Análisis Funcional - 1er cuatrimestre de 2013

Práctica 9

1. Sea (X, μ) un espacio de medida y $\varphi : X \to \mathbb{C}$ medible y acotada. Consideremos el operador de multiplicacion $M_\varphi : L^p(X) \to L^p(X)$ dado por $M_\varphi(f) = \varphi \cdot f$.

   a) Demostrar que λ esta en el espectro de M_φ si y solo si $\mu(\varphi^{-1}(B_\epsilon(\lambda)) > 0$ para todo $\epsilon > 0$.

   b) Demostrar que λ es un autovalor si y solo si $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$.

   c) Demostrar que no hay espectro residual.

2. Sean $S, T : \ell^p \to \ell^p$ los shifts a izquierda y derecha con $1 < p < \infty$. Describir el espectro de S y T lo mejor posible.

3. Calcular espectro del operador de Volterra $V : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$ dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(y)dy.$$

4. Sea $A : E \to E$ un operador acotado, definimos $e^A = \sum A^n/n!$.

   a) Probar que $e^A : E \to E$ es acotado y $x(t) = e^A x_0$ proporciona la única solución de la ecuación diferencial:

$$x'(t) = Ax(t)$$

   con la condición inicial $x(0) = x_0$.

   b) Probar que si A y B conmutan entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.

   c) Probar que si E es un espacio de Hilbert complejo y A es un operador autoadjunto entonces e^A es positivo y e^{iA} unitario.

5. Sea E un espacio de Banach y $A : E \to E$ un operador acotado tal que $\sigma(A) \subseteq U$. Sean $f_n : U \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones holomorfas que converge uniformemente sobre compactos a una funcion holomorfa f. Probar que $||f_n(A) - f(A)|| \to 0$.

6. Sea E un espacio de Banach y $A : E \to E$ un operador acotado tal que $\sigma(A) = K_1 \cup K_2$, donde K_1 y K_2 son dos compactos disjuntos. Probar que el operador A se puede descomponer como $A = A_1 \oplus A_2$ con $\sigma(A_1) = K_1 \cup \{0\}$ y $\sigma(A_2) = K_2 \cup \{0\}$.

7. Sea H un espacio de Hilbert y $A : H \to H$ un operador autoajunto con $||A|| \leq 1$. Probar que existe un operador unitario U tal que $A = (U + U^*)/2$.

   Sugerencia: Considere la funcion $f(t) = t + i \cdot \sqrt{1 - t^2}$.