ALGEBRA LINEAL - Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 4 - Espacio dual

1. Sea $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* / \varphi(1,-1,2) = 0\}$. Hallar una base de S.

2. Hallar la base dual de la base $\mathcal{B}$ del K-espacio vectorial V en cada uno de los casos siguientes:

   a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big((1,-1),(2,0)\big)$

   b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \big((1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$

   c) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B} = \big(-X+2,\ X-1,\ X^2-3X+2,\ X^3-3X^2+2X\big)$

3. Sea $\mathcal{B}' = \big(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\big)$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

   $$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 \qquad \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3 \qquad \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3$$

   Hallar la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^*$.

4. Sean f_1 , f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

   $$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx \qquad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx$$

   a) Probar que $\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

   b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $\mathcal{B}^* = \big(f_1,\ f_2,\ f_3\big)$.

5. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ y sea $\mathcal{E}^* = \big(x_1,x_2,x_3\big) \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   a) Calcular las coordenadas de φ en $\mathcal{E}^*$.

   b) Calcular las coordenadas de φ en la base $\mathcal{B}' = \big(x_1+x_2+x_3, x_1+x_2, x_1\big)$ de $(\mathbb{R}^3)^*$.

   c) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ la base $\mathcal{B} = \big((0,0,1),(0,1,-1),(1,-1,0)\big)$. Encontrar una ecuación para S en la base $\mathcal{B}$.
   (Sugerencia: notar que $\mathcal{B}'$ es la base dual de $\mathcal{B}$ y no hacer ninguna cuenta.)

6. Sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ la base $\mathcal{B} = \big((1,1),(1,-1)\big)$. Encontrar las coordenadas de la base dual de $\mathcal{B}$ en la base dual de la canónica.

7. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n.

   a) Sea $\varphi \in V^* - \{0\}$. Probar que $\dim(\mathrm{Nu}(\varphi)) = n - 1$.

   b) Sean $\varphi_1,\ \varphi_2 \in V^* - \{0\}$. Probar que

   $$\mathrm{Nu}(\varphi_1) = \mathrm{Nu}(\varphi_2) \iff \{\varphi_1, \varphi_2\} \text{ es linealmente dependiente.}$$

   c) Sean φ_i, $1 \le i \le r$, formas lineales en V^* y sea $\varphi \in V^*$. Probar que

   $$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nu}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{Nu}(\varphi) \ \Rightarrow\ \varphi \in \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_r \rangle.$$

   (Sug: empezar con el caso $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ linealmente independiente.)

d) Sean φ_i $(1 \leq i \leq n)$ formas lineales en V^*. Probar que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nu}(\varphi_i) = \{0\} \iff \{\, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \,\} \text{ es base de } V^*.$$

8. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:

   a) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \langle (1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0) \rangle$

   b) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \langle (1,1,-1,1),(2,-1,3,1) \rangle$

   c) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$

9. Sea $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \, A\,B = 0\}$. Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(\mathrm{Id}_2) = 0$ y $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

10. Para los siguientes subespacios S y T de V, determinar una base de $(S+T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$.

    a) $V = \mathbb{R}^4,\ S = \langle (1,1,-1,1),(2,-1,3,1) \rangle,\ T = \langle (2,-4,8,0),(-1,1,2,3) \rangle$

    b) $V = \mathbb{R}^4,\ S = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\},\ T = \langle (2,1,3,1) \rangle$

11. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

12. Sea $\mathrm{tr} : K^{n\times n} \to K$ la forma lineal traza, y sea $A \in K^{n\times n}$. Se define $f_A : K^{n\times n} \to K$ como $f_A(X) = \mathrm{tr}(A\,X)$.

    a) Probar que $f_A \in (K^{n\times n})^*,\ \forall\, A \in K^{n\times n}$.

    b) Probar que si para todo $X \in K^{n\times n}$ se tiene $f_A(X) = 0$ entonces $A = 0$.

    c) Se define $\gamma : K^{n\times n} \to (K^{n\times n})^*$ como $\gamma(A) = f_A$. Probar que γ es un isomorfismo.

    d) Sea $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definida por:

    $$\varphi\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = 3x_{11} - 2x_{12} + 5x_{22}.$$

    Encontrar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \, \gamma(A) = \varphi$.

13. Sea $\varphi \in (K^{2\times 2})^*$ tal que $\varphi(AB) = \varphi(BA),\ \forall\, A, B \in K^{2\times 2}$. Probar que $\exists\, \alpha \in K$ tal que $\varphi = \alpha\,\mathrm{tr}$. Deducir que si $\varphi(AB) = \varphi(BA),\ \forall\, A, B \in K^{2\times 2}$, y $\varphi(\mathrm{Id}_2) = 2$ entonces $\varphi = \mathrm{tr}$. ¿Qué podemos decir si consideramos $\varphi \in (K^{n\times n})^*$?

14. Sea $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n}$ una $(n+1)$-upla de puntos de K distintos. Para cada $0 \leq i \leq n$ se define el funcional de evaluación en α_i

$$\begin{array}{rccc} \epsilon_{\alpha_i} : & K_n[X] & \to & K \\ & P & \mapsto & P(\alpha_i). \end{array}$$

a) Probar que $(\epsilon_{\alpha_i})_{0\le i\le n}$ es una base de $K_n[X]^*$. Para eso, alcanza con probar que es la base dual de cierta base $(P_j)_{0\le j\le n}$ de $K_n[X]$, llamada *base de Lagrange*.

b) Probar que si $(\beta_i)_{0\le i\le n} \in K^{n+1}$, entonces hay un único polinomio $P \in K_n[X]$ que cumple $P(\alpha_i) = \beta_i$ para $0 \le i \le n$. Se llama *polinomio interpolador* de los valores β_i en los puntos α_i.
En términos de los polinomios de Lagrange, se tiene

$$P = \sum_{0\le i\le n} P(\alpha_i)\, P_i.$$

c) Si $K = \mathbb{R}$, probar que existe $(a_i)_{0\le i\le n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que, para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$, vale la identidad

$$\int_0^1 P(x)\, dx = \sum_{0\le i\le n} a_i\, P(\alpha_i).$$

(Sugerencia: En particular, la identidad debe valer para los polinomios P_j.)
Hallar los a_i en el caso en que $n = 3$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

15. Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se define la función $f^t : W^* \to V^*$ de la siguiente manera:

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f, \qquad \forall\, \varphi \in W^*.$$

f^t se llama la función *transpuesta* de f.

a) Verificar que efectivamente $f^t(\varphi) \in V^*$ y probar que f^t es una tranformación lineal.

b) Probar que $(\mathrm{Im}(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$ y que $\mathrm{Im}(f^t) = (\mathrm{Nu}(f))^\circ$ (Sug: probar que $\mathrm{Im}(f^t) \subseteq (\mathrm{Nu}(f))^\circ$).

c) Sea $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ el operador derivación y sea $\varphi \in (\mathbb{R}_n[X])^*$ dada por

$$\varphi(P) = \int_0^1 P(x)dx.$$

Calcular $D^t(\varphi)$ y hallar una base para $\mathrm{Nu}(D^t)$.

d) Sean $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $T_B : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por $T_B(X) = XB - BX$. Calcular T_B^t.

e) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x, y) = (2x - y, 3x, x - 2y)$.
Si $\mathcal{B} = \big((1, 2), (1, 3)\big)$ y $\mathcal{C} = \big((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\big)$, calcular $[f]_{\mathcal{BC}}$ y $[f^t]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}$.

f) Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de V y W respectivamente, probar que

$$[f^t]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = ([f]_{\mathcal{BC}})^t.$$

16. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial (o un K-espacio vectorial con K infinito).

a) Sean $\phi_1, \phi_2 \in V^*$ formas lineales no nulas. Probar que existe un vector $v \in V$ tal que $\phi_1(v) \neq 0$ y $\phi_2(v) \neq 0$. Deducir que si $\phi_1, \phi_2 \in V^*$ y $\phi_1 . \phi_2 \in V^*$ entonces $\phi_1 = 0$ o $\phi_2 = 0$.

b) Sean $\phi_1, \dots, \phi_n \in V^*$ formas lineales no nulas. Probar que existe un vector $v \in V$ tal que $\phi_i(v) \neq 0$ para todo $1 \le i \le n$.

c) Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ vectores no nulos. Probar que existe una forma lineal $\phi \in V^*$ tal que $\phi(v_i) \neq 0$ para todo $1 \le i \le n$.

d) Sean $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$. Hallar $\phi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $\phi(v_i) \neq 0$ para todo $1 \le i \le 3$.