Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2013

Práctica 5

1. Pruebe que los siguientes conjuntos, con las operaciones definidas tienen estructura de anillo:

   a) $(A^{n\times n}, +, \cdot)$ (matrices de $n \times n$, A anillo conmutativo).

   b) $(A[X_1, ..., X_n], +, \cdot)$; polinomios en n variables, A anillo conmutativo.

   c) $(A^X = \{f : X \to A\}, +, \cdot)$; A anillo, X conjunto, $+$ y $\cdot$ punto a punto.

   d) $A_1 \times \ldots \times A_n$; $A_1, \ldots, A_n$ anillos, suma y producto coordenada a coordenada.

   e) $\{\mathcal{P}(X), \triangle, \cap\}$ con X conjunto.

   f) $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g\in G} a_g \cdot g \ / \ a_g \in \mathbb{Z}\}$ con G grupo finito y
   $$\sum a_g \cdot g + \sum b_g \cdot g = \sum (a_g + b_g) \cdot g$$
   $$\left(\sum a_g \cdot g\right) . \left(\sum a_h \cdot h\right) = \sum a_g b_h \cdot gh$$

   g) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ con $d \in \mathbb{Z}$, d libre de cuadrados.

   h) $(End(G), +, \circ)$; G grupo abeliano, $+$ punto a punto y $\circ$ la composición de morfismos.

   Determine cuáles son conmutativos, cuáles son dominios íntegros, anillos de división, cuerpos.

2. Dé ejemplos de

   a) anillo de división que no sea cuerpo.

   b) anillo que no sea íntegro.

   c) anillo íntegro que no sea de división.

3. ¿Existe algún producto $\cdot$ que haga de $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ un cuerpo? ($+$ es la suma usual)

4. Sea $A = \mathcal{C}[0, 1]$ el anillo de funciones reales continuas definidas en $[0, 1]$.

   a) ¿Hay divisores de cero en A?

   b) ¿Cuáles son los elementos inversibles en A?

5. Sea A un anillo con identidad 1.

    a) Pruebe que $\mathcal{U}(A) = \{a \in A \ : a \text{ es inversible}\}$ es un grupo multiplicativo.
    b) Encuentre $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ para $m = 3, 4, 5, 6, 8$.
    c) ¿Cuál es el orden de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$?
    d) ¿Es $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8) \simeq \mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$?

6. Consideremos el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

    a) Pruebe que en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ la escritura es única. Es decir que si $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ entonces $a = c$ y $b = d$.
    b) Sea $N : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función (norma) definida por $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$. Pruebe que es multiplicativa.
    c) Pruebe que $2 + \sqrt{3}$ es una unidad.
    d) Pruebe que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es una unidad si, y sólo si, $N(z) = 1$ ó $N(z) = -1$.
    e) Encuentre otras unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

7. Caracterice el grupo de unidades de:
    $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}$ cuerpo, $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], B[X]$ con B dominio íntegro.

8. Sea D un dominio de integridad finito. Pruebe que D es un cuerpo.

9. Encuentre todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$.

10. Pruebe que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo entonces $\mathbb{K}[X]$ es un dominio principal. ¿Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?

11. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Pruebe que

    a) $\operatorname{im}(f)$ es un subanillo de B
    b) $\ker(f)$ es un ideal de A
    c) $A/_{\ker(f)} \simeq \operatorname{im}(f)$ (como anillos)

12. Sea A un anillo. Pruebe que A es un anillo de división si, y sólo si, los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A.

13. Sean A un anillo conmutativo e $\mathcal{I}$ un ideal de A. Pruebe que $\mathcal{I}$ es un ideal primo de A si y sólo si $A/_{\mathcal{I}}$ es un dominio íntegro.

14. Pruebe que en un anillo conmutativo todo ideal maximal es primo.

15. Sea A un anillo conmutativo y sea $\mathcal{M}$ un ideal de A. Pruebe que $\mathcal{M}$ es maximal si y sólo si $A/_{\mathcal{M}}$ es un cuerpo.

16. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $f \in \mathbb{K}[X]$. Pruebe que $\mathbb{K}[X]/_{\langle f \rangle}$ es un cuerpo, si y sólo si, f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$. ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza el cuerpo $\mathbb{K}$ por un anillo conmutativo A?

17. Pruebe que $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2+1\rangle \simeq \mathbb{Z}[i]$.

18. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Pruebe que los únicos ideales biláteros de $M_2(\mathbb{K})$ son 0 y $M_2(\mathbb{K})$. ¿Es $M_2(\mathbb{K})$ un anillo de división?

19. Sea A un anillo. Pruebe que existe un subanillo $B \subset A$ tal que $B \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.

20. Pruebe que $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+i\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$.

    Caracterice el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+2i\rangle$.

21. Pruebe que si $\mathcal{I}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$ entonces $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}$.

22. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Pruebe que $\mathbb{Z}[X]/\langle p\rangle \simeq \mathbb{Z}_p[X]$.

23. Sean A un anillo e $\mathcal{I}$ un ideal de A. Pruebe que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de $A/\mathcal{I}$ y los ideales de A que contienen a $\mathcal{I}$.

24. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Pruebe que $\langle p\rangle$ es un ideal primo en $\mathbb{Z}[i]$ si, y sólo si, -1 no es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$.

25. Pruebe que todo morfismo de anillos que sale de un cuerpo es inyectivo.

26. Encuentre las unidades de $\mathbb{Z}[X]/\langle X^3\rangle$.

27. Pruebe que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un morfismo de cuerpos entonces $f = id$.

28. Encuentre todos los morfismos de cuerpos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.