ALGEBRA LINEAL - Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 1 - Matrices, sistemas de ecuaciones lineales, matrices elementales

(En todas las prácticas, K es un cuerpo; en general $K = \mathbb{Q}$ (los números racionales), $\mathbb{R}$ (los números reales) o $\mathbb{C}$ (los números complejos))

1. Cuando sea posible, calcular $A + 2B$, $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

   d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Hallar contraejemplos para las siguientes afirmaciones:

   a) $(AB)^2 = A^2B^2$,

   b) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$,

   c) $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$,

   d) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$,

   e) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = \mathrm{Id}_n$,

   f) $A^j = 0$ para algún $j \geq 2 \Rightarrow A = 0$,

   g) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

   h) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

   ¿Cuándo valen las últimas dos igualdades?

3. Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = -\mathrm{Id}_2$.

4. Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B, el producto AB tiene una fila de ceros? (siempre que AB esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

5. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $e_i \in K^n$ el vector columna que tiene un 1 en el lugar i y 0 en los otros lugares. Calcular $A\,e_i$.

6. Hallar las matrices $A \in K^{3\times 3}$ tales que para cada $B \in K^{3\times 3}$ vale $AB = BA$.

7. Sean $A, B \in K^{n\times n}$.

   a) Probar que si A y B son triangulares superiores, entonces AB es triangular superior.

   b) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), entonces $A^n = 0$.

8. *a*) Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times p}$. Probar que $(AB)^t = B^tA^t$.

   b) Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$. Probar que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

9. *a*) Sea $A \in K^{m\times n}$. Probar que $AA^t \in K^{m\times m}$ y $A^tA \in A^{n\times n}$ son matrices simétricas. Encontrar un ejemplo con $m = n$ donde $AA^t \neq A^tA$.

b) Sean $A, B \in K^{n\times n}$ matrices simétricas. ¿Puede AB no ser simétrica?

c) Para $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff AA^t = 0 \iff \mathrm{tr}(AA^t) = 0$.

10. *a*) Probar que si $A \in K^{m\times n}$ satisface que $A\,x = 0, \forall\, x \in K^n$, entonces $A = 0$.

    b) Probar que si $A, B \in K^{m\times n}$ satisfacen que $A\,x = B\,x, \forall\, x \in K^n$, entonces $A = B$.

11. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

    a) $A,\, B \in GL(n, K) \;\Rightarrow\; A + B \in GL(n, K)$,

    b) $\mathrm{tr}(A) = 0 \;\Rightarrow\; A \notin GL(n, K)$,

    c) A nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \;/\; A^j = 0) \Rightarrow\; A \notin GL(n, K)$.

12. Sea $A \in GL(m, K)$ y sean $B,\, C\, \in K^{m\times n}$. Probar:

    a) $AB = AC \;\Rightarrow\; B = C$ *b*) $AB = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$.

13. Sea $A \in GL(n, K)$. Probar que $A^t \in GL(n, K)$ y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

14. Si $A \in K^{n\times n}$ tiene una fila o una columna de ceros, ¿puede ser inversible?

15. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{R}$, y los sistemas homogéneos asociados. Cambia algo si se resuelven sobre $\mathbb{C}$ o sobre $\mathbb{Q}$?

    a) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = \;\; 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = \; -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = \;\; 1 \end{cases}$$

    c) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = \; 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = \; 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = \; 0 \end{cases}$$

    b) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = \; 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = \; 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = \; 4 \end{cases}$$

    d) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = \; 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = \; 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = \; 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = \; 3 \end{cases}$$

    Verificar que en cada caso, la solución general del sistema no homogéneo se obtiene a partir de una solución particular sumándole la solución general del sistema homogéneo asociado.

16. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$.

17. Resolver sobre $\mathbb{C}$ el sistema
    $$\begin{cases} ix_1 - (1 + i)x_2 & = \; 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = \; 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 & = \; 0 \end{cases}$$

18. Determinar los valores de $\alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema tiene solución:
    $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = \; \alpha \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = \; \beta \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = \; \gamma \end{cases}$$

19. Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ cada uno de los sistemas siguientes tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones. En el caso de los sistemas homogéneos, si la solución es única, ¿cuál es?

$a)$ $\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ (a+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (a^2-4)x_3 = 0 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$

20. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$. Probar que $Ax = b$ tiene una única solución si y solo si la matriz escalón reducida correspondiente a A es la matriz identidad. Deducir que $Ax = b$ tiene una única solución si y solo si A es inversible. (En cuyo caso esa única solución es $x = A^{-1}b$.)

21. Decidir si (o cuándo) las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas. Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b)$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$d)$ $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$e)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f)$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$