Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2013
Práctica 4 (opcional)

El objetivo de esta práctica es demostrar que si $n \geq 5$ entonces el grupo alternado $\mathbb{A}_n$ es simple. Si G es un grupo y $g \in G$, escribimos g^G para denotar a la clase de conjugación de g en G.

1. Sean G un grupo y $g \in G$. Demuestre que $|g^G| = (G : C_G(g))$, donde $C_G(g)$ es el centralizador de g en G.

2. Sea $\sigma \in \mathbb{A}_n$.

   a) Pruebe que $C_{\mathbb{A}_n}(g) = \mathbb{A}_n \cap C_{\mathbb{S}_n}(g)$. En particular $C_{\mathbb{A}_n}(g) = C_{\mathbb{S}_n}(g)$ si y sólo si $C_{\mathbb{S}_n}(g) \subseteq \mathbb{A}_n$.

   b) Pruebe que $C_{\mathbb{S}_n}(g)/C_{\mathbb{A}_n}(g) \simeq (\mathbb{A}_n C_{\mathbb{S}_n}(g))/\mathbb{A}_n$. Concluya que si $(C_{\mathbb{S}_n}(g) : C_{\mathbb{A}_n}(g)) \neq 2$ entonces $C_{\mathbb{S}_n}(g) = C_{\mathbb{A}_n}(g)$.

   c) Pruebe que si $(C_{\mathbb{S}_n}(g) : C_{\mathbb{A}_n}(g)) = 2$ entonces $g^{\mathbb{S}_n} = g^{\mathbb{A}_n}$.

   d) Pruebe que si $C_{\mathbb{S}_n}(g) = C_{\mathbb{A}_n}(g)$ entonces $|g^{\mathbb{S}_n}| = 2|g^{\mathbb{A}_n}|$.

3. *a*) Pruebe las siguientes afirmaciones:

      1) Si g es la identidad entonces $|g^{\mathbb{A}_5}| = 1$.
      2) Si g es un 3-ciclo entonces $|g^{\mathbb{A}_5}| = 20$.
      3) Si g es un 5-ciclo entonces $|g^{\mathbb{A}_5}| = 12$.
      4) Si g es un producto de dos trasposiciones entonces $|g^{\mathbb{A}_5}| = 15$.

   b) Sea $H \triangleleft \mathbb{A}_5$. Pruebe que existen enteros r, t, s tales que $0 \leq r, t \leq 1$, $0 \leq s \leq 2$ tales que $|H| = 1 + 20r + 12s + 15t$.

   c) Pruebe que $\mathbb{A}_5$ es simple.

4. Sea $\sigma \in \mathbb{S}_n$ un 3-ciclo.

   a) Pruebe que existe una trasposición que conmuta con σ y concluya que $C_{\mathbb{S}_n}(\sigma) \nsubseteq \mathbb{A}_n$.

   b) Pruebe que $\sigma^{\mathbb{S}_n} = \sigma^{\mathbb{A}_n}$.

   c) Pruebe que si $H \triangleleft \mathbb{A}_n$ y H contiene un 3-ciclo entonces $H = \mathbb{A}_n$.

5. Sea $1 \neq H \triangleleft \mathbb{A}_6$.

   a) Suponga que para todo $\sigma \in H$ se sabe que $\sigma(i) \neq i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pruebe que H solo puede contener productos de dos 3-ciclos. Deduzca que $|H| = 1 + 20t$ para algún $t \in \mathbb{N}$ y que, como esto contradice el teorema de Lagrange, existen $1 \neq \sigma \in H$, $i_0 \in \{1, \ldots, 6\}$ tales que $\sigma(i_0) = i_0$.

b) Sea $T = \{p \in \mathbb{S}_6 \mid p(i_0) = i_0\}$. Observe que $T \simeq \mathbb{S}_5$ y demuestre que $1 \neq H \cap T \lhd \mathbb{A}_6 \cap T \simeq \mathbb{A}_5$. Concluya que $H \cap T = T \cap \mathbb{A}_6$.

c) Pruebe que H contiene un 3-ciclo y que $H = \mathbb{A}_6$.

d) Pruebe que $\mathbb{A}_6$ es simple.

6. Sea $n \geq 7$ y sea $1 \neq H \lhd \mathbb{A}_n$.

a) Sea $1 \neq \sigma \in H$. Pruebe que existe un 3-ciclo τ que no conmuta con σ.

b) Pruebe que el conmutador $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ mueve a lo sumo seis elementos $i_1, i_2, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, n\}$.

c) Sea $T = \{p \in \mathbb{S}_n \mid p(i) = i \text{ para todo } i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_6\}\}$. Observe que $T \simeq \mathbb{S}_6$ y pruebe que $\mathbb{A}_n \cap T \simeq \mathbb{A}_6$.

d) Use que $\mathbb{A}_6$ es simple y deduzca que $H \cap T = \mathbb{A}_n \cap T$.

e) Pruebe que, como $T \subseteq H$ y H contiene un 3-ciclo, $H = \mathbb{A}_n$.

f) Pruebe que $\mathbb{A}_n$ es simple.