
ÁLGEBRA II
Primer Cuatrimestre — 2013
Práctica 3

1. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que $G = H \rtimes K$.
 - a) Demuestre que si $K \triangleleft G$ entonces $kh = hk, \forall h \in H, \forall k \in K$.
 - b) Deduzca que G es abeliano si y sólo si H y K son abelianos y $K \triangleleft G$.
2. Sea $n \geq 3$. Demuestre que \mathbb{S}_n y \mathbb{D}_n son isomorfos a productos semidirectos convenientes.
3. ¿Es \mathcal{H} isomorfo a algún producto semidirecto no trivial?
4. Determine si existe un grupo K tal que G sea el producto semidirecto de H y K en cada uno de los siguientes casos.
 - a) $G = \mathbb{C}^\times, H = S^1$
 - b) $G = G_{12}, H = G_3$
 - c) $G = G_{12}, H = G_2$
 - d) $G = \mathbb{C}, H = \mathbb{R}$
 - e) $G = GL(n, \mathbb{C}), H = SL(n, \mathbb{C})$
 - f) $G = \mathbb{S}_4, H = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$
5. Sean $H = \mathbb{Z}_3$ y $K = \mathbb{Z}_4$.
 - a) Describa todos los productos semidirectos $G = H \rtimes_\varphi K$.
 - b) Muestre que uno de estos es no abeliano y no isomorfo a \mathbb{A}_4 .
6. Demuestre en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X . En cada caso calcular ${}^G X$, las G -órbitas de X y el estabilizador de cualquier elemento de X .
 - a) $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}, X = \mathbb{R}$ y $f \cdot x = f(x)$
 - b) $G = \mathbb{R}^\times, X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a \cdot x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^\times$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$
 - c) $G = SL(2, \mathbb{Z}), X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$
7. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \triangleleft G$. Determine la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall a \in G \text{ y } x \in X$.
8. Sea X un conjunto finito. Determine el número posible de acciones de \mathbb{Z} sobre X .

9. Sea G un grupo.

- a) Demuestre que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{Z}(G) \neq 1$.
- b) Demuestre que si $G/\mathcal{Z}(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.
- c) Demuestre que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.
- d) Determine todos los grupos de orden p^2 .
- e) Muestre un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/\mathcal{Z}(G)$ sea abeliano.

10. Sea p un primo.

- a) Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Demuestre que $\mathcal{Z}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{Z}(G)|$.
- b) Calcule $[G, G]$ con $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

11. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H . Demuestre que entonces n es impar y $H \triangleleft G$.

12. Sea p primo y $|G| = n$. Demuestre que existe k tal que $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G, \text{ord}(x) = p^s$ para algún s . (s depende de x)

13. Calcule todos los p -subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{S}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{S}_3 \oplus \mathbb{S}_3.$$

14. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p - 1$. Demuestre que G es cíclico.

15. Sean p, q primos, $|G| = p^2q$. Demuestre que G no es simple.

16. Demuestre que no existen grupos simples de los siguientes órdenes: 30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540.

17. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \triangleleft G$. Demuestre

- a) $H_p H_q$ es subgrupo de G .
- b) $H_p H_q \triangleleft G \Rightarrow H_q \triangleleft G$.