

---

# ÁLGEBRA II

## Primer Cuatrimestre — 2013

### Práctica 2

---

- Sea  $G$  un grupo y  $H, K$  subgrupos de  $G$ .
  - ¿Será cierto que si  $H$  y  $K$  son subgrupos de  $G$  entonces  $HK$  es subgrupo de  $G$ ?
  - Pruebe que si  $H$  ó  $K$  es normal, entonces  $HK$  es un subgrupo.
  - Pruebe que si  $H$  y  $K$  son normales, entonces  $HK$  es un subgrupo normal.
- Determine cuáles de los siguientes subgrupos son normales
  - $G = \mathbb{D}_4, H = \{1, r, r^2, r^3\}$ .
  - $G = GL_n(\mathbb{C}), H = \mathcal{H}$ .
  - $G = GL_n(\mathbb{R}), H = SL_n(\mathbb{R})$ .
- Sea  $G$  es un grupo abeliano. Pruebe que todo subgrupo es normal. Pruebe que el grupo  $\mathcal{H}$  es un contraejemplo para la recíproca de esta afirmación.
- Dados los siguientes subgrupos de  $\mathbb{S}_4$ :
$$H = \{id, (1\ 2)(3\ 4)\} \quad K = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$
$$U = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$$
  - Pruebe que  $H \triangleleft K, K \triangleleft \mathbb{A}_4$  y  $K \triangleleft \mathbb{S}_4$ .
  - Pruebe que  $H$  no es normal en  $\mathbb{A}_4$  ni en  $\mathbb{S}_4$ .
  - Determine si  $U \triangleleft \mathbb{S}_4$ .
- Encuentre todos los subgrupos normales de  $G$ .
  - $G = \mathbb{D}_n$ , donde  $n$  es impar.
  - $G = \mathbb{D}_n$ , donde  $n$  es par.
- Sean  $G$  y  $G'$  grupos y sea  $f : G \rightarrow G'$  un morfismo. Pruebe que
  - $\ker(f) \triangleleft G$ . ¿Es cierto que  $\text{im}(f) \triangleleft G'$ ?
  - Si  $H$  es un subgrupo normal de  $G$ , existe un grupo  $G'$  y un epimorfismo  $f : G \rightarrow G'$  tal que  $\ker(f) = H$ .
- Sea  $G$  un grupo y  $H$  un subgrupo tal que  $|G : H| = 2$ . Pruebe que  $H \triangleleft G$ .
- Encuentre un sistema de representantes de  $G$  módulo  $S$  en los siguientes casos y determine  $|G : S|$

- a)  $G = \mathbb{R}, \quad S = \mathbb{Z}$
- b)  $G = \mathbb{D}_n, \quad S = \langle r \rangle$
- c)  $G = GL_n(K), \quad S = SL_n(K),$  donde  $K$  es un cuerpo.
- d)  $G = \mathbb{C}^\times, \quad S = S^1$

9. Calcule todos los cocientes de  $\mathbb{S}_3, \mathbb{D}_4$  y  $\mathcal{H}$ .

10. Calcule todos los cocientes de  $\mathbb{D}_n$ .

11. Pruebe que

- a)  $\frac{\mathbb{C}^\times}{\mathbb{R}_{>0}} \simeq S^1$
- b)  $\frac{\mathbb{Z}^\times}{m\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_m$
- c)  $\frac{\mathbb{Q}^\times}{\mathbb{Q}_{>0}} \simeq G_2$
- d)  $\frac{S^1}{G_n} \simeq S^1$
- e)  $\frac{G_n}{G_m} \simeq G_{\frac{n}{m}}$  para  $m \mid n$

12. Verifique que  $H \triangleleft G$  y calcular  $G/H$

- a)  $G = \mathbb{S}_4, \quad H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$
- b)  $G = \mathbb{D}_6, \quad H = \{1, r^3\}.$

13. a) Sea  $f : G \longrightarrow G'$  un epimorfismo y sea  $H \triangleleft G$ . Si  $H' = f(H)$ , demuestre que

- 1)  $H' \triangleleft G'$
- 2) Si  $f$  es un isomorfismo,  $G/H \simeq G'/H'$

b) ¿Qué pasa con  $G/H$  y  $G'/H'$  si  $G \simeq G', H \simeq H', H \triangleleft G$  y  $H' \triangleleft G'$ ?

14. Sea  $G$  un grupo y sean  $H, K$  subgrupos normales de  $G$ . Sean  $\pi_H$  y  $\pi_K$  las proyecciones de  $G$  en  $H$  y  $K$  respectivamente. Demuestre que la aplicación

$$f : G/(H \cap K) \rightarrow G/H \times G/K$$

definida por  $f(\bar{x}) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$  es un monomorfismo.

15. Sea  $G$  un grupo. Sea  $a \in G$  y sea  $I_a : G \longrightarrow G$  definida por  $I_a(g) = a \cdot g \cdot a^{-1}$ .

- a) Pruebe que  $I_a$  es un automorfismo de  $G$  (se denomina automorfismo interior de  $G$ ).
- b) Pruebe que la aplicación  $I : G \longrightarrow \text{Aut}(G)$ , definida por  $I(a) = I_a$ , es un morfismo de grupos y verificar que

$$\ker(I) = \{a \in G : ag = ga, \forall g \in G\}.$$

Este subgrupo se llama el *centro de  $G$*  y lo notamos  $\mathcal{Z}(G)$ .

- c) Pruebe que  $\text{im}(I)$  es un subgrupo normal de  $\text{Aut}(G)$ . A este grupo lo notaremos  $\text{Int}(G)$ .
- d) Pruebe que  $G/\mathcal{Z}(G) \simeq \text{Int}(G)$ .
16. Determine  $\mathcal{Z}(G)$  (el centro de  $G$ ) en cada uno de los siguientes casos:
- $G = \mathbb{D}_n$
  - $G = \mathbb{S}_4$
  - $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$
  - $G = \mathcal{H}$
  - $GL_n(\mathbb{R})$
  - $SL_n(\mathbb{R})$
17. Sea  $G$  un grupo. Se define  $[G, G]$ , el *conmutador de  $G$* , como el subgrupo de  $G$  generado por todos los elementos de la forma  $[x, y] = ghg^{-1}h^{-1}$ ,  $g, h \in G$ .

- Pruebe que  $[G, G]$  es un subgrupo normal de  $G$ .
- Pruebe que  $G/[G, G]$  es un grupo abeliano.
- Sea  $f : G \rightarrow K$  un morfismo donde  $K$  es un grupo abeliano. Pruebe que  $f$  se factoriza unívocamente por  $G/[G, G]$ , esto es, existe un único morfismo  $\bar{f} : G/[G, G] \rightarrow K$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{f} & K \\
 \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
 G/[G, G] & & 
 \end{array}$$

em Sea  $H \subset G$  un subgrupo. Pruebe que

$$[G, G] \subseteq H \Leftrightarrow H \triangleleft G \text{ y } G/H \text{ es abeliano.}$$

18. Determine  $[G, G]$  en cada uno de los siguientes casos
- $G = \mathbb{D}_n$
  - $G = \mathcal{H}$
  - $G = \mathbb{S}_4$
  - $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$
19. Pruebe que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son  $\mathcal{H}$  y  $\mathbb{D}_4$ .
20. Sea  $p$  un primo mayor o igual que 3. Demuestre que si  $|G| = 2p$  entonces  $G$  es abeliano o  $G \simeq \mathbb{D}_p$ .
21. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

- a) Si  $|G : H| = 2$  y  $H$  es abeliano entonces  $H \subset \mathcal{Z}(G)$ .
- b) Si  $|G| = n$  y  $k$  divide a  $n$ , existe un elemento de orden  $k$ .
- c) Si  $|G| = n$  y  $k$  divide a  $n$ , existe un subgrupo de orden  $k$ .
- d) Si  $\forall x \in G$ , se tiene que  $\text{ord}(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$ .
- e) Si  $p \mid |G|$ , entonces existe  $H$  subgrupo tal que  $|G : H| = p$ .
- f) Los elementos de orden finito de un grupo  $G$  forman un subgrupo.