

**ALGEBRA LINEAL - Primer Cuatrimestre 2013****Práctica 3 - Transformaciones lineales**

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales:

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$

b)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

c)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

d)  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

e)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$ , considerando a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

2. Interpretar geoméricamente las siguientes transformaciones lineales  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

a)  $f(x, y) = (x, 0)$

b)  $f(x, y) = (x, -y)$

c)  $f(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$  fijo.

3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

a)  $\text{tr} : K^{n \times n} \rightarrow K$ ,  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

b)  $f : K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}$ ,  $f(A) = BA$  donde  $B \in K^{r \times n}$  está dado

c)  $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\delta(f) = f'$

d)  $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ ,  $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$

e)  $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K$ ,  $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ , donde  $\alpha \in K$

4. Encontrar una aplicación  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que cumpla  $f(v + w) = f(v) + f(w)$  para cualquier par de vectores  $v, w \in \mathbb{C}$  pero que no sea una transformación lineal (sobre  $\mathbb{C}$ ).

5. a) Mostrar que existe una t.l.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (-5, 3)$  y  $f(-1, 1) = (5, 2)$ , y que es única. Para dicha  $f$ , determinar  $f(5, 3)$  y  $f(-1, 2)$ .

b) ¿Existe una t.l.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (2, 6)$ ;  $f(-1, 1) = (2, 1)$  y  $f(2, 7) = (5, 3)$ ?

c) Sean  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  transformaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (1, 2, 1), & f(2, 1, 0) &= (2, 1, 0), & f(-1, 0, 0) &= (1, 2, 1), \\ g(1, 1, 1) &= (1, 1, 0), & g(3, 2, 1) &= (0, 0, 1), & g(2, 2, -1) &= (3, -1, 2). \end{aligned}$$

Determinar si  $f = g$ .

d) Hallar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales exista una t.l.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga que  $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$ ,  $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$  y  $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$ .

6. a) Probar que  $\mathcal{B} = \{X^2 + X - 1, 2X + 3, X^2 - X - 1\}$  es una base de  $\mathbb{R}_2[X]$  y determinar  $f(aX^2 + bX + c)$  para  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la t.l. definida por

$$f(X^2 + X - 1) = (1, 2), \quad f(2X + 3) = (-1, 1) \quad \text{y} \quad f(X^2 - X - 1) = (2, 1).$$

b) Hallar todas las transformaciones lineales  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisfacen que

$$f(X^2 + X - 1) = (1, 2), \quad f(2X + 3) = (-1, 1) \quad \text{y} \quad f(X^2 - X - 4) = (2, 1).$$

7. a) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las transformaciones lineales de los ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si  $f$  es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular  $f^{-1}$ .

b) Idem para  $\text{tr}$  y  $\epsilon_\alpha$  del Ejercicio 3.

8. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la t.l. dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + x_3 - x_4).$$

a) Calcular  $\text{Nu}(f)$  e  $\text{Im}(f)$ .

b) Determinar el conjunto  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 6)\}$ .

9. Sea  $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ .

a) Hallar una t.l.  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$

b) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea  $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + (0, 1, 1, 2)$

10. a) ¿Existe  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  epimorfismo? ¿Y un epimorfismo  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$ ?

¿Existe  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  monomorfismo?

¿Y un monomorfismo  $f : \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \text{tr}(A) = 0\} \rightarrow \{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(1) = f'(1) = 0\}$ ?

b) ¿Existe alguna t.l.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\} \subset \text{Im}(f)$ ?

c) ¿Existe algún automorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que  $f(S) = T$ , donde  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  y  $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$ ?

11. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una t.l.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  que satisface  $\text{Nu}(f) = S$  e  $\text{Im}(f) = T$  en los siguientes casos:

a)  $S = \langle (1, 2, 1) \rangle$ ,  $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ ,

b)  $S = \langle (1, -2, 1) \rangle$ ,  $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ .

12. En cada uno de los siguientes casos definir un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  que satisface lo pedido

a)  $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$  y  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$

b)  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$

c)  $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$ ,  $\text{Im}(f) \neq \{0\}$  y  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

d)  $f \neq 0$  y  $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$

13. Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \quad \text{para cada } k \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Sean  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$  y  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$ . Determinar el núcleo y la imagen de  $f$ , de  $g$  y de  $g \circ f$ , y decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.
15. Sean  $f : V \rightarrow V'$  y  $g : V' \rightarrow V''$  transformaciones lineales. Probar que:
- $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Nu}(g \circ f)$ .
  - Si  $\text{Nu}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ , entonces  $\text{Nu}(f) = \text{Nu}(g \circ f)$ .
  - Si  $\text{Im}(f) \subseteq \text{Nu}(g)$ , entonces  $g \circ f = 0$ .
  - $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g)$ .
  - Si  $f$  es un epimorfismo, entonces  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$ .
16. En cada uno de los siguientes casos definir un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  que satisfice lo pedido
- $f \neq 0$  y  $f \circ f = 0$
  - $f \neq \text{Id}$  y  $f \circ f = \text{Id}$
17. a) Para  $t = \pi$  en el Ejercicio 2.c), calcular  $f^2$   
 b) Hallar un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f \neq \text{Id}$ , tal que  $f^3 = \text{Id}$   
 c) Hallar  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $A \neq \text{Id}$ , tal que  $A^3 = \text{Id}$  ¿Y en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?
18. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la t.l. definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

y sean las bases (ordenadas)  $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$  de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1))$  de  $\mathbb{R}^4$ .

- Calcular  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$
  - Calcular  $\text{Nu}(f)$  e  $\text{Im}(f)$
  - Calcular matrices  $Q \in GL(4, \mathbb{R})$  y  $P \in GL(3, \mathbb{R})$  tales que  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}P$  donde  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$  son las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$  respectivamente. ¿Cuáles son?
19. Sean  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3, w_4)$  bases (ordenadas) de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$  respectivamente. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la t.l. tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Hallar  $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ . ¿Cuáles son sus coordenadas en la base  $\mathcal{B}'$ ?
  - Hallar una base de  $\text{Nu}(f)$  y una base de  $\text{Im}(f)$ .
  - Describir el conjunto  $\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = w_1 - 3w_3 - w_4\}$ .
20. Sea  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

a) Determinar bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si  $A$  es la matriz de  $f$  en la base canónica,

1) ¿cuál es el rango de  $A$ ?

2) encontrar matrices  $Q, P \in GL(3, \mathbb{R})$  tales que

$$QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) ¿Existe una base  $\mathcal{B}''$  de  $\mathbb{R}^3$  para la cual  $[f]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ?

21. Decidir si las siguientes matrices  $A, B$  son equivalentes:

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$       b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

22. Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

a) Determinar  $P, Q, P', Q' \in GL(3, \mathbb{R})$  tales que

$$QAP = Q'A'P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Determinar  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  y bases  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{B}', \mathcal{C}'$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = A$  y  $[f]_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = A'$ .

23. Sean  $\mathcal{E}$  la base canónica y  $\mathcal{E}' = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$  y  $\mathcal{B}' = (w_1 + w_3, w_1 + 2w_2 + w_3, w_2 + w_3)$  bases de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [f]_{\mathcal{B}'\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar  $\mathcal{E}'$ .

24. Sea  $A \in K^{m \times n}$ ,  $\text{rg}(A) = s$  y sea  $T = \{X \in K^{n \times r} \mid A.X = 0\}$ . Calcular  $\dim T$ .

25. Sean  $A \in K^{m \times n}$  y  $B \in K^{n \times r}$ . Probar que  $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$  y  $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B)$ .

26. Dada  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

a) Calcular  $[f]_{\mathcal{B}}$  con  $\mathcal{B} = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$

- b) Probar que  $f$  es un automorfismo (calcular  $[f^{-1}]_{\mathcal{B}}$ )
- c) Exhibir una matriz  $P \in GL(3, \mathbb{R})$  tal que  $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$ . ¿Cuál es?
27. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sea  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  una base (ordenada) de  $V$ . Sea  $f \in \text{End}(V)$  definido por  $f(v_1) = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ ,  $f(v_2) = v_1 + v_2 + v_3$ ,  $f(v_3) = v_1 + v_2$ ,  $f(v_4) = v_1$ . Probar que  $f$  es un automorfismo, calcular  $[f^{-1}]_{\mathcal{B}}$  y calcular  $f^{-1}(v_1 - 2v_2 + v_4)$ .
28. Para las siguientes  $f \in \text{End}(V)$ , calcular  $[f]_{\mathcal{E}}$ , donde  $\mathcal{E}$  es la base canónica
- a)  $V = \mathbb{R}_4[X]$ ,  $f(P) = P'$ ,  $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$
- b)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f(A) = A^t$ ,  $\mathcal{E} = (E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22})$
- c)  $V = \mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial,  $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$ ,  $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ .
29. a) Sea  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  dada por  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$ . Probar que  $f$  es un proyector (i.e.  $f \circ f = f$ ) y encontrar una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  en la cual
- $$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- b) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Probar que existe una base  $B$  de  $V$  tal que

$$([f|_B]_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ y } i \leq \dim(\text{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

30. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  que cumple lo pedido
- a)  $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- b)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$
- c)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$

y en caso que sea posible encontrar una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $[f]_{\mathcal{B}}$  sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.

31. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sea  $f \in \text{End}(V)$ . Se dice que  $f$  es *nilpotente* si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k = 0$ .
- a) Probar que si  $f$  es nilpotente, entonces  $f$  no es ni monomorfismo ni epimorfismo.
- b) Si  $\dim(V) = n$ , entonces  $f$  es nilpotente  $\Leftrightarrow f^n = 0$   
(Sug: considerar las inclusiones  $\text{Nu}(f^i) \subseteq \text{Nu}(f^{i+1})$  y probar que son estrictas)
- c) Sea  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  una base de  $V$  y sea  $f$  definida por

$$f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_3, \dots, f(v_{n-1}) = v_n, f(v_n) = 0.$$

Probar que  $f$  es nilpotente (con  $f^n = 0$  y  $f^{n-1} \neq 0$ ) y calcular  $[f]_{\mathcal{B}}$ .

- d) Sea  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$  dada por  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ . Probar que  $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$  es una base de  $\mathbb{R}^4$  y  $f^4(e_1) = 0$ . Calcular  $[f]_{\mathcal{B}}$ .

- e) Sea  $V$  de dimensión  $n$ , y sea  $f \in \text{End}(V)$  tal que  $f^n = 0$  y  $f^{n-1} \neq 0$ . Probar que existe una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que la matriz  $[f]_{\mathcal{B}}$  es como en los incisos anteriores.
32. a) Sean  $A, A' \in K^{n \times n}$  matrices semejantes (i.e. existe  $C \in GL(n, K)$  tal que  $A = C.A'.C^{-1}$ ). Probar que  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A')$ .
- b) Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  en  $R^{3 \times 3}$ .  
¿Existe  $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  y bases  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $|f|_B = A$  y  $|f|_{B'} = A'$ ?
- c) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $\mathcal{B}$  una base (ordenada) de  $V$ . Se define  $\text{tr} : \text{End}(V) \rightarrow K$  como la aplicación dada por  $\text{tr}(f) = \text{tr}([f]_{\mathcal{B}})$ . Probar que  $\text{tr}(f)$  no depende de la base ordenada  $\mathcal{B}$  elegida. ( $\text{tr}(f)$  se llama la *traza* del endomorfismo  $f$ ).
- d) Probar que  $\text{tr} : \text{End}(V) \rightarrow K$  definida en el inciso (c) es una transformación lineal.