

ALGEBRA LINEAL - Primer Cuatrimestre 2013**Práctica 2 - Espacios vectoriales**

1. Sea V un espacio vectorial sobre K , $k \in K$, $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

- a) $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$,
 b) $k \cdot v = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$,
 c) $-(-v) = v$,
 d) $-\vec{0} = \vec{0}$.

2. Probar que el conjunto $\mathbb{R}_{>0}$ es un \mathbb{Q} -espacio vectorial con la suma \oplus y el producto por escalares \otimes definidos por:

$$a \oplus b = a \cdot b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (m/n) \otimes a = a^{m/n}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_{>0}, m/n \in \mathbb{Q}.$$

3. Encontrar un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^2 que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.

4. Mostrar que los siguientes son espacios vectoriales, verificando que son subespacios de espacios vectoriales conocidos. Explicitar la suma y el producto por escalares en cada caso.

- a) $K_n[X] := \{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$
 b) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$
 c) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' + 3f' = 0\}$
 d) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x) dx = 0\}$
 e) $K^{(\mathbb{N})} := \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0, \forall k \geq n\}$.

5. Mostrar que $\{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \geq 2\}$ no es un subespacio de $K[X]$.

6. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T \text{ ó } T \subseteq S$.

7. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes K -espacios vectoriales

- a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$, $K = \mathbb{Q}$,
 b) $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = -A^t\}$, $K = \mathbb{R}$,
 c) $\{A \in \mathbb{C}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$, $K = \mathbb{C}$,
 d) $K_n[X]$,
 e) $\{f \in R_4[X] : f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$, $K = \mathbb{R}$,
 f) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$, $K = \mathbb{R}$,
 g) \mathbb{C}^n , $K = \mathbb{R}$.

8. Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\} = \langle \sin x, \cos x \rangle$.

(Sugerencia: Probar que si $f'' + f = 0$, entonces $f'(x) \cos x + f(x) \sin x$ es una función constante, cuyo valor es $f(\frac{\pi}{2})$. Deducir que $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2}) \sin x}{\cos x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

9. Sea V un K -espacio vectorial y sean $v, w \in V$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

- a) $\langle v, w \rangle = \langle v, w + 5v \rangle$.
- b) $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a, b \in K$.
- c) $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a \in K - \{0\}, b \in K$.
- d) $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$.
- e) $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \Leftrightarrow w \in \langle v_1, v_2 \rangle$.

10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K .

- a) $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ en \mathbb{C}^2 para $K = \mathbb{R}$ y para $K = \mathbb{C}$.
- b) $\{(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1\}$ en $K[X]$
- c) $\{\sin x, \cos x, x \cos x\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$
- d) $\{e^x, x, e^{-x}\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$
- e) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots), v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots), w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ en $K^{\mathbb{N}}$

11. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos es linealmente independiente.

- a) $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\} \subset \mathbb{R}^3$
- b) $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$
- c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

12. Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R} \iff \{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{C} .

13. Hallar una base y la dimensión de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales.

- a) $\langle (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) \rangle$
- b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
- c) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f(-1)\}$
- d) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f'(2) = 0\}$
- e) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = a_j, \forall i, j\}$

14. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n \times n}$ y calcular su dimensión.

- a) $\{A \in K^{n \times n} / A = A^t\}$ (matrices simétricas)
- b) $\{A \in K^{n \times n} / A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas), $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} ,
- c) $\{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)
- d) $\{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)
- e) $\{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = \dots = A_{nn}\}$ (matrices escalares)
- f) $\{A \in K^{n \times n} / \text{tr}(A) = 0\}$

15. Para cada una de las matrices A siguientes sobre \mathbb{R} , determinar su espacio fila $E_F(A)$, su espacio columna $E_C(A)$, su espacio nulo $N(A)$, el rango fila $\text{rg}_F(A)$, el rango columna $\text{rg}_C(A)$ y la dimensión de $N(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

16. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K -espacio vectorial V indicado.

- a) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$
 b) $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$
 c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{R}$.

17. Extraer una base de los siguientes K -espacios vectoriales, de cada uno de los sistemas de generadores dados.

- a) $\langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$
 b) $\langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subset \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$
 c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$

18. Hallar la dimensión de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales, para cada $k \in \mathbb{R}$

- a) $\langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle$
 b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
 c) $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

19. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$$

20. Dados los subespacios $S = \langle (1, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \rangle$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}$ de \mathbb{R}^4 , hallar un subespacio $U \subset \mathbb{R}^4$ de dimensión 2 que satisface $S \cap T \subset U \subset T$.

21. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V . Determinar si la suma es directa.

- a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$
 b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$
 c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ y $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$
 d) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$

- e) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = f''(0) = 0\}$
22. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$.
23. En cada caso siguiente, probar que S y T son subespacios del K -espacio vectorial V que satisfacen $S \oplus T = V$.
- a) $V = K^K$, $S = \{f \in K^K : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in K^K : f \text{ es constante}\}$
- b) $V = K^{n \times n}$, $S = \{A \in K^{n \times n} : A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n \times n} : A = -A^t\}$ para K un cuerpo tal que $2 \neq 0$ en K .
24. Para cada subespacio $S \subseteq V$ dado, hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$.
- a) $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$, $V = \mathbb{R}^4$
- b) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$
- c) $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$
25. Mostrar que si S, T son subespacios de \mathbb{R}^3 tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.
26. Sea V un K -espacio vectorial y sean S, T y U subespacios de V .
- a) Probar que $(S \cap T) + (S \cap U) \subseteq S \cap (T + U)$.
- b) Mostrar que, en general, la inclusión anterior es estricta.
- c) Probar que, si $U \subseteq S$, entonces vale la igualdad en i).
27. Sean S, T y U subespacios de un K -espacio vectorial V tales que
- $$S \cap T = S \cap U, \quad S + T = S + U \quad \text{y} \quad T \subseteq U.$$
- Probar que $T = U$.
28. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (i.e. un subespacio de dimensión $n - 1$).
- a) Probar que $\forall v \notin T, T \oplus \langle v \rangle = V$.
- b) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.
- c) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.
29. Determinar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base \mathcal{B} en los siguientes casos:
- a) $V = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$, $v = (1, 2, -1)$ y $v = (x_1, x_2, x_3)$
- b) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B} = \{3, X + 1, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$, $v = 2X^2 - X^3$
- c) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$