Análisis Funcional - 1er cuatrimestre de 2013

Practica 8

1. *a*) Sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)$ donde $1 < p < \infty$. Probar que T es compacto si y solo si $\alpha_n \to 0$.

   b) Probar que la inclusión, $C^1([0,1]) \hookrightarrow C([0,1])$ es compacta.

   c) Sea $i : \ell^1 \to \ell^2$ la inclusión. ¿Es i compacta?

   d) Sea X un espacio metrico compacto y $K : X \times X$ continua. ¿Es compacto el operador integral $T_K : C(X) \to C(X)$?

   e) Sea E un espacio de Banach reflexivo, probar que todo $T : E \to \ell^1$ es compacto.

   f) Sea H un espacio de Hilbert dar un ejemplo de un operador $T : H \to H$ que sea compacto pero no de Hilbert-Schmidt.

   g) Sea E un espacio de Banach separable o reflexivo. Demostrar que existe un operador acotado $T : E \to c_0$ que no es compacto.

2. Sea $T : E \to F$ un operador compacto entre espacios de Banach. Demostrar que para todos x_n, x en E tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ se verifica que $T(x_n) \to T(x)$.

3. Sea $T : E \to F$ un operador compacto entre espacios de Banach. Demostrar que $\text{Ran}(T)$ es separable y no contiene ningun subespacio cerrado de dimension infinita.

4. Sea E un espacio de Banach y $S_n, S, T : E \to E$ operadores acotados. Probar que si T es compacto y $S_n(x) \to S(x)$ para todo x en E entonces $S_n T \to ST$.

5. Sea $T : E \to F$ un operador compacto entre espacios de Banach. Si E tiene dimension infinita demostrar que existe $\{x_n\}$ en E tal que $||x_n|| = 1$ y $T(x_n) \to 0$.

6. Sea H un Hilbert y $S, T : H \to H$ operadores acotados tales que $0 \leq S \leq T$. Demostrar que si T es compacto entonces S tambien lo es.

7. Sea H un Hilbert y $T : H \to H$ un operador acotado. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes a que T sea compacto.

   a) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $y_n \xrightarrow{w} y$ entonces $\langle T(x_n), y_n \rangle \longrightarrow \langle T(x), y \rangle$.

   b) Si $\{v_n\}, \{w_n\}$ son sistemas ortonormales infinitos entonces $\langle T(v_n), w_n \rangle \longrightarrow 0$.

8. Sea H un Hilbert y $T : H \to H$ un operador compacto. Demostrar que existen bases ortonormales $\{v_n\}, \{w_n\}$ tales que $T(x) = \sum s_n \langle v_n, x \rangle w_n$ con $s_n \to 0$.

9. Sea Ω un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. Demostrar que $L^2(\Omega)$ tiene una base ortonormal de autovectores para el Laplaciano.

   Sugerencia: Usar el ej15p6 y que la inclusion $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta.

10. Sea X un espacio de medida y K en $L^2(X \times X)$ tal que $K(y, x) = \overline{K(x, y)}$. Demostrar que existe una base ortonormal ϕ_n de $L^2(X)$ tal que $K(x, y) = \sum \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}$.

11. Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador de traza. Probar que existen operadores $T_1, \cdots, T_4$ positivos y de traza tales que $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$.

12. Sean $S, T : \ell^2 \to \ell^2$ los shift a derecha e izquierda. Probar que S^k y T^k son operadores de Fredholm y calcular sus indices.

13. ¿Es Fredholm el operador $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definido por $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$?

14. Probar que la ecuacion integral

$$f(x) - \int_0^\pi \sin(x+y) f(y) dy = g(x)$$

tiene unica solucion para toda g en $L^2[0,\pi]$.

15. Sea $\mathcal{K}(E)$ el conjunto de operadores compactos $T : E \to E$.

    a) Probar que $\mathcal{K}(E)$ es un ideal cerrado. Se forma entonces el algebra cociente $\mathcal{B}(E)/\mathcal{K}(E)$ que se llama el algebra de Calkin.

    b) Probar que $T : E \to E$ es de Fredholm si y solo si la imagen de T en el algebra de Calkin es inversible.

    c) Probar que si S, T son de Fredholm y K es compacto entonces ST y $K + T$ son de Fredholm.