Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2013
Práctica 3

1. Decidir si los siguientes funcionales $\varphi : E \to \mathbb{C}$ son continuos y hallar sus normas.
   a) $\varphi(x) = \lim x_n$ con $E = c$.
   b) $\varphi(x) = x_1 + x_2$ con $E = \ell^\infty, \ell^2$.
   c) $\varphi(x) = \sum \frac{x_k}{k}$ con $E = \ell^1, \ell^2$.
   d) $\varphi(f) = \int t\, f(t)\; dt$ con $E = L^2[-1,1], C[-1,1]$.
   e) $\varphi(f) = \int f(t)dt$ con $E = C_c(\mathbb{R})$.

2. Sea E un espacio normado y $\varphi : E \to \mathbb{C}$ lineal tal que para toda sucesión $(x_n)_n$ convergente a 0, resulta $(\varphi(x_n))_n$ acotada. Demostrar que φ es continua.

3. Sean E un espacio normado y x en E. Demostrar que
   a) para todo φ en E^* se tiene $|\varphi(x)| = ||\varphi|| \cdot d(x, \ker\varphi)$.
   b) para todo subespacio S se tiene $\mathrm{dist}(x, S) = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in S^\perp,\ \|\varphi\| \leq 1\}$.

4. Sea $\varphi : c \to \mathbb{C}$ la funcional $\varphi(x) = \lim x_n$ y extendamosla por Hahn-Banach a una funcional $\tilde{\varphi} : \ell^\infty \to \mathbb{C}$. Probar que $\tilde{\varphi}$ no es de la forma $\tilde{\varphi}(x) = \sum x_n y_n$.

5. Todo subespacio de dimension finita de un espacio normado es complementado.

6. Sea E un Banach reflexivo. Probar que todo subespacio cerrado tambien es reflexivo.

7. Sea E un espacio de Banach tal que E^* es separable. Probar que E es separable.

8. Probar que existe una funcional lineal $L : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ con $\|L\| = 1$ tal que
   a) Si x esta en c, entonces $L(x) = \lim x_n$.
   b) Si $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$, entonces $L(x) = L(Tx)$.
   c) Si $x = (x_n)$ es tal que $x_n \geq 0$ para todo n entonces $L(x) \geq 0$.

   Sugerencia: Definir L sobre el subespacio $\{x - T(x) : x \in \ell^\infty\} \bigoplus \mathbb{R} \cdot (1, 1, \ldots)$.

9. Sean E, F espacios de Banach, S un subespacio cerrado de E y $T : E \to F$ acotada. Probar que $(E/S)^* = S^\perp$ y que $R(T)^\perp = \ker(T^*)$.

10. a) Calcular S^* y T^* donde S y T son los shifts en l^p con $1 \leq p < \infty$.
    b) Sea $J : \ell^2 \to c_0$ dada por $J(x) = x$. Probar que J es acotada y calcular J^*.

11. Sean X, Y espacios metricos y $F : X \to Y$ una funcion continua.
    a) Para cada x en X definamos $\varphi_x : C_b(X) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_x(f) = f(x)$. Probar que φ_x es una funcional lineal acotada y calcular su norma.
    b) Sea $T_F : C_b(Y) \to C_b(X)$ dada por $T_F(f) = f \circ F$. Probar que $T_F^*(\varphi_x) = \varphi_{F(x)}$.

12. Sean E y F espacios de Banach. Supongamos que $S : E \to F$ y $T : F^* \to E^*$ son lineales y tales que $\varphi(T(x)) = S(\varphi)(x)$ para todo x en E y φ en F^*. Demostrar que los operadores S y T son acotados y $S = T^*$.