ALGEBRA LINEAL - Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 7 - Determinante

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con $\det(A) = 8$. Calcular $\det(3A)$ y $\det(-A)$.

3. Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \operatorname{sen}^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \operatorname{sen}^2 c & 1 & \cos^2 c \end{pmatrix}.$$

4. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 1 & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *a*) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$.

   b) Sean $B \in K^{n\times n}$, $C \in K^{m\times m}$ y $D \in K^{n\times m}$, y sea $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \in K^{(n+m)\times(n+m)}$.
   Probar que $\det(A) = \det(B)\det(C)$.

   c) Sean $A_1 \in K^{n_1\times n_1}, \dots, A_r \in K^{n_r\times n_r}$. Probar que

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^r \det(A_i).$$

d) Sean $A \in K^{n_1 \times n}$ y $B \in K^{n_2 \times n}$ con $n_1 + n_2 = n$.
Calcular $\det \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$ en función de $\det \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

6. Calcular inductivamente, para $n \geq 3$,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Demostrar que las raíces de la ecuación $\det \begin{pmatrix} \lambda - a & b \\ b & \lambda - c \end{pmatrix} = 0$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$ dados, y la variable λ, son reales.

8. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}.$$

9. Probar que no existe ninguna matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $C \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} C$.

10. Dado $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, ¿puede el sistema de ecuaciones lineales $A\,x = b$ ser compatible determinado, para $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$?

11. Encontrar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = x$ admite solución no trivial, para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$.

12. *Determinante de Vandermonde*

a) Probar que el determinante de la siguiente matriz de Vandermonde en $K^{n\times n}$, para $k_1, \ldots, k_n \in K$,

$$V(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

satisface $\det(V(k_1, \ldots, k_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i)$. Deducir que es inversible si y solo si todos los k_i son distintos entre sí.
(Sugerencia: sin perder generalidad se supone que $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$. Si se considera el determinante de $V(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, X)$ como polinomio en X probar que $k_1, \ldots, k_{n-1}$ son sus raíces y factorizarlo.)

b) Calcular

$$\det\begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix} \quad y \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}.$$

c) *Interpolación*: deducir de (a) que dados $a_0, \dots, a_n \in K$ todos distintos y $b_0, \dots, b_n \in K$ cualesquiera, existe un único polinomio $P \in K_n[X]$ que satisface simultáneamente

$$P(a_0) = b_0,\ P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n.$$

d) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir (nuevamente) que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita. (Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.)

13. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

14. Sea $A \in K^{n\times n}$ no inversible tal que $\operatorname{adj}(A) \neq 0$. Calcular $\operatorname{rg}(A)$ y $\operatorname{rg}(\operatorname{adj}(A))$.

15. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{R}$ empleando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Calcular $\det(A)$ sabiendo que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{pmatrix} = 0,\ \det\begin{pmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{pmatrix} = 0,\ \text{y} \det\begin{pmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{pmatrix} = 0.$$

17. *a*) Sean $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n-1$. Probar que la función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1\,1} & \cdots & v_{n-1\,n} \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

b) Probar que si $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ es linealmente independiente, $\langle v_1, \dots, v_{n-1}\rangle^\circ = \langle\varphi\rangle$ (es decir, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $\langle v_1, \dots, v_{n-1}\rangle$).

18. Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$.

a) Probar que A tiene una inversa con coeficientes enteros si y sólo si $\det(A) = \pm 1$.

b) Probar que en ese caso, para cada $b \in \mathbb{Z}^n$, el sistema lineal $Ax = b$ tiene solución en $\mathbb{Z}^n$.