Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2013
Práctica 2

1. Dados E y F espacios de Banach con x_n, x en E y A_n, A en $\mathcal{L}(E,F)$ demostrar que si se tiene $x_n \to x$ y $A_n \to A$ entonces $A_n x_n \to Ax$.

2. Sea E un espacio de Banach y A_n, A, B_n, B en $\mathcal{L}(E)$. Probar que $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ y que si $A_n \to A$ y $B_n \to B$ entonces $A_n B_n \to AB$.

3. Sea X un espacio de Banach y A en $\mathcal{L}(X)$ con $\|A\| < 1$. Probar que $I - A$ tiene una inversa acotada dada por la serie $\sum A^n$. Se tiene ademas $\|(I-A)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|A\|)$.

4. Sean E un espacio de Banach, A_n en $\mathcal{L}(E)$ inversibles y A en $\mathcal{L}(E)$ no inversible tales que $A_n \to A$. Demostrar que $\|A_n^{-1}\| \to \infty$.

5. Se tiene $T : E \to F$ lineal y acotada entre espacios de Banach. Demostrar que si la imagen $T(E)$ es de segunda categoria entonces T es sobreyectiva.

6. Sea $T : E \to F$ acotada entre espacios de Banach. Demostrar que T es inyectiva y con rango cerrado si y solo si existe $c > 0$ tal que $||T(x)|| \geq c||x||$ para todo x en E.

7. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y supongamos que $(\alpha_{ij})_{ij}$ es tal que $(Ax)_i = \sum_j \alpha_{ij} x_j$ define un elemento Ax de l^p para todo $x = (x_i)$ en l^p. Probar que $A : l^p \to l^p$ es acotado.

8. Sea E un espacio de Banach con S y T subespacios cerrados tales que $E = S \oplus T$. Demostrar que existe una constante c tal que $||x_s|| + ||x_t|| \leq c||x_s + x_t||$.

9. Sea E un espacio de Banach y $P : E \to E$ lineal tal que $P^2 = P$.

   a) Demostrar que P es continuo si y solo si $ker\ P$ y $P(E)$ son cerrados.

   b) Probar que $E = ker\ P \oplus P(E)$ y que $T : E \to E$ conmuta con P si y solo si ambos subespacios son T-invariantes.

10. Sea H un espacio de Hilbert. Probar que si la sucesion $< x_n, y >$ es de Cauchy para todo y entonces existe x tal que $< x_n, y > \longrightarrow < x, y >$ para todo y.

11. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $C[0,1]$ que lo hace un espacio de Banach y tal que si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ entonces $f_n(t) \to f(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Demostrar que $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.

12. La serie de Fourier de una funcion $f(x)$ en $L^1[0, 2\pi]$ se define como

$$S(f)(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \quad \text{donde} \quad a_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} dy.$$

   Sea ademas $S_n(f)(x)$ la suma parcial de $-n$ a n. Demostrar que

$$S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} D_n(x-y) f(y) dy \quad \text{donde} \quad D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

   a) si $\phi_n : C[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ es $\phi_n(f) = S_n(f)(0)$ entonces $||\phi_n|| = ||D_n||_1 \to \infty$. Probar que existen funciones continuas cuya serie de fourier diverge en los racionales.

   b) si definimos $T : L^1[0, 2\pi] \to c_0$ por $T(f) = (a_1(f), \ldots, a_n(f), \ldots)$ entonces T es acotado e inyectivo. Concluir que T no es sobreyectivo (mirar $T(D_n)$).