Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2013

Práctica 1

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $G_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

   a) Pruebe que $(G_n\,,\cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in G_n$.

   b) Pruebe que G_n es cíclico, es decir, que existe $w \in G_n$ que satisface: $\forall\, z \in G_n\ \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w^k$.

2. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

   a) Pruebe que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.

   b) Determine si S^1 es cíclico.

3. En cada uno de los siguientes casos determine si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, determine si es abeliano:

   a) $G = \mathbb{Q}_{>0} \qquad a * b = a \cdot b$.

   b) $G = M_3(\mathbb{Z}) \qquad a * b = a \cdot b$.

   c) $G = M_n(\mathbb{R}) \qquad a * b = a + b$.

   d) $G = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid det\ a = 1\} \qquad a * b = a \cdot b$.

   e) $G = End_K(V)$, con V un K-espacio vectorial $\qquad f * g = f \circ g$.

   f) $G = \{f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \mid d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\}$
   $f * g = f \circ g$.

   g) $G = \mathbb{S}(X) = \{f : X \longrightarrow X \mid f$ es biyectiva$\}$, donde X es un conjunto no vacío y $f * g = f \circ g$.
   Notación: Cuando $X = \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{S}(X)$ será notado $\mathbb{S}_n$.

   h) $G = \mathbb{S}(\mathbb{Z}) \qquad f * g = f \circ g^{-1}$.

4. Pruebe que todos los grupos de 4 elementos son abelianos.

   (Sugerencia: hacer las posibles tablas de operaciones).

5. Sea G un grupo. Sea $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ tal que $G^{\mathrm{op}} = G$ como conjunto, y el product está dado por $g \cdot h = hg$. Mostrar que G^{op} es un grupo. Llamamos a G^{op} el *grupo opuesto de G*.

6. Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$. Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de G y H* y lo notamos $G \times H$.

7. *a*) Sea $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un grupo abeliano finito. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{g \in G:\, 2g=0} g.$$

   b) Calcular $\sum_{a \in \mathbb{Z}_n} a$.

   c) Calcular $\prod_{w \in G_n} w$.

8. Sea $(G, *)$ un grupo finito y sea $S \subset G$ un subconjunto no vacío. Pruebe que S es un subgrupo si y sólo si $xy \in S, \forall x, y \in S$.

9. Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G.

   a) Pruebe que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.

   b) Pruebe que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

   c) ¿Es cierto que si $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ es un subgrupo de G, entonces $\exists i, j$ con $i \neq j$ tal que $H_i \subset H_j$?

10. Determine todos los subgrupos cíclicos de: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

11. Pruebe que

$$\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   es un subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$.

12. Sean G un grupo y $a \in G$. Pruebe que $C_G(a) = \{x \in G;\ xa = ax\}$ es un subgrupo de G.

13. Pruebe que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n \cdot \mathbb{Z}$.

14. Pruebe que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^\times$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = G_n$.

15. Determine $ord(x)$ en los casos:

   a) $G = \mathbb{S}_8 \qquad x = (1\,2)(5\,6\,7) \quad ; \quad x = (1\,2\,3\,5)(1\,3\,7\,8)$.

   b) $G = \mathbb{Z}_{12} \qquad x = 2 \quad ; \quad x = 3 \quad ; \quad x = 4$.

   c) $G = \mathcal{H} \qquad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

   d) $G = S^1 \qquad x = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\ \mathrm{sen}(\frac{2\pi}{n})$.

   e) $G = \mathbb{D}_4 \qquad x = r^2 s \quad ; \quad x = r^3$.

   f) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural.

16. Sea $x \in \mathbb{Z}_n$. Pruebe que $ord(x) = n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

17. *a*) Calcular el orden de todos los elementos de $\mathbb{S}_3$.
    b) Sea $\sigma = (1\,3\,2)$, encontrar el subgrupo $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma) = \{r \in \mathbb{S}_3 \mid r\sigma = \sigma r\}$.
    c) Determine, si existe, un $\sigma \in \mathbb{S}_3$ tal que el subgrupo $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma)$ tenga orden 1, 2, 3, 6.

18. Pruebe que si G_1 y G_2 son grupos finitos, el orden de un elemento (g_1, g_2) en $G_1 \times G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g_1 y g_2.

19. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m. Pruebe que existe un elemento de orden p en G.

20. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $a, b \in G$
    a) Pruebe que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas

    1) $x \mapsto a \cdot x$
    2) $x \mapsto a \cdot x \cdot b$
    3) $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$
    4) $x \mapsto x^{-1}$
    5) $x \mapsto a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$

    b) Determine cuáles de estas aplicaciones son morfismos.
    c) Idem en el caso en que G sea abeliano.

21. Dados los grupos:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus G_4 \qquad \mathbb{Z}_8$$

$$\mathbb{D}_4 \qquad G_8 \qquad \mathcal{H} \qquad \mathcal{K}$$

donde $\mathcal{H}$ es el grupo definido en el Ejercicio 11 y $\mathcal{K} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ con $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ y $i \cdot j = k = -j \cdot i$. Determine cuáles son abelianos, cuáles son cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.

22. Determine si G y K son isomorfos en los casos:
    a) $G = \mathbb{Z}_4 \quad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
    b) $G = \mathbb{Z}_n \quad K = G_n$.
    c) $G = \mathbb{Z}_{10} \quad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$.
    d) $G = \mathbb{Q} \quad K = \mathbb{R}$.
    e) $G = \mathcal{U}_{16} \quad K = \mathcal{H}$.
    f) $G = \mathcal{U}_{16} \quad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.
    g) $G = \mathbb{S}_3 \quad K = \mathbb{D}_3$.
    h) $G = \mathbb{A}_4 \quad K = \mathbb{D}_6$.

23. Sea $f : G \longrightarrow G$ un morfismo de grupos. Pruebe que $ord(f(x))$ divide a $ord(x)$ si $ord(x)$ es finito.

24. Sea $f : G \longrightarrow L$ un epimorfismo. Determine para cuáles P_i vale:
    "G verifica $P_i \Rightarrow L$ verifica P_i"

(P_1) tener n elementos.
(P_2) ser finito.
(P_3) ser conmutativo.
(P_4) ser no conmutativo.
(P_5) ser cíclico.
(P_6) todo elemento tiene orden finito.
(P_7) todo elemento tiene orden infinito.

25. Sea $f : G \longrightarrow L$ un monomorfismo. Determine para cuáles P_i del ejercicio anterior vale: "L verifica $P_i \Rightarrow G$ verifica P_i".

26. *a*) Pruebe que $Aut(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.
    b) Determine $Hom(G_n\,,\mathbb{Z})$.
    c) Determine $Hom(G\,,\mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.

27. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;/\; a,b \in \mathbb{Z}_7, \text{ con } a \neq 0 \right\}$.
    a) Determine el orden de G.
    b) Para cada primo p que divide al orden de G hallar todos los elementos de G que tengan orden p.

28. Sea p un número primo mayor que 2. Se considera el conjunto

$$G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : \ a,b,c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

    Pruebe que G es un grupo no abeliano tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden p. ¿Qué pasa si $p = 2$?

29. *a*) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Pruebe que $\{a, b\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$ si y sólo si $(a, b) = 1$.
    b) Pruebe que $\mathbb{Z}$ tiene sistemas de generadores minimales de n elementos $\forall n \in \mathbb{N}$.

30. Sea $G = \mathbf{GL}(2,2)$. Determine $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4, 8.

31. *a*) Pruebe que son equivalentes:
        1) G es abeliano.
        2) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.
        3) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.
    b) Pruebe que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano.

32. Pruebe que
    a) $Hom(\mathbb{Z}\,,\mathbb{Z}_n) \neq 0$.
    b) $Hom(\mathbb{Z}_5\,,\mathbb{Z}_7) = 0$.
    c) $Hom(\mathbb{Q}\,,\mathbb{Z}) = 0$.
    d) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

33. Determine dos grupos G y K no isomorfos tales que $Aut(G) \simeq Aut(K)$.

34. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}_4, \text{ con } (a, 4) = 1 \right\}$. Pruebe que G es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es $G \simeq \mathcal{H}$? ¿Es $G \simeq \mathbb{D}_4$?

35. Determine todos los subgrupos de $\mathbb{S}_3$.

36. *a*) Pruebe que $\mathbb{A}_4$ no tiene subgrupos de orden 6.

    b) Pruebe que $\mathbf{SL}(2, 3)$ no tiene subgrupos de orden 12.