ALGEBRA LINEAL - Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 8 - Diagonalización

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matrices A siguientes (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Para cada una de las matrices $A \in K^{n\times n}$ del ejercicio anterior, sea $\mathcal{E}$ una base de V, donde V es un K-e.v. de dimensión n, y sea $f \in \mathrm{End}(V)$ dado por $[f]_{\mathcal{E}} = A$. Decidir si es posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal, y en caso afirmativo, calcular $C(\mathcal{B}, \mathcal{E})$.

3. Hacer lo mismo que en los dos ejercicios anteriores para las siguientes matrices, discutiendo según los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ (analizar por separado los casos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

4. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila F_i, la suma de sus coeficientes es igual a 1.
Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

6. Probar que si λ es autovalor de A si y solo si λ es autovalor de A^t. ¿Con el mismo autovector?

7. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ el endomorfismo derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector asociado.

8. *a*) Diagonalizar las siguientes matrices encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, calcular $\det(A_\alpha)$ donde

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

(Sug: observar que $\det(A_\alpha) = \mathcal{X}_A(1+\alpha)$, donde A es la matriz del inciso *a*))

9. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f.

10. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$ tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

11. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo nilpotente no nulo. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

12. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinar en cada caso si es posible encontrar $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $B^2 = A$. ¿Y en $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x,y,z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z).$$

a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_\mathcal{B}$ sea diagonal.

b) Calcular $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces), $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

14. Se define la siguiente sucesión de números enteros de la manera siguiente:

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_2 := 1, \quad \text{y} \quad a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n, \ \forall\, n \geq 0.$$

Hallar una fórmula para el término a_n, $n \in \mathbb{N}$.

15. Encontrar una fórmula general para x_n e y_n, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, en función de x_0 e y_0 (ecuaciones en diferencias):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6\,x_n + 2\,y_n \\ y_{n+1} = 2\,x_n + 3\,y_n \end{cases}.$$

16. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $\begin{cases} x'(t) = 8x(t) + 10y(t) \\ y'(t) = -5x(t) - 7y(t) \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$, con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $A^n \to 0$ (es decir:$(A^n)_{ij} \to 0$, $1 \leq i,j \leq 3$).

18. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos. Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k- ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k-ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k-ésimo mes.

    a) Determinar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que

    $$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

    b) Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o término del mes 0) es $(0, 0, 10000)$, o sea de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos al cabo del k-ésimo mes.

    c) Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (determinarlo en función de (x_0, y_0, z_0)), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).

19. En una ciudad, los días pueden ser soleados (1), nublados (2) o lluviosos (3). El coeficiente a_{ij} de la matriz de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ siguiente representa la probabilidad de que el día de mañana esté i si hoy está j:

    $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

    (por ejemplo, si hoy llueve, la probabilidad de que mañana esté nublado es 0.6).
    Calcular (aproximadamente) la probabilidad de que dentro de 100 días llueva.

20. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$.

    a) Probar que las matrices de $K^{(m+n)\times(m+n)}$ $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ son semejantes.

    b) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$.

21. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

    a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = X - 1$, $P = X^2 - 1$, $P = (X-1)^2$

    b) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$

22. *a*) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $\mathrm{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

    b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3I_4$. Hallar los restantes autovalores de A.

23. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

    a) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5\,\mathrm{Id}_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

    b) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    c) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de Id_2.

24. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Probar que f es un automorfismo si y solo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo, y en ese caso expresar f^{-1} en función de f, $f \circ f$ etc.

25. *a*) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface $A^2 + \mathrm{Id}_n = 0$.

    b) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisface $A^2 + \mathrm{Id}_n = 0$, entonces A es inversible, no tiene autovalores reales y n tiene que ser par.

26. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.

27. Sea $A \in K^{m\times m}$ y $B \in K^{n\times n}$. Probar que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ se diagonaliza en $K^{(m+n)\times(m+n)}$ si y solo si A y B se diagonalizan.

28. Sean $A, B \in K^{n\times n}$ dos matrices que conmutan.

    a) Probar que si x es un autovector de A con autovalor λ, entonces Bx también lo es.

    b) Probar que si A y B son diagonalizables, entonces se las puede diagonalizar usando una misma base para ambas.

29. Calcular el polinomio minimal y el polinomio característico de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

30. Calcular el polinomio minimal para cada una de los endomorfismos siguientes:

    a) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X]),\ f(h) = h' + 2\,h$

    b) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n\times n}),\ f(A) = A^t$

31. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

32. Sea $\delta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X])$ el endomorfismo derivación. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.

33. *Matriz Compañera*
Sea $h(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in K[\lambda]$. La matriz compañera del polinomio h está definida como

$$\mathcal{C}_h = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}.$$

El objetivo de este ejercicio es probar que $m_{\mathcal{C}_h}(\lambda) = \mathcal{X}_{\mathcal{C}_h}(\lambda) = h(\lambda)$.

a) El objetivo de este inciso es probar que $m_{\mathcal{C}_h}(\lambda) = \mathcal{X}_{\mathcal{C}_h}(\lambda) = h(\lambda)$.
Sea $f \in \mathrm{End}_K(K^n)$ definido por $f(x) = \mathcal{C}_h\, x$. Calcular m_{e_1}. Deducir $m_{\mathcal{C}_h}$ y $\mathcal{X}_{\mathcal{C}_h}$.

b) Usar esto para dar otra demostración, inductiva, del teorema de Cayley-Hamilton.

34. Calcular f^* para cada uno de los endomorfismos siguientes:

a) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, $\quad f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

b) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$, $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

c) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, para $\mathcal{B} = \big((1,2,-1),(1,0,0),(0,1,1)\big)$,

d) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X])]$ $\quad f(p) = p'$, $\quad$ donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

e) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n\times n})$, $f(A) = P^{-1}AP$ donde $P \in GL(n,\mathbb{C})$ y $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$.

35. Sea $h \in \mathbb{R}[X]$ y sea $\mu_h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X])$ definido por $\mu_h(g) = h\,g, \forall\, g \in \mathbb{R}[X]$. Probar que existe, y calcular, μ_h^* para el producto interno $\langle g_1, g_2\rangle = \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx$.

36. Sea $(V, \langle\,,\,\rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión finita. Probar que:

a) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*, \forall\, f_1, f_2 \in \mathrm{End}_K(V)$ y $(k\,f)^* = \overline{k}f^*, \forall\, f \in \mathrm{End}_K(V),\ k \in \mathbb{C}$;

b) $(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*, \forall\, f_1, f_2 \in \mathrm{End}_K(V)$;

c) $f \in \mathrm{Aut}_K(V) \Rightarrow f^* \in \mathrm{Aut}_K(V)$, y $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$;

d) $((f)^*)^* = f, \forall\, f \in \mathrm{End}_K(V)$;

e) $f^* \circ f = 0 \Rightarrow f = 0, \forall\, f \in \mathrm{End}_K(V)$.

37. Sea $(V, \langle\,,\,\rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}(V)$. Probar que
$\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}(f))^{\perp}$ y $\mathrm{Nu}(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.

38. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno $\langle\,,\,\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que f sea autoadjunta para $\langle\,,\,\rangle$.

39. Sea $(V, \langle\,,\,\rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $p_S : V \to V$ sobre S es autoadjunta, y calcular sus autovalores.