
ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2013

Práctica 8

En esta práctica, un A -módulo será un A -módulo a izquierda.

1. Determine si M es un A -módulo en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{Z}_n$, $M = \mathbb{Z}_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, con la suma usual de \mathbb{Z}_m y la acción

$$a \cdot x = r_m(ax).$$

b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_2(\mathbb{C})$, con la suma usual de matrices y la acción

$$a \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot z_{11} & a \cdot z_{12} \\ a \cdot z_{21} & a \cdot z_{22} \end{pmatrix}.$$

c) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, con la suma usual de \mathbb{R}^n y la acción

$$f \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (f(1) \cdot x_1, f(0) \cdot x_2, \dots, f(0) \cdot x_n).$$

d) $A = M_n(\mathbb{Z})$, $M = \mathbb{Z}$, con la suma usual de \mathbb{Z} y la acción

$$a \cdot m = \det(a) \cdot m.$$

2. Sean A y B anillos, M un B -módulo y $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Pruebe que la acción $a \cdot_\varphi x = \varphi(a) \cdot x$ define una estructura de A -módulo sobre M .

3. Determine si S es un submódulo del A -módulo M en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{Q}$, $M = M_n(\mathbb{Q})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}) : a_{ii} = 0 \forall 1 \leq i \leq n\}$.

b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}) : \det(a_{ij}) = 0\}$

c) A un anillo cualquiera, $M = A^n$, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

d) A un anillo cualquiera, $M = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Sean A un anillo conmutativo, $a \in A^{n \times m}$ y $f_a : A^{m \times 1} \rightarrow A^{n \times 1}$ la aplicación definida por $f_a(x) = a \cdot x$, donde \cdot es el producto de matrices. Pruebe que es un morfismo de A -módulos.

5. Sean A un anillo conmutativo y M un A -módulo. En cada uno de los siguientes casos, pruebe que f es un morfismo de A -módulos, determine su núcleo, su imagen y si es inyectivo, sobreyectivo o isomorfismo:

- a) $f : M^n \longrightarrow M^2, f(x) = (x_1 + x_n, x_n) \ (n > 2)$.
- b) $f : M^n \longrightarrow M^n, f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n)$.
- c) Si $n \leq m, f : M^n \longrightarrow M^m, f(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.
- d) Si $n \leq m, f : M^m \longrightarrow M^n, f(x) = (x_1, \dots, x_n)$.
- e) Fijo $a \in A, f : A[X] \longrightarrow A, f(p) = p(a)$.
- f) $f : M_n(A) \longrightarrow A^n, f(a) = (a_{11}, \dots, a_{nn})$ si $a = (a_{ij})$.
- g) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x$.

6. Si M y N son conjuntos y $f : M \longrightarrow N$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in M\}$$

se llama el *gráfico* de f . Pruebe que si M y N son A -módulos entonces f es un morfismo de A -módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \oplus N$.

7. Sean A un anillo y M un A -módulo. Caracterice el módulo cociente N/S en cada uno de los siguientes casos:

- a) $N = M^n, S = \{x \in N : x_1 + \dots + x_n = 0\}$.
- b) $N = M^n \ (n > 2), S = \{x \in N : x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$.
- c) $N = A[X], S = \{f \in A[X] : f(1) = 0\}$.
- d) $N = M_n(A), S = \{(a_{ij} \in M_n(A) : a_{ii} = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n)\}$.
- e) $N = M^J, S = \{x \in N : x_i = 0 \ \forall i \in I\}$, donde I es un subconjunto fijo de J .

8. Sean V y W dos \mathbb{Q} -espacios vectoriales y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación. Pruebe que f es una transformación lineal de \mathbb{Q} -espacios vectoriales si, y sólo si, $f : (V, +) \longrightarrow (W, +)$ es un morfismo de grupos.

9. Sea A un anillo y sean M y N dos A -módulos. Pruebe que

- a) $\text{Hom}_A(M, N)$ con la suma definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es un grupo abeliano.
- b) Si A es conmutativo, la acción $(a.f)(x) = a.f(x)$ define sobre el grupo abeliano $\text{Hom}_A(M, N)$ una estructura de A -módulo. Para A no necesariamente conmutativo, esta acción define sobre $\text{Hom}_A(M, N)$ una estructura de $\mathcal{Z}(A)$ -módulo.

10. Sea A un anillo conmutativo. Dado un A -módulo M se llama *dual* de M al A -módulo $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$. Pruebe que la aplicación $\psi : M \longrightarrow M^{**}$ definida por $\psi(x)(f) = f(x)$ es un morfismo de A -módulos y que $\ker(\psi) = \bigcap_{f \in M^*} \ker(f)$.

11. Sea M un A -módulo. Pruebe que $\text{Hom}_A(A, M) \simeq M$ como $\mathcal{Z}(A)$ -módulos.

12. Pruebe que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.

13. Pruebe que un A -módulo M es simple si, y sólo si, $M \neq \{0\}$ y $A.x = M \forall x \in M$ tal que $x \neq 0$.
14. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Pruebe que:
 - a) Si M es simple entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.
 - b) Si N es simple entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.
 - c) Si M y N son simples entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo.
15. Sea M un A -módulo simple. Pruebe que el anillo $End_A(M)$ es un anillo de división.
16. Pruebe que los grupos abelianos \mathbb{Q}^* , \mathbb{R}^* , \mathbb{C}^* , $\mathbb{Q}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$ no son finitamente generados
17. Pruebe que todo módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.
18. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in M_n(A)$. Sea $v_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in A^n$. Pruebe que
 - a) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
 - b) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores de A^n si y sólo si $\det(A) \in \mathcal{U}(A)$.
19. Sea A un anillo y sea M un A -módulo. Pruebe que si todo conjunto no vacío de submódulos finitamente generados de M tiene un elemento maximal entonces M es Noetheriano
20. Sea A un anillo e I un ideal bilátero. Pruebe que si A es un anillo Noetheriano entonces A/I también lo es.
21. Dé un ejemplo de
 - a) Un A -módulo finitamente generado que no sea Noetheriano.
 - b) Un A -módulo tal que todo submódulo propio sea finitamente generado y que no sea Noetheriano.
22. Pruebe que
 - a) Un K -espacio vectorial V es Noetheriano si y sólo si $\dim_K(V) < \infty$.
 - b) Todo anillo principal a izquierda es Noetheriano a izquierda.
 - c) \mathbb{Z} y $K[X]$ (con K cuerpo) son anillos Noetherianos.
23. Sea A un anillo y sea M un A -módulo. Sea $f \in End_A(M)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = Ker(f^n)$, $I_n = Im(f^n)$. Pruebe que
 - a) $K_1 = K_2 \Rightarrow K_1 \cap I_1 = 0$.
 - b) $I_1 = I_2 \Rightarrow K_1 + I_1 = M$.
 - c) Si M es Noetheriano entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap I_n = 0$.
 - d) Si M es Noetheriano y f es un epimorfismo entonces f es un automorfismo.

24. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Pruebe que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es Noetheriano.
25. Sean $S \subset A$ un sistema multiplicativo y M un A -módulo finitamente generado. Pruebe que $S^{-1}M = 0$ si y sólo si $\exists s \in S$ tal que $sM = 0$.
26. Sean $S \subset A$ un sistema multiplicativo, M un A -módulo, N un $S^{-1}A$ -módulo, y $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Pruebe que existe un único morfismo de $S^{-1}A$ -módulos $\bar{f} : S^{-1}M \rightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
 S^{-1}M & &
 \end{array}$$

27. a) Sean $S \subset A$ un sistema multiplicativo, M un A -módulo y N un submódulo de M . Pruebe que la aplicación $S^{-1}N \rightarrow S^{-1}M$ inducida por la inclusión $N \subset M$ es inyectiva. (Esto permite pensar a $S^{-1}N$ como un $S^{-1}A$ -submódulo de $S^{-1}M$.)
- b) Sean M un A -módulo y $N_1, N_2 \subset M$ submódulos. Pruebe que
- 1) $S^{-1}(N_1 + N_2) = S^{-1}N_1 + S^{-1}N_2$.
 - 2) $S^{-1}(N_1 \cap N_2) = S^{-1}N_1 \cap S^{-1}N_2$.