Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2013

Ejercicio para el 13/5

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.

- Sea $\gamma : I \to V$ una curva suave tal que para todo $t \in I$, la derivada k-ésima $\gamma^{(k)}t$ es combinación lineal de las anteriores $\gamma(t), \gamma'(t), \dots, \gamma^{(k-1)}(t)$, que son linealmente independientes. Probar que existe $S \subseteq V$ subespacio de dimensión k tal que $\gamma(t)$ se mantiene en un S. Sugerencia: Resuelva el siguiente inciso.

- Sea Σ el conjunto de sus subespacios de dimensión k. Probar que la función

$$f : \Sigma \to \mathbb{P}(\Lambda^k V) S = \langle v_i : 0 \leq i < k \rangle \mapsto \overline{\omega}_S = \overline{v_0 \wedge \cdots \wedge v_{k-1}}$$

  está bien definida y es inyectiva.
  Sugerencia: Si $S \in \Sigma$, estudie para cuáles $w \in V$ se cumple $\omega_S \wedge w = 0$.

- Suponga que $V = \mathbb{R}^n$ con su producto interno usual. Sea

$$g : \Sigma \to M_n(\mathbb{R}) S \mapsto P_S,$$

  donde P_S es la matriz de la proyección ortogonal sobre el subespacio S. Probar que g es inyectiva y su imagen es una subvariedad compacta.
  Sugerencia: Probar que

$$\operatorname{Im}(g) = \{P : P^2 = P,\ P = P^t,\ tr(P) = k\}.$$

  Comentario: Esto permite darle a Σ estructura de variedad diferenciable (llamada Grassmanniana), y J resulta un embedding (de Plücker).