Práctica 2

Funciones diferenciables

1. Verificar que la noción de diferenciabilidad de funciones entre variedades no depende de las cartas elegidas (buena definición), que las funciones diferenciables son continuas y que si (U, φ) es una carta, la función $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un difeo.

2. Sean $f : M \to N$ y $g : A \to B$ diferenciables. Probar que $f \times g : M \times A \to N \times B$, definida por $f \times g(m, a) = (f(m), g(a))$, es diferenciable.

3. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de M y sea $f : M \to N$. Probar que si f restringida a cada abierto $U \in \mathcal{U}$ es diferenciable, entonces f es diferenciable.

4. Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ continua. Probar que f es diferenciable si y sólo si para todo abierto $W \subset N$ y toda función diferenciable g definida en W, se tiene que gf es diferenciable en $f^{-1}(W)$.

5. Sean M, N variedades diferenciables, $m = \dim M$ y $n = \dim N$. Probar que, si $rg_p(f) = k$ para todo $p \in M$, entonces existen cartas (U, φ) y (V, ψ), con $p \in U$ y $f(U) \subset V$ tales que
   a) $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$
   b) $\psi(f(p)) = 0 \in \mathbb{R}^n$
   c) $\psi f \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$
   d) $\varphi(U)$ y $\psi(V)$ son cubos abiertos centrados en el cero de radio fijo $\varepsilon > 0$.

6. Probar que si $f : M \to N$ es diferenciable y biyectiva y de rango constante $r = \dim M = \dim N$, entonces es un difeomorfismo.

7. En el ejercicio anterior, sin suponer que f es biyectiva, probar que $f(M)$ es abierto de N.

8. Sea $f : M \to N$ una inmersión inyectiva propia, es decir la preimagen de compactos es compacto. Probar que f es un embedding. En particular, si $f : N \to M$ es inmersión inyectiva y N compacta entonces f es un embedding.

   Sugerencia: probar que f es cerrada.

9. Probar que si $A \subset M$ y $B \subset N$ son subvariedades regulares, entonces $A \times B \subset M \times N$ es subvariedad regular.

10. Sea M una variedad compacta (sin borde) de dimensión n. Probar que no existe ninguna inmersión de M en $\mathbb{R}^n$.

11. Probar que una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no puede ser inyectiva.

12. Probar que la función $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ definida por $f(x_0, \ldots, x_n) = [x_0, \ldots, x_n]$ es diferenciable. Exhibir un difeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{P}^1$.

Teorema del rango constante

Sean $A_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ y $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ dos subconjuntos abiertos, $F : A_0 \to B_0$ diferenciable, y supongamos que $rg_x(f) = k$ para todo $x \in A_0$. Si $p \in A_0$ y $q = F(p)$, entonces existen abiertos $A \subset A_0$, $B \subset B_0$ y difeomorfismos $G : A \to U$ y $H : B \to V$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^m$, V es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $F(A) \subset B$ y $H \circ F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0)$.

Demostración:

1. Ver que se puede reducir al caso en que $p = 0$, el origen de $\mathbb{R}^m$, y $q = 0$, el origen de $\mathbb{R}^n$.
2. Componiendo con una transformación lineal que permute coordenadas, verificar que basta considerar el caso en que el primer menor tiene rango k, es decir, $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_p\right)|_{i,j=1}^k \neq 0$.
3. Definir la función $G : A_0 \to \mathbb{R}^m$ por $G(x_1, \ldots, x_m) = (f(x_1, \ldots, x_m), x_{k+1}, \ldots x_m)$ y verificar que su diferencial es de la forma
$$dG = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^k & * \\ 0 & Id_{m-k} \end{pmatrix}$$
4. Verificar las hipteósis del teorema de la función inversa para G, restringiendo a algún abierto A_1 que contenga a p.
5. Verificar que la composición $F \circ G^{-1}$ es de la forma $F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k, \overline{f}(x))$ y así deducir que el diferencial de $F \circ G^{-1}$ es de la forma
$$d(F \circ G^{-1}) = \begin{pmatrix} Id_k & 0 \\ * & \left(\frac{\partial \overline{f}_{k+i}}{\partial x_{k+j}}\right)_{i,j=1}^{m-k} \end{pmatrix}$$
6. Verificar que las $\overline{f}$'s dependen sólo de las variables $x_1, \ldots, x_k$.
7. Definir $T : V_1 \to \mathbb{R}^n$ por la fórmula
$$T(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} + \overline{f}^{k+1}(y_1, \ldots, y_k), \ldots, y_n + \overline{f}^n(y_1, \ldots, y_k))$$
donde V_1 es un entorno del cero suficientemente pequeño como para que $(y_1, \ldots, y_n) \in V$ y para que $T(V_1) \subset B_0$.
8. Verificar que $T(0) = 0$, y que
$$dT = \begin{pmatrix} Id_k & 0 \\ * & Id_{m-k} \end{pmatrix}$$
9. Utilizar el teorema de la función inversa para T, redefinir los abiertos pertinentes, y verificar que $H := T^{-1}$ verifica lo pedido, es decir, que
$$H \circ F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0).$$