Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2013
Práctica 7

En todos los ejercicios de esta práctica los anillos son anillos conmutativos con unidad.

1. Sea $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Pruebe que $S^{-1}A = 0$ si y sólo si $0 \in S$.
2. Sea $S \subset A^\times$ un sistema multiplicativo de unidades de A. Pruebe que $S^{-1}A \simeq A$.
3. Sean $f \in A$ y $S = \{1, f, f^2, f^3, \dots\}$. Denotamos A_f al anillo $S^{-1}A$. Pruebe que
$$A_f \simeq A[x]/(xf - 1).$$
4. Sean $S \subset A$ un sistema multiplicativo, B un anillo y $f : A \to B$ un morfismo de anillos tal que $f(s)$ es una unidad para todo $s \in S$. Pruebe que existe un único morfismo de anillos $\bar{f}$ que hace conmutar el siguiente diagrama.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$
5. Sean $S, T \subset A$ dos sistemas multiplicativos, y sea U la imagen de T por la aplicación canónica $A \to S^{-1}A$. Pruebe que los anillos $(ST)^{-1}A$ y $U^{-1}(S^{-1}A)$ son isomorfos.
6. *a*) Sea p un ideal primo de A. Muestre que $S := A - p$ es un sistema multiplicativo. Notamos A_p al anillo $S^{-1}A$.
   b) Caracterice el anillo $(\mathbb{Z}_{12})_p$ con $p = (3)$.
7. *a*) Sea $A = C(\mathbb{R}^n)$ el anillo de funciones continuas $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $S = \{f \in A : f(x_0) \neq 0\}$. Pruebe que S es un sistema multiplicativo. ¿Es inyectiva la aplicación $A \to S^{-1}A$? De no serlo, describa su núcleo.
   b) Supongamos que A es un dominio, y sea $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Pruebe que $A \to S^{-1}A$ es inyectiva.
   c) Si A es cualquier anillo conmutativo con unidad y $S \subset A$ es un sistema mutiplicativo, dé condiciones necesarias y suficientes para que $A \to S^{-1}A$ sea inyectiva.