1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA: TURNO: 14 a 17 19 a 22 **TEMA 1**

Algebra Lineal - Primer Cuatrimestre 2013

Primer Parcial (18/05/2013)

---

1. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B}$ una base de V tal que $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ k & 2 & k^2 & k+1 \\ 0 & 4 & 1 & 3-k \\ 1 & 0 & 2k & 4k+3 \end{pmatrix}$.
   Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f) = V$.

---

2. Sean $S = \{p \in \mathbb{R}_3[X] / p(1) = p'(-1) = 0\}$ y $T = \langle -3X^3 + X^2 + 2X,\ X^3 - 1 \rangle$ subespacios de $\mathbb{R}_3[X]$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ tal que $f(S) = T$, $f(T) = S$ y f no sea un isomorfismo.

---

3. Sean V un K-espacio vectorial y $f, g \in \text{End}(V)$ proyectores tal que $f \circ g = g \circ f$, probar que:
   a) $f \circ g$ es proyector.
   b) $Im(f \circ g) = Im(f) \cap Im(g)$.
   c) $Nu(f \circ g) = Nu(f) + Nu(g)$.

---

4. Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Recordemos que se define la transformación lineal $f^t : W^* \to V^*$ de la siguiente manera:
   $$f^t(\varphi) = \varphi \circ f, \qquad \forall\, \varphi \in W^*.$$
   f^t se llama la función *transpuesta* de f.
   a) Probar que $(\text{Im}(f))^\circ = \text{Nu}(f^t)$ y que $\text{Im}(f^t) = (\text{Nu}(f))^\circ$.
   b) Sean $v \in V$ no nulo y $T : V \longrightarrow V$ una trasformación lineal tal que $T(v) = \lambda v$ para algún $\lambda \in K$. Probar que existe $\varphi \in V^*$ no nulo tal que $T^t(\varphi) = \lambda\varphi$.
   (Sug.: considerar la transformación lineal $T - \lambda Id$).

---

5. Sea $\mathbb{C}_2[X]$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.
   a) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que:
   $$\langle f, g \rangle = k f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx$$
   es un producto interno en $\mathbb{C}_2[X]$.
   b) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ una base de $\mathbb{C}_2[X]$. Para los $k \in \mathbb{R}$ hallados en el ítem anterior, calcular la matriz del producto interno en esa base. ¿Es $\mathcal{B}$ una base ortogonal?
   c) Para $k = 4$, hallar la distancia entre el polinomio constante $p \equiv 1$ y el subespacio $\langle X, X^2 \rangle$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS