Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2013

Práctica 1

Espacios de Banach

1. *a*) Si $1 \leq p \leq \infty$, $S = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0 \text{ salvo para finitos } n\}$, entonces S es un subespacio de ℓ^p no cerrado (más aún: si $p < \infty$, es denso).

   b) Sea S un subespacio de un espacio normado; probar que $\overline{S}$ es subespacio.

   c) Mostar que $\ell^p \subseteq \ell^\infty$ y calcular su clausura.

   d) Sean E un espacio de Banach y S un subespacio cerrado. Entonces S, con la norma inducida por E, es un espacio de Banach.

2. Sea E un espacio vectorial y B un subconjunto convexo que contiene al 0 y tal que:

   a) Si $x \in B$ y $|\lambda| = 1$, entonces $\lambda x \in B$.

   b) Para todo $x \in E$, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in B$.

   c) Si para todo n se tiene $\lambda_n x \in B$ con $0 \leq \lambda_n \leq 1$ y $\lambda_n \to 1$ entonces $x \in B$.

   Demostrar que si en E ponemos la norma $\|x\| = \text{ínf}\,\{\lambda^{-1} : \lambda > 0, \lambda x \in B\}$ se obtiene un espacio normado con $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

3. Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado. Son equivalentes:

   a) E es Banach

   b) $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es completo

   c) $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ es completo

4. Demostrar que las bolas en un espacio normado de dimensión finita son compactas.

5. Sea E un espacio vectorial normado y F un subespacio de dimensión finita. Demostrar que para todo x existe y_0 en F tal que

   $$\|x - y_0\| = \underset{y \in F}{\text{ínf}}\, \|x - y\| = d(x, F).$$

   Es decir que la distancia a los subespacios de dimension finita se realiza.

6. *a*) Sea S un subespacio de un espacio normado E. Demostrar que S tiene interior no vacío si y sólo si $S = E$.

   b) Sea E un espacio vectorial. Probar que posee una base algebraica.

   c) Probar que un espacio de Banach E de dimensión infinita no puede tener una base (algebraica) numerable (en otras palabras, $\dim E > \aleph_0$).

   d) Probar que todo espacio vectorial admite una norma y si es de dimension infinita entonces admite al menos dos no equivalentes.

7. Un espacio de Banach tiene dimensión finita si y sólo si todo subespacio es cerrado.

8. Sea E un espacio vectorial normado. Demostrar que es de Banach si y sólo si para toda sucesion $\{x_n\}_n$ vale que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E.

   Dar un ejemplo de un espacio normado E y una serie que no converge pero sí lo hace absolutamente.

9. Sean E un espacio de Banach, S un subespacio cerrado y $\Pi : E \to E/S$ es la proyección al cociente.

   a) Probar que E/S es un espacio vectorial normado con $\|[x]\| = \|x+S\| = d(x, S)$.

   b) Probar que Π es lineal, abierta y acotada con $\|\Pi\| \leq 1$.

   c) Probar que E/S es un espacio de Banach.

10. Si $E = \ell^\infty$ y $S = c_0$, probar que $||[(x_n)]|| = \limsup_{n\to\infty} |x_n|$.

11. Sea E un espacio de Banach con S y T subespacios cerrados. Probar que si T tiene dimension finita entonces $S + T$ es cerrado. Dar un ejemplo de dos subespacios cerrados S y T tales que $S + T$ no lo sea.

12. *a*) Sea X un espacio métrico entonces $C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{C}$ continuas y acotadas$\}$ con la norma
   $$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$
   es un espacio de Banach.

   b) Probar que X es compacto si y solo si $C_b(X)$ es separable.

13. Los siguientes espacios son Banach con las normas indicadas. Por Ω entendemos un abierto acotado en $\mathbb{R}^N$.

   a) **Funciones derivables.** El espacio $C^1(\overline{\Omega})$ con norma $\|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty$.

   b) **Espacios de Sobolev.** Decimos que f en $L^p(\Omega)$ tiene derivadas debiles si para todo i existe g_i en $L^p(\Omega)$ tal que
   $$\int_\Omega f(x)\varphi_{x_i}(x)dx + \int_\Omega g_i(x)\varphi(x)dx = 0$$
   para toda φ en $C_0^\infty(\Omega)$. Luego $W^{1,p}(\Omega)$, las funciones en $L^p(\Omega)$ con derivadas debiles, con $\|f\| = \|f\|_{L^p} + \sum \|g_i\|_{L^p}$ es un espacio de Banach.

   c) **Espacio de Medidas.** Sea X un espacio metrico localmente compacto. Dada una medida signada boreliana y regular μ definimos su variacion total como
   $$||\mu|| = \mu_+(X) + \mu_-(X)$$
   donde $\mu = \mu_+ - \mu_-$ es la descomposicion de Hahn de μ. Luego $\mathcal{M}(X)$, las medidas con variacion total finita, con la norma $||\ ||$ es un espacio de Banach.

14. Sean E y F espacios normados y $T : E \to F$ lineal. Demostrar que $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$ donde
   $$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in E,\ \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in E,\ \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\tfrac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E,\ x \neq 0\} \end{aligned}.$$

15. Dar un ejemplo de espacios de Banach E y F junto con una transformacion lineal $T : E \to F$ tal que $ker\ T$ es cerrado pero T no es acotada.

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica pensada como operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con la norma euclídea. Probar que $\|A\| = \max\{|\lambda| :\ \lambda$ es un autovalor de $A\}$.

17. **Operadores Shift:** Sean $1 \leq p \leq \infty$, $S : \ell^p \to \ell^p$ y $T : \ell^p \to \ell^p$ dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) \ \text{ y } \ T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

   a) Probar que $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es inyectivo. Calcular $\|S\|$.

   b) Probar que $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es suryectivo. Calcular $\|T\|$.

   c) Probar que $TS = I$ pero $ST \neq I$.

18. **Operadores Integrales:** Dado un nucleo K en $L^2([0,1] \times [0,1])$ definimos el operador integral $T_K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ dado por

$$(T_K f)(s) = \int_0^1 K(s,t)\, f(t)\; dt$$

   Probar que T_K es acotado y $\|T_K\| \leq \|K\|_2$.

   Trate de probar que si $\overline{K(s,t)} = K(t,s)$ entonces T_K tiene un autovector. Mas aun, T_K tiene una base ortonormal de autovectores.

19. **Operadores de Multiplicación 1:** Sea $\alpha = (\alpha_n)_n$ una sucesión de números complejos y $1 \leq p < \infty$. Definimos $M_\alpha : \ell^p \to \ell^p$ por $M_\alpha((x_n)_n) = (\alpha_n x_n)_n$. Probar:

   a) M_α está bien definida si y solo si $\alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$.

   b) M_α es inyectiva si y solo si $\alpha_n \neq 0 \ \forall n$.

   c) M_α es un isomorfismo si y solo si $(\frac{1}{\alpha_n})_n \in \ell^\infty$.

   d) $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$

20. **Operadores de Multiplicación 2:** Dado φ en $L^\infty[0,1]$ se define el operador de multiplicacion $M_\varphi(f) = \varphi f$.

   a) Si φ es continua entonces M_φ es un operador acotado de $C[0,1]$ en $C[0,1]$ y calcular su norma.

   b) Probar que M_φ es acotado de $L^p[0,1]$ en $L^p[0,1]$ y calcular su norma.