ALGEBRA LINEAL - Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 6 - Variedades lineales

1. Para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$ determinar la dimensión de la variedad lineal

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + 3x_3 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ -x_1 + x_2 + ax_3 = 0\right\}.$$

2. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos son variedades lineales y calcular su dimensión:

   a) $\{P \in \mathbb{Q}_3[X] \,/\, P'(2) = 1\}$ *b*) $\{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,/\, \mathrm{tr}(A) = 5\}$

3. *a*) Sea $L \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 0)$ y $(1, 3, -1)$. Hallar una variedad lineal de dimensión 2 que contenga a L. ¿Es única?

   b) Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y sea $L = \langle(0, 1, 1)\rangle + (1, 1, 0)$. Hallar un plano $\Pi' \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\Pi' \cap \Pi = L$. ¿Es único?

4. Hallar ecuaciones implícitas para las siguientes variedades lineales:

   a) $\langle(1, 2, 1), (2, 0, 1)\rangle + (1, 1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

   b) la recta de $\mathbb{R}^3$ paralela al eje z que pasa por el punto $(1, 2, 3)$.

   c) la mínima variedad lineal en $\mathbb{R}^4$ que contiene a $(1, 1, 2, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 4, 1)$.

   d) la recta en $\mathbb{R}^3$ perpendicular al plano $\langle(1, 1, 0), (0, 1, -2)\rangle + (1, 0, 2)$ que pasa por $(1, 1, 1)$.

   e) una recta en $\mathbb{R}^3$ perpendicular a la recta $\langle(1, -2, 1))\rangle + (3, 5, 7)$ que pasa por $(1, 9, -3)$.¿Es única?

5. *a*) Decidir si los puntos $(1, 1, 1)$, $(-2, 0, 1)$ y $(3, 0, 2)$ son colineales.

   b) Decidir si los puntos $(8, 2, 4)$, $(4, 2, 8)$, $(-2, 0, 1)$ y $(1, -1, 3)$ son coplanares.

6. Sea $L = \langle(2, 1, 1)\rangle + (0, -1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

   a) Hallar un plano Π tal que $L \subseteq \Pi$ y $0 \in \Pi$.

   b) ¿Existirá un plano Π' tal que $L \subseteq \Pi'$, $0 \in \Pi'$ y $(0, 0, 1) \in \Pi'$ simultáneamente?

7. *a*) Hallar en $\mathbb{R}^3$ dos rectas alabeadas que pasen por $(1, 2, 1)$ y $(2, 1, 1)$ respectivamente.

   b) Hallar en $\mathbb{R}^4$ dos planos alabeados que pasen por $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1, 1)$ respectivamente.

   c) ¿Hay planos alabeados en $\mathbb{R}^3$? Más generalmente, si V es un K-espacio vectorial de dimensión n y M_1 y M_2 son variedades lineales alabeadas en V, ¿qué se puede decir de sus dimensiones?

8. *a*) Sea $L_1 = \langle(2, 1, 0)\rangle + (0, 0, 1)$. Hallar una recta $L_2 \parallel L_1$ que pase por el punto $(-1, 3, 0)$.

   b) Si L_1 y L_2 son las rectas de *a*), hallar un plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$ simultáneamente. ¿Es Π único?

   c) Hallar un plano $\Pi' \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\Pi \cap \Pi' = L_1$.

9. En cada uno de los siguientes casos, decidir si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o alabeadas. En cada caso, hallar $M_1 \cap M_2$, $M_1 \vee M_2$ y calcular todas las dimensiones:

a) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$, $M_2 = \langle(1, 0, 1)\rangle + (0, 0, -3)$.

b) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - 1 = x_3 + x_4 = 0\}$,
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 = x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\}$.

c) $M_1 = \langle(1, 0, -1)\rangle + (-1, 1, 2)$, $M_2 = \langle(-1, 1, 2)\rangle + (1, 0, -1)$.

d) $M_1 = \langle(1, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\rangle + (1, 2, 2, -1)$, $M_2 = \langle(1, 0, 1, 1), (2, 2, 1, 0)\rangle + (-1, 4, 2, -3)$.

10. Sean $L_1 = \langle(1, 1, 1)\rangle + (0, 2, 0)$ y $L_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$.

    a) Hallar planos Π_1 y Π_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $L_1 \subseteq \Pi_1$, $L_2 \subseteq \Pi_2$ y $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ simultáneamente.

    b) Hallar $L_1 \cap L_2$ y $L_1 \vee L_2$ y calcular sus dimensiones.

11. Sean $L_1 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 3x_3 = 0\,,\ x_2 - x_3 = -2\big\}$ y
$L_2 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 6x_3 = 1\,,\ x_2 + 2x_3 = 0\big\}$.
Hallar una recta $L \subseteq \mathbb{R}^3$ que pase por el punto $(1, 0, 2)$ y corte a L_1 y a L_2.

12. Sea $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal, para el producto interno canónico, sobre el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - x_2 = 0\}$.

    a) Encontrar una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $p(L) = (1, 2, 1)$. ¿Es única?

    b) Encontrar una recta $L_1 \subset \mathbb{R}^3$ tal que $p(L_1) = L_2$ siendo $L_2 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$.
    ¿Es única?

13. Sean L_1 y L_2 las rectas de $\mathbb{R}^2$ de ecuaciones $x - y = 1$ y $x + y = 3$ respectivamente.

    a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2.

    b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_3) = \angle(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

14. Sean $L_1 = \langle(1, -2, 1)\rangle + (0, 0, -2)$ y L_2 la recta que pasa por $(1, 4, 2)$ y $(0, 2, -1)$ en $\mathbb{R}^3$. Determinar el ángulo entre L_1 y L_2.

15. Sea la recta $L = \langle(1, -1, 1)\rangle + (2, 1, 0) \subset \mathbb{R}^3$. Encontrar un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tal que $(2, 1, 0) \in \Pi$ y $\angle(L, \Pi) = \frac{\pi}{4}$.

16. Calcular la distancia entre:

    a) la recta $\langle(1, 1)\rangle + (3, 0)$ y el punto $p = (-1, 1)$,

    b) la recta $\langle(1, 1, 0)\rangle + (3, 0, 0)$ y el punto $p = (-1, 1, 0)$,

    c) el plano que pasa por $(1, 2, 1)$ y tiene vector normal $(1, -1, 2)$ y el punto $p = (1, 2, 5)$,

    d) la recta $\langle(2, -2, -3)\rangle + (0, 2, 2)$ y el punto $p = (0, -2, -1)$.

    e) el plano $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_4 = 2 \end{cases}$ y el punto $p = (0, 2, 0, -1)$,

    f) los planos de ecuación $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ y $x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$,

    g) el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y la recta $\langle(-1, 0, 1)\rangle + (1, 1, 2)$,

    h) las rectas $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 4x - y - 2z = 9 \end{cases}$ y $L_2 : (x, y, z) = \langle(1, 0, 2)\rangle + (1, 2, -3)$,

    i) las rectas $L_1 : \begin{cases} x + z = 5 \\ 2x + y + 4z = 11 \end{cases}$ y $L_2 = \langle(1, 1, -1)\rangle + (0, 2, 1)$.

j) las variedades lineales $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 = -2,\ x_2 - 2x_4 = 2\}$ y $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 2x_4 = -8,\ x_1 - x_2 + x_4 = 5\}$.

17. Para los cada uno de los ítems $a), b), c), d)$ y $e)$ del ejercicio anterior, sean M la variedad lineal definida y p el punto dado. Hallar el complemento ortogonal a M que pasa por p y la proyección ortogonal de p sobre M.

18. Demostrar que si M_1 y M_2 son variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ con $\dim M_1 \leq \dim M_2$ y $M_1 \| M_2$, entonces $d(M_1, M_2) = d(p, M_2)$ para todo $p \in M_1$.

19. *a*) Sea en $\mathbb{R}^2$ la recta L que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(5, 3)$. Determinar una recta $L' \parallel L$ tal que $d(L, L') = 2$. ¿Es única?

    b) Sean $\Pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y $\Pi_2 = \langle(0, 1, 1), (1, 0, -2)\rangle + (1, 1, 1)$. Hallar un plano Π tal que $\Pi \parallel \Pi_1$, $\Pi \parallel \Pi_2$ y $d(\Pi, \Pi_1) = d(\Pi, \Pi_2)$.

20. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = \langle(1, 2, -2)\rangle + (0, 2, 0)$ y el punto $P = (1, 2, 2)$. Encontrar ecuaciones implícitas de una recta L' ortogonal a L tal que $d(P, L') = 3$ y $L \cap L' = \emptyset$. ¿Es única?

21. Sea $L = \langle(3, 0, -4)\rangle + (1, -1, 0)$. Hallar una recta L' alabeada con L, tal que $d(L, L') = 2$.

22. Encontrar los puntos de la recta $\langle(1, -1, 0)\rangle + (2, 1, -1)$ que están a distancia 6 de $(2, 1, -1)$.

23. Sean $A = (1, 1, 2)$ y $B = (2, 0, 2)$. Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 2\}$. Hallar $C \in \Pi$ tal que A, B y C formen un triángulo equilátero. ¿Es única la solución ? ¿Por qué?

24. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P_1 = (1, -1, 0)$ y $P_2 = (1, 1, 1)$. Encontrar tres planos H distintos tales que $d(P_1, H) = d(P_2, H)$.

25. Dado en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $A = (2, -3)$, $B = (8, 5)$ y $C = (14, 11)$, hallar la longitud de la altura que pasa por el vértice A.

26. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los puntos $O = (0, 0)$, $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$. Dichos puntos forman un triángulo isósceles con base $\overline{PQ}$. Probar que la altura correspondiente a la base corta a ésta en su punto medio.

27. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = \langle(1, 1, 2)\rangle$ y el punto $P = (1, 0, -2)$. Encontrar un plano H ortogonal a L tal que $d(P, H) = \sqrt{6}$.

28. Sean A_1, A_2 y A_3 en $\mathbb{R}^3$ tres puntos no alineados.

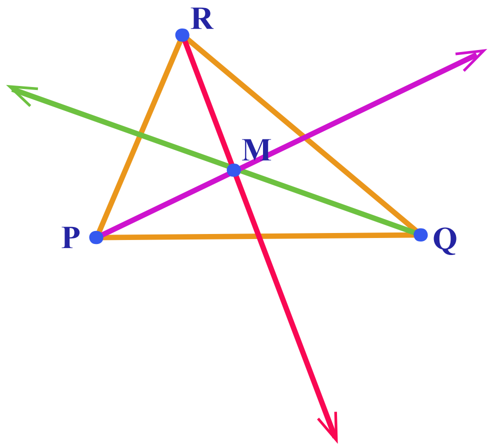
    a) Probar que el conjunto $L = \{A \in \mathbb{R}^3 \,/\, d(A, A_1) = d(A, A_2) = d(A, A_3)\}$ es una recta ortogonal al plano que contiene a A_1, A_2 y A_3.

    b) Calcular L en el caso $A_1 = (1, -1, 0)$, $A_2 = (0, 1, 1)$ y $A_3 = (1, 1, 2)$.

29. Dado el triángulo PQR, se llama *mediana correspondiente al vértice* P a la recta que pasa por dicho vértice y por el punto medio del lado $\overline{QR}$.
    Se considera en $\mathbb{R}^2$ el triángulo cuyos vértices son $P = (0, 0)$, $Q = (c, 0)$ y $R = (a, b)$.

    a) Probar que sus tres medianas se cortan en un punto M.

    b) Probar que si $d(M, P) = d(M, Q) = d(M, R)$, el triángulo PQR es equilátero.



30. (*Teorema de Thales*) Sean en $\mathbb{R}^2$ las rectas dadas por las ecuaciones $L_1 : x_2 = 0$, $L_2 : x_2 = \alpha$ y $L_3 : x_2 = \beta$, con α y β dos números no nulos y distintos entre sí. Sean L y L' dos rectas transversales a L_1, L_2 y L_3. Probar que

$$\frac{d(L_1 \cap L, L_2 \cap L)}{d(L_2 \cap L, L_3 \cap L)} = \frac{d(L_1 \cap L', L_2 \cap L')}{d(L_2 \cap L', L_3 \cap L')}.$$