Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2013

PRACTICA 7

1. Sea H un Hilbert y $T : H \to H$ acotado. Demostrar que

   a) $||Tx|| = ||x|| \ \forall x$ si y solo si $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x, y$ si y solo si $T^*T = Id$.
   b) Los operadores TT^* y T^*T son positivos.
   c) El operador T es unitario si y solo si T y T^* son isometrias.

2. Sea H un Hilbert real y $T : H \to H$ autoadjunto. Demostrar que si $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo x en H entonces $T = 0$. Dar un contraejemplo si T no es autoadjunto.

3. Sea H un Hilbert y $T : H \to H$ positivo, ver que $\{x : \langle Tx, x\rangle = 0\}$ es un subespacio.

4. Sea H un Hilbert y $T_n, T : H \to H$ normales. Demostrar que si $T_n x \to Tx$ para todo x entonces $T_n^* x \to T^* x$ para todo x. Dar un contraejemplo si no son normales.

5. Sea H un Hilbert y $T : H \to H$ normal, ver que $||T|| = ||T^n||$ y $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^n)$.

6. Demostrar que todo operador normal T se puede escribir como $T = U|T|$ con el operador U unitario. ¿Cual es la diferencia con respecto a la descomposicion polar?

   Sugerencia: Revisar la construccion de la descomposicion polar.

7. Sea H un Hilbert y $P : H \to H$ un proyector. Demostrar que son equivalentes

   a) $P^* = P$
   b) P es normal
   c) $\|P\| = 1$
   d) $\ker(P) = \mathrm{Ran}(P)^{\perp}$

8. Sea H un Hilbert y $P, Q : H \to H$ proyectores. Demostrar que son equivalentes

   a) $P \leq Q$, es decir $Q - P$ positivo.
   b) $||Px|| \leq ||Qx||$ para todo x en H.
   c) $\mathrm{Ran}(P) \subseteq \mathrm{Ran}(Q)$.
   d) $PQ = QP = P$.

9. Sea (X, μ) un espacio de medida y φ en $L^\infty(X)$. Definamos el operador de multiplicacion $M_\varphi : L^2(X) \to L^2(X)$ dado por $M_\varphi(f)(x) = \varphi(x) \cdot f(x)$. Calcular el adjunto de M_φ y decidir cuando es normal y cuando unitario.

10. Sea (X, μ) un espacio de medida y K en $L^2(X \times X)$. Demostrar que el operador integral $T_K : L^2(X) \to L^2(X)$ dado por $T_K(f)(x) = \int K(x, y)f(y)dx$ es un operador de Hilbert-Schmidt y calcular $||T_K||_2$.

11. Sea (X, μ) un espacio de medida con $\mu(X) = 1$ y $T : X \to X$ que preserva medidaa. Demostrar que el operador $U_T : L^2(X) \to L^2(X)$ dado por $U_T(f)(x) = f(T(x))$ es unitario y que la multiplicidad del 1 como autovalor es 1 si y solo si T es ergodica.