Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2013

Práctica 3

Espacio tangente

1. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable y sea $d_p f : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ el diferencial. Identificando $T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ vía $\frac{\partial}{\partial t}|_{f(p)} = 1$, probar que $d_p f(X_p) = X_p(f)$.

2. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad definida como el conjunto $f^{-1}(0)$, donde 0 es un valor regular de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Para $p \in M$ consideramos $i_*(T_pM) = d_p i(T_pM) \subset T_p(\mathbb{R}^n)$, donde i es la inclusión. Demostrar que T_pM es el núcleo de $d_p f$, concretamente
$$i_*(T_pM) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ / \ \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \right\}.$$

3. Sea $S^2 = \{(x,y,z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Dar la fórmula del plano tangente en cada punto de la esfera.

4. Dado un punto $p \in M$ se define $F_p \subseteq C^\infty(p)$ como el conjunto de gérmenes que se anulan en p. Notar que está bien definido.
   - Probar que F_p es un ideal de la $\mathbb{R}$-álgebra $C^\infty(p)$.
   - Probar que para todo p hay un isomorfismo natural $T_pM \simeq (F_p/F_p^2)^*$, donde F_p^2 es el ideal generado por los productos de pares de elementos de F_p (es decir el cuadrado del ideal) y * simboliza el espacio dual.

5. Probar que si $M = \mathbb{S}^1$, entonces TM es difeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

6.
   a) Considerar $\pi : TM \to M$ la proyección canónica. Probar que π es diferenciable y de rango constante. Deducir que T_pM es una subvariedad de TM.

   b) Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad. Se identifica $T_pM = d_p i(T_pM) \subseteq T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$ y se toma $F : TM \to \mathbb{R}$, $F(v) = < v, v >$, con el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Probar que $T_1M := F^{-1}(1)$ es una subvariedad de TM de dimensión $2 \dim M - 1$.

Campos vectoriales

1. Sea M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_p(M)$ un vector tangente. Probar que existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$.

2. Sea $p \in M$, X un campo definido en un entorno de p tal que $X(p) \neq 0$. Probar que existe una carta (U, φ), con U incluido en el dominio de X, tal que $X|_U = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}$.

3. Sean $p \in M$ y $X_1, \ldots, X_k$ campos definidos en un entorno de p tales que $\{X_1(p), \ldots, X_k(p)\}$ es un conjunto l.i. en T_pM. Probar que existe un entorno U de p tal que $\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\}$ es un conjunto l.i. para todo $q \in U$.

4. Dado un campo X en M, se lo puede considerar como $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $f \mapsto X(f)$ por la fórmula
$$(X(f))(p) := X(p)(f).$$
Mostrar que la composición $X \circ Y$ de dos campos considerados como derivaciones no es necesariamente una derivación, pero que el corchete de Lie $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ sí lo es.

5. Consideremos (U, φ) una carta alrededor de un punto p de una variedad n-dimensional. Verificar que los campos $X_i := \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ satisfacen $[X_i, X_j] = 0 \ \forall i, j$.

6. Sea $M = \mathbb{R}^2$. Identificando T_pM con M de la manera natural, probar que no existe una carta (U, φ) tal que los campos $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$ coincidan respectivamente con los campos $(x, y) \mapsto (1, 0)$, $(x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$.

7. Probar que los campos vectoriales sobre una variedad tienen estructura de álgebra de Lie, es decir: el corchete es $\mathbb{R}$-bilineal, antisimétrico ($[X, Y] = -[Y, X]$) y satisface la identidad de Jacobi:
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

8. ¿Es cierto que el corchete de Lie es $C^\infty(M)$-bilineal? Buscar un caso donde $X_p = 0$ pero $[X, Y]_p \neq 0$.

9. Sea $M = S^3$ y sean $X_i, i = 1, 2, 3$ los siguientes campos vectoriales en la esfera conseguidos por restricción de los siguientes campos vectoriales de $\mathbb{R}^4$:
$$X_1 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$X_2 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$X_3 = -x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$
   - Verificar que son campos vectoriales en la esfera (es decir, que en cada punto de la esfera da un vector tangente, y que las funciones $X_i : S^3 \to TS^3$ son diferenciables).
   - Con el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, verificar que en todo punto de la esfera dan una base ortonormal del tangente y deducir que TS^3 es trivial.
   - Calcular $[X_i, X_j]$ para todo $i, j = 1, 2, 3$, y expresarlo en términos de los X_i's.

10. Probar que, si existiera un campo vectorial X nunca nulo en la esfera S^2, existiría otro campo Y tal que, en cada punto, $\{X_p, Y_p\}$ es una base de T_pS^2.

    Comentario: esto no sucede.

11. Sea $f : N \to M$ diferenciable y sean $X \in \mathfrak{X}(N)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice que X e Y están f-relacionados si para todo $p \in N$ se tiene que $d_pf(X_p) = Y_{fp}$ (notar que no se pide que f sea sobreyectiva). Probar que si $f : N \to M$ es un difeomorfismo, entonces todo campo $X \in \mathfrak{X}(N)$ está f-relacionado con un único campo en M.

12. Sea $f : N \to M$ diferenciable y sea $X \in \mathfrak{X}(N)$. Probar que un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ que esté f-relacionado con X (en caso de existir) está univocamente determinado si y sólo si $f(N)$ es denso en M.

Fibrados vectoriales

1. Recordar que el espacio proyectivo
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \left\{ (x_0 : \cdots : x_n) \ / \ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \right\}$$
consiste en el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasan por el origen. Se define el siguiente subconjunto de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$:
$$\mathcal{U} := \{ ((x_0 : \cdots : x_n), v) \ / \ (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \text{ y } v \in \langle (x_0, \ldots, x_n) \rangle \}$$

donde $\langle (x_0, \ldots, x_n) \rangle$ significa la recta generada por $(x_0, \ldots, x_n)$. Probar que $\mathcal{U}$ es una variedad diferenciable de dimensión $n+1$ y que la proyección $\pi : \mathcal{U} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$((x_0 : \cdots : x_n), v) \mapsto (x_0 : \cdots : x_n)$$

hace de $\mathcal{U}$ un fibrado sobre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

2. Sea $\pi : L \to M$ un fibrado de línea (es decir, un fibrado vectorial de dimensión 1), con M conexa. Si $m \in M$, se llama 0_m al cero del espacio vectorial L_m. Considerar el conjunto $S_0 := \{(m, 0_m) : \ m \in M\}$. Demostrar que si L es un fibrado de línea trivial, entonces $L \setminus S_0$ tiene dos componentes conexas.

3. Demostrar que el fibrado de línea "banda de Moebius"no es trivial. Observar que se puede comprobar este hecho empíricamente, recortando por el medio una banda de Moebius, y viendo que queda conexo.

4. Sea $E \xrightarrow{p} M$ un fibrado vectorial de dimensión d y sea $N \xrightarrow{f} M$ una función diferenciable.

   a) Probar que el pullback, $f^*(E) := \{(y, e) \in N \times E \ : \ f(y) = p(e)\}$ es una variedad diferenciable y que la aplicación $p : f^*(E) \to N$ (dada por la proyección en la primera coordenada) es un fibrado vectorial de dimensión d.

   b) Probar que la clase de fibrados sobre M, con estos morfismos forman una categoría (que denotaremos $\mathrm{Vect}(M)$).

   c) Probar que f define un funtor $f^* : \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(N)$.

5. Sean $p : E \to M$ y $p' : E' \to M$ fibrados. Dado $b \in M$, denotamos E_b a la fibra $p^{-1}(b)$ y E'_b a $p'^{-1}(b)$. Construir $E \oplus E' := \{(x, y) : p(x) = p'(y)\}$. Probar que, con la función adecuada, es un fibrado sobre M. Observar que la fibra sobre cada b es $(E \oplus E')_b = E_b \times E'_b$.

6. Probar que si E, E' son fibrados triviales, entonces $E \oplus E'$ es un fibrado trivial.

7. Probar que si $E \to \mathbb{S}^1$ es el fibrado de línea de Moebius, entonces $E \oplus E$ es trivial.

8. Considerar los fibrados tangente $T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ y normal $N\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Probar que la suma directa es trivial.

9. Probar que $\Gamma(M, TM) = \mathfrak{X}(M)$.

   Notación: $\Gamma(M, E)$ es el conjunto de secciones de un fibrado $p : E \to M$.

10. Si $p : E \to M$ es un fibrado, demostrar que con las operaciones punto a punto $\Gamma(M, E)$ es un $C^\infty(M)$-módulo.

11. Sea $E = M \times V$ fibrado trivial con fibra V, entonces $\Gamma(M, E) \cong C^\infty(M, V) \cong C^\infty(M)^n$ donde $n = \dim(V)$. Es decir, $\Gamma(M, E)$ es un $C^\infty(M)$-módulo libre de rango $\dim(V)$.

12. Sea $E \xrightarrow{p} M$ un fibrado, Probar que existen k secciones linealmente independientes (en todo punto) si y sólo si existe un subfibrado de E trivial de dimensión k.

13. Sea M una variedad. Probar que se tiene un funtor $\Gamma(M, \cdot) : \mathrm{Vect}(M) \to C^\infty(M)$-módulos.