ALGEBRA LINEAL - Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 9 - Forma de Jordan

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle_A := \langle v, Av, A^2v \rangle$? (es decir, ¿tiene A un vector cíclico?)

2. Sea $f \in \mathrm{End}_K(K^n)$ tal que f^2 tiene un vector cíclico (es decir, $K^n = \langle v \rangle_{f^2}$). Probar que f tiene un vector cíclico. ¿Es válida la recíproca?

3. *a*) Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definido por $f(x,y,z) = (x,y,0)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^3$ que sean f-invariantes.

   b) Sea $f_\theta \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ la rotación de ángulo θ. Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f_θ no es diagonalizable y hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

   c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_2)$ dado por

$$[g_\theta]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   ¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

4. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ una tranformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

   a) Probar que para todo i, $0 \leq i \leq n$, existe un subespacio S_i de $\mathbb{R}^n$ de dimensión i que es f-invariante.

   b) Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

5. Sea K un cuerpo arbitrario, se consideran las dos afirmaciones siguientes:

   a) $A, B \in K^{n\times n}$ son semejantes.

   b) $A, B \in K^{n\times n}$ cumplen que $\chi_A = \chi_B$ y $m_A = m_B$.

   Probar que las afirmaciones a) y b) son equivalentes para cualquier par de matrices A, B si y sólo si $n \leq 3$.

6. Determinar la forma y una base de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. *a*) Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que $\mathcal{X}_A(t) = t^6$ y $m_A(t) = t^3$. Determinar las posibles formas de Jordan de A.

   b) Sea $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$. ¿Cuántos bloques tiene la forma de Jordan de A? ¿Y si $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ con $\mathrm{rg}(A) = 9$?

8. Decidir si existe (y en caso afirmativo exhibir)

   a) $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 5$, $\mathrm{rg}(A^2) = 3$, $\mathrm{rg}(A^3) = 2$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$.

b) $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$, $\mathrm{rg}(A^2) = 4$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$.

c) $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 9$, $\mathrm{rg}(A^2) = 5$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$.

9. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

10. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&-1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ -1&0&-1&0&0&1&0\\ -1&-1&-1&0&0&1&0\\ 0&0&1&-1&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

11. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \leq j \\ 1 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

12. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que $m_A(\lambda) = \lambda^6$, y sea $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

13. Sea $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de $\mathbb{C}^7$ tal que

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&3&0\\ 0&0&0&0&0&0&3 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar $\mathcal{X}_f$ y m_f.

b) Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ un autovalor de f y sea $m = \mathrm{mult}(\lambda_0, \mathcal{X}_f)$. ¿Para qué autovalores λ_0 de f se tiene que $\mathrm{Nu}(\lambda_0 \,\mathrm{Id} - f) = \mathrm{Nu}\big((\lambda_0 \,\mathrm{Id} - f)^m\big)$?

c) Para cada autovalor λ_0 de f, ¿cuál es la menor potencia k tal que $\mathrm{Nu}\big((\lambda_0 \,\mathrm{Id} - f)^m\big) = \mathrm{Nu}\big((\lambda_0 \,\mathrm{Id} - f)^k\big)$?

d) Para cada λ_0 autovalor de f, notamos por f_{λ_0} la restricción de $\lambda_0 \,\mathrm{Id} - f$ a $\mathrm{Nu}\big(\lambda_0 \,\mathrm{Id} - f)^m\big)$. Calcular $\dim(\mathrm{Im}(f_{\lambda_0}))$ y $\dim(\mathrm{Im}(f_{\lambda_0}^2))$.

14. Hallar la forma y una base de Jordan de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3&0&8\\ 3&-1&6\\ -2&0&-5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2&0&4\\ 6&0&12\\ 3&-1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&2&3&4\\ 0&1&2&3\\ 0&0&1&2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&1&-2\\ 1&1&-1&2\\ 0&2&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&-1&0&0&0\\ 4&4&0&0&0\\ -1&-1&3&0&-1\\ 1&1&-1&2&1\\ -1&-1&0&-1&1 \end{pmatrix}.$$

15. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz siguiente para cada valor de $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 3&0&8&a\\ 3&-1&6&0\\ -2&0&-5&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}.$$

16. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x,\, x\,e^x,\, x^2e^x,\, e^{2x}\rangle$. Sea $\delta \in \mathrm{End}_\mathbb{R}(V)$ definido por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ.

17. Sea V un K-espacio vectorial, sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$ una transformación lineal y sea $h \in K[\lambda]$.

    a) Probar que $\mathrm{Nu}(h(f))$ e $\mathrm{Im}(h(f))$ son subespacios invariantes por f.

    b) Probar que si un autovalor λ de f es raíz de h, entonces $E_\lambda \subseteq \mathrm{Nu}(h(f))$.

    c) Probar que si un autovalor λ de f no es raíz de h, entonces $E_\lambda \subseteq \mathrm{Im}(h(f))$.

18. Determinar las posibles formas de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en los casos:

    a) $\mathcal{X}_A(\lambda) = (\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$ y $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$

    b) $\mathcal{X}_A(\lambda) = (\lambda-7)^5$ y $m_A(\lambda) = (\lambda-7)^2$

    c) $\mathcal{X}_A(\lambda) = (\lambda-2)^7$ y $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^3$

    d) $\mathcal{X}_A(\lambda) = (\lambda-3)^4(\lambda-5)^4$ y $m_A(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-5)^2$

19. Determinar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ que cumple

$$m_A = (\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)^2(\lambda-\lambda_4)^3, \quad \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j,$$
$$\mathrm{rg}(A-\lambda_1\,\mathrm{Id}) = 11,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_1\,\mathrm{Id})^2 = 10,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3\,\mathrm{Id}) = 12,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3\,\mathrm{Id})^2 = 10, \mathrm{rg}(A-\lambda_4\,\mathrm{Id}) = 13.$$

20. Determinar la forma de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ con autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2$ y λ_3 distintos tal que:

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{rg}(A-\lambda_1\,\mathrm{Id}) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1\,\mathrm{Id})^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1\,\mathrm{Id})^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1\,\mathrm{Id})^4 = 10 \\
\mathrm{rg}(A-\lambda_2\,\mathrm{Id}) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2\,\mathrm{Id})^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2\,\mathrm{Id})^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2\,\mathrm{Id})^4 = 9, \\
\mathrm{rg}(A-\lambda_3\,\mathrm{Id}) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3\,\mathrm{Id})^2 = 12, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3\,\mathrm{Id})^3 = 11. &
\end{array}$$

21. Decidir si las matrices siguientes son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

22. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A(\lambda) = \mathcal{X}_B(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-3)^2$ y $m_A = m_B$. ¿Implica esto que A es semejante a B?

23. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ no nulos, y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = x_iy_j$.

    a) Calcular todos los autovalores y autovectores de A.

    b) Calcular las posibles formas de Jordan de A.

24. *a*) Sea J la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    Probar que J es semejante a J^t.

b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

25. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ tal que $B^2 = A$.

26. Calcular para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

27. Hallar una fórmula general para el término general a_n de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por:

$$a_0 = \alpha,\ a_1 = \beta\ ,\ a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \text{donde} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

28. a) Calcular e^{At} para las matrices A siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

c) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) + y(t) \\ z'(t) &= -x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales arbitrarias $x(0) = a$, $y(0) = b$, $z(0) = c$.

29. a) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que U^tAU sea diagonal para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que U^*AU sea diagonal, para

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

30. Sea $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}(V)$. Se dice que f es *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

a) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.

b) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:
   1) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|,\ \forall\, v \in V$. En particular, $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^*)$.
   2) $\lambda\,\mathrm{Id} - f$ es normal, $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}$.
   3) $f(v) = \lambda\, v \ \Rightarrow\ f^*(v) = \overline{\lambda}\, v$.
   4) $\mathrm{Nu}(\lambda\,\mathrm{Id} - f)$ es f^*-invariante.

c) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores. (Sugerencia: observar que $(\mathrm{Nu}(\lambda\,\mathrm{Id} - f))^{\perp}$ es f-invariante y f^*-invariante).

d) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

31. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.
   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.
   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
   d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

32. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

33. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

   i) Probar que f es una rotación.
   ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

34. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se llama *isometría* si satisface que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^2.$$

   a) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.
   b) Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformación ortogonal y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + v,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2$.