

---

# ÁLGEBRA II

## Primer Cuatrimestre — 2013

### Práctica 9

---

En esta práctica, un  $A$ -módulo será un  $A$ -módulo a izquierda.

1. Pruebe que los siguiente módulos son sumandos directos de módulos libres (y por lo tanto módulos proyectivos), pero no son libres.
  - a)  $\mathbb{Z}_3$  como  $\mathbb{Z}_6$ -módulo.
  - b) El ideal  $\langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  como  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ -módulo.
2. Sea  $M = \mathbb{Z}_6$  como  $\mathbb{Z}_{12}$ -módulo. Encuentre  $\mathbb{Z}_{12}$ -módulos  $B$  y  $C$ , un homomorfismo sobreyectivo  $\phi : B \rightarrow C$  y un homomorfismo  $f : M \rightarrow C$  tales que no exista un homomorfismo  $\mu : M \rightarrow B$  con  $f = \phi\mu$ . Concluya que  $M$  no es proyectivo.

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \mu \swarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{\phi} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

3.
  - a) (Lema de Nakayama) Sea  $Q$  un anillo local con ideal maximal  $\mathcal{M}$  y sea  $M$  un  $Q$ -módulo finitamente generado. Pruebe que si  $\mathcal{M}M = M$ , entonces  $M = 0$ .
  - b) Sea  $F = \{f_1, \dots, f_s\}$  un conjunto de elementos de  $M$ . Pruebe que  $F$  puede extenderse a un conjunto minimal de generadores de  $M$  si y solo si en el espacio vectorial  $M/\mathcal{M}M$ , las imágenes  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s$  son linealmente independientes.
  - c) Sea  $Q$  un anillo local y  $M$  un  $Q$ -módulo proyectivo finitamente generado. Pruebe que  $M$  es libre.
  - d) Sea  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ . Pruebe que  $M$  es un  $R$ -módulo proyectivo si y solo si  $M_p$  es un  $R_p$ -módulo proyectivo (y por lo tanto libre, por el ítem c) para todo  $p \in k^n$ .
4. Sea  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:
  - a) Si  $M$  es libre, entonces es sin torsión.
  - b) Si  $A$  es íntegro entonces  $M$  libre  $\Rightarrow M$  sin torsión.
  - c) Si  $f : M \rightarrow N$  es un morfismo de  $A$ -módulos y  $M$  es de torsión entonces  $\text{Im}(f)$  es de torsión.
  - d) Si  $f : M \rightarrow N$  es un morfismo de  $A$ -módulos y  $M$  es sin torsión entonces  $\text{Im}(f)$  es sin torsión.

- e) Si  $A$  es conmutativo y  $N$  es sin torsión entonces  $\text{Hom}_A(M, N)$  es sin torsión.
- f) Si  $A$  es conmutativo,  $M$  es de torsión y  $N$  es sin torsión entonces  $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ .
5. Calcule  $t(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  (la torsión de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}$ -módulo).
6. Sea  $A$  un dominio principal que no es un cuerpo y sea  $M$  un  $A$ -módulo. Pruebe:
- Sea  $p \in A$  un irreducible y  $a \in A - \{0\}$ . Entonces  $(A/\langle a \rangle)[p] \simeq A/\langle p^n \rangle$  donde  $n = \max\{k \in \mathbb{N}_0 / p^k | a\}$ .
  - $M$  es simple  $\iff \exists p \in A$  irreducible tal que  $M \simeq A/\langle p \rangle$ .
  - $M$  es un  $A$ -módulo sin torsión  $\iff \text{Hom}_A(S, M) = 0$  para todo  $A$ -módulo simple  $S$ .
7. Sea  $A$  un dominio principal y sea  $M$  un  $A$ -módulo de tipo finito (es decir finitamente generado). Pruebe:
- $M$  es de torsión  $\iff \text{Hom}_A(M, A) = 0$ .
  - $M$  es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios)  $\iff M \simeq A$  o  $\exists p \in A$  irreducible y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $M \simeq A/\langle p^n \rangle$ .
8. Sea  $A$  un dominio principal y sea  $M$  un  $A$ -módulo. Pruebe:
- Si  $M$  es de tipo finito y  $S$  es un submódulo libre de  $M$  tal que  $M/S$  es sin torsión, entonces  $M$  es libre.
  - Si  $M$  no es de torsión y  $M/S$  es de tipo finito con torsión para todo submódulo  $S \neq 0$  de  $M$ , entonces  $M \simeq A$ . Análogamente, si  $G$  es un grupo infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito,  $G \simeq \mathbb{Z}$ .
9. Sea  $p$  un primo positivo. Clasifique todos los grupos abelianos de orden  $p^3$ ,  $p^4$  y  $p^5$ .
10. Clasifique los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.
11.
  - Sea  $G$  un grupo abeliano finito y sea  $p$  un primo positivo que divide al orden de  $G$ . Pruebe que el número de elementos de orden  $p$  en  $G$  es coprimo con  $p$ .
  - Para cada grupo abeliano  $G$  de orden  $p^2q^2$  (donde  $p$  y  $q$  son primos distintos) determine cuántos elementos de orden  $pq$  y cuántos elementos de orden  $pq^2$  hay en  $G$ .
12. Caracterice los grupos abelianos finitamente generados tales que:
- Todo subgrupo propio de  $G$  es cíclico.
  - Todo subgrupo propio de  $G$  es de orden primo.
  - $G$  posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.

- d)  $G$  posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.  
 e) Todo subgrupo propio no nulo de  $G$  es maximal.  
 f) Para todo par de subgrupos  $S$  y  $T$  de  $G$ ,  $S \subseteq T$  o  $T \subseteq S$ .  
 g) El orden de todo elemento no nulo de  $G$  es primo.  
 h)  $G/S$  es cíclico para todo subgrupo  $S$  no nulo de  $G$ .  
 i) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.
13. Calcule los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los siguientes grupos abelianos:
- a)  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$ .  
 b)  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$ .  
 c)  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$ .  
 d)  $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$ .  
 e)  $G$  un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.  
 f)  $G$  un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ .
14. Determine los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:
- a)  $G = \langle a, b, c \rangle$ ;  $2a + 3b = 0$ ;  $2a + 4c = 0$   
 b)  $G = \langle a, b, c \rangle$ ;  $a = 3b$ ;  $a = 3c$   
 c)  $G = \langle a, b, c \rangle$ ;  $3a = -c$ ;  $3a = 3c - 8b$   
 d)  $G = \langle a, b, c \rangle$ ;  $3a = b$ ;  $b = 3c$
15. Calcule los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes:
- a)  $\mathbb{Z}^4/S$  con  $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 / m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0, m_1 + m_2 - 2m_3 = 0\}$ .  
 b)  $\mathbb{Z}^3/S$  con  $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 / m_1 \text{ es par}, m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$ .  
 c)  $\mathbb{Z}^3/S$  con  $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 / m_1 = m_2 + m_3 \text{ es par}, 3|m_3\}$ .
16. Sean  $p, q$  y  $r$  primos positivos. Determine la cantidad de grupos no isomorfos de orden  $n$ , en cada uno de los siguientes casos:
- a)  $n = p^6 q^3 r$ .  
 b)  $n = p^2 q^4 r^5$ .  
 c)  $n = p^3 q^4$ .
17. a) Sea  $G$  un grupo abeliano de orden  $n$ . Pruebe que si  $d$  es un divisor de  $n$ ,  $G$  posee subgrupos y grupos cocientes de orden  $d$ .  
 b) Sea  $n \in \mathbb{N}$ . ¿Para qué divisores  $d$  de  $n$  existe un grupo abeliano de orden  $n$  y exponente  $d$ ?

- c) Caracterice los grupos abelianos finitos de orden menor o igual que 100 de exponente 9, 20 y 21.
- d) Sea  $G$  un grupo abeliano y sea  $x \in G$  un elemento tal que  $\text{ord}(x) = \exp(G)$ . Pruebe que  $\langle x \rangle$  es un sumando directo de  $G$ .
18. Caracterice todos los  $\mathbb{Z}[i]$ -módulos de 5, 6, 21 y 65 elementos.
19. Caracterice los  $\mathbb{K}[X]$ -módulos de dimensión 1, 2 y 3 sobre  $\mathbb{K}$ , para  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Comparar.
20. Encuentre los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los  $\mathbb{K}[X]$ -módulos definidos por las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada matriz analizar  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  por separado.