Considerar para cada punto en $F^{-1}(z)$ una bola B_i suficientemente chica para que no se intersequen entre sí y tomar f_i la restricción de f a cada B_i , probar que $W_2(f, z)$ es la suma de los $W_2(f_i, z)$ módulo 2.
 - Usar la regularidad de z para encontrar B_i tal que $W_2(f_i, z) = 1$ para todo i .
14. Sean p_1, \dots, p_n polinomios homogéneos reales en $n + 1$ variables, todos de grado impar. Probar que las funciones asociadas en \mathbb{R}^{n+1} se anulan simultáneamente a lo largo de alguna recta por el origen.