Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2013

Práctica 4

1. Sea E un espacio de Banach y x_n, x en E. Demostrar las siguientes afirmaciones y analizar su validez si en vez de sucesiones se consideran redes.

   a) Si $x_n \to x$ entonces $x_n \xrightarrow{w} x$ (y entonces $x_n \xrightarrow{w^*} x$ cuando E sea un dual).

   b) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ entonces $\{x_n\}$ es acotada.

   c) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\phi_n \to \phi$ en E^* entonces $\phi_n(x_n) \to \phi(x)$.

   d) Si $x_n \to x$ y $\phi_n \xrightarrow{w^*} \phi$ en E^* entonces $\phi_n(x_n) \to \phi(x)$.

2. Probar que la topologia de todo espacio localmente convexo esta dada por una familia de seminormas. Para ello demostrar que hay una base para el filtro de entornos alrededor del 0 que consiste de convexos abiertos y balanceados.

3. Demostrar que el teorema de la aplicacion abierta vale para espacios de Frechet.

4. Demostrar que un subespacio de E^* separa los puntos de E si y solo si es w^*-denso.

5. Sea E un espacio normado y $j : E \hookrightarrow E^{**}$ la inclusion canonica. Si B y B^{**} son las bolas unitarias cerradas de E y E^{**} demostrar que B es w^*-densa en B^{**}.

6. El subespacio $C[0,1]$ es cerrado en $L^\infty[0,1]$ en $\| \|_\infty$ pero no en la topología w^*.

7. Sean $\{e_n\}$ los vectores canonicos en ℓ^p con $1 < p < \infty$. Demostrar que el 0 esta en la clausura debil de $\{e_k + ke_n : 1 \leq k \leq n\}$ pero no es el limite de ninguna subsucesion.

8. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que $\{x \in E : \|x\| < 1\}$ tiene interior vacío respecto de la topologia debil.

9. Definamos $\phi_n : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ por $\phi_n(x) = x_n$. Probar que $\{\phi_n\}$ es acotada pero no tiene subsucesiónes w^*-convergente. ¿Contradice esto a que $(B_{E'}, w^*)$ es compacta?

10. a) En c_0 si $\phi_n(x) = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ probar que $\phi_n \to 0$ en w^* pero no en $|| \, ||$.

    b) En ℓ^1 si $\phi_n(x) = x_n$ probar que $\phi_n \to 0$ en w^* pero no en w y $|| \, ||$.

    c) En ℓ^3 si $\phi_n(x) = x_n$ probar que $\phi_n \to 0$ en $w = w^*$ pero no en $|| \, ||$.

    d) En $L^2[0,1]$ si $f_n(t) = \sin(n\pi t)$ probar que $f_n \to 0$ en $w = w^*$ pero no en $|| \, ||$.

    e) En $C[-1,1]$ si $\phi_n(f) = f\left(\frac{-1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$ probar que $\phi_n \to 0$ en w^* pero no en $|| \, ||$.

11. Demostrar que en ℓ^1 se tiene que $x_n \to x$ si y solo si $x_n \xrightarrow{w} x$.

12. En ℓ^p con $1 < p < \infty$ se tiene que si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $||x_n|| \to ||x||$ entonces $x_n \to x$.

    Sugerencia: Vale en todo espacio uniformemente convexo (si $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $||x|| = ||y|| = 1$ y $||\frac{x+y}{2}|| > 1 - \epsilon$ entonces se tiene $||x - y|| < \delta$).

13. Sean f_n, f en $C(X)$ con X compacto y Haussdorf. Demostrar que $f_n \xrightarrow{w} f$ si y solo si $\{f_n\}$ es acotada y $f_n(x) \to f(x)$ para todo x.

14. Sean f_n, f en $L^p(X,\mu)$ con $1 < p < \infty$. Demostrar que $f_n \xrightarrow{w} f$ si y solo si $\{f_n\}$ es acotada y $\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu$ para todo medible E con $\mu(E) < \infty$.

    En particular si X es numerable basta considerar E con un punto y si es el $\mathbb{R}$ alcanza con conjuntos de la forma $[0, a]$.

15. Sean μ_n, μ medidas borelianas en un espacio metrico y compacto X. Demostrar que se tiene $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ si y solo si $\mu_n(B) \to \mu(B)$ para todo B y $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ si y solo si vale lo mismo pero solo para los B con $\mu(\partial B) = 0$.

    Nota: La segunda afirmacion es el teorema de Portmanteau, la condicion es equivalente a que $\mu_n(X) \to \mu(X)$ y para todo B se tenga

    $$\mu(B^\circ) \leq \liminf \mu_n(B) \leq \limsup \mu_n(B) \leq \mu(\overline{B}).$$

16. Sean $f_n, f : [0,1] \to [0,1]$ tales que $f_n(x) \to f(x)$ para todo x. Demostrar que hay una sucesion de combinaciones convexas de las f_n que converge uniformemente a f.

17. Sean E y F espacios de Banach y $T : E \to F$ lineal. Probar que T es continua si y sólo si T es continua de (E, w) en (F, w).

18. Sean E, F Banach y $T : F^* \to E^*$ continuo. Probar que T es $w^* - w^*$ continuo si y solo si es el adjunto de alguien continuo.