Algebra I

1er. Cuatrimestre 2013

Práctica 5 - Enteros II

1. (a) Determinar cuántos divisores positivos tiene

   $i)\ 9000$ $\qquad$ $ii)\ 15^4.42^3.56^5$

   $iii)\ 10^n.11^{n+1}$ $\qquad$ $iv)\ 10^n.8^{n+1}$

   (b) Hallar la suma de los divisores positivos de $2^4.5^{123}$ y de $7^{435}.8^{23}$

2. Hallar el menor número natural n tal que $6552.n$ sea un cuadrado.

3. Decidir si existen enteros a y b no nulos que satisfagan
   i) $a^2 = 8b^2$ $\qquad$ ii) $a^2 = 3b^3$
   iii) $7a^2 = 11b^2$ $\qquad$ iv) $a^2 = 39b^2$

4. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si p es un primo positivo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

5. (a) Calcular la máxima potencia de 3 que divide a 77!.
   (b) Calcular la máxima potencia de 9 que divide a 77!.
   (c) Calcular la máxima potencia de 20 que divide a 81!.
   (d) Calcular la máxima potencia de 24 que divide a 81!.
   (e) Determinar en cuántos ceros termina el desarrollo en base 6 de 31!.

6. Calcular $(18^n - 1 : 1292)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

7. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 25) = 5$. Calcular $(a^4 + 3a + 5^{232} : 150)$.

8. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 2$. Calcular $(a^2 + b^2 : 84)$.

9. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $((a^2 + 3)(7a - 2) : 15) = 5$.

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(n : 945) = 63$, $(n : 1176) = 84$ y $n \leq 2800$.

11. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(n : 1260) = 70$ y n tiene 30 divisores positivos.

12. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $[n : 130] = 260$.

13. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 10$ y $[\,a : b\,] = 1500$.

14. Hallar el resto de la división de a por p en los casos
    (a) $a = 33^{1427}$, $p = 5$.
    (b) $a = 71^{22283}$, $p = 11$.
    (c) $a = 5.7^{2451} + 3.65^{2345} - 23.8^{138}$, $p = 13$

15. Hallar todos los primos positivos p tales que $p \mid 2^p + 5$

16. (a) Resolver la ecuación de congruencia $2^{13}X \equiv 5\ (11)$.
    (b) Resolver la ecuación de congruencia $2^{94}X \equiv 7\ (97)$

17. Sean p y q dos primos positivos distintos. Probar que si a es un entero coprimo con pq entonces $p.q \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$.

18. Probar que si a es un entero coprimo con 561 entonces $561 \mid a^{560} - 1$.

19. Probar que, para todo $a \in \mathbb{Z}$,

    (a) $728 \mid a^{27} - a^3$.

    (b) $880 \mid a^{64} - a^4$.

    (c) $\frac{2a^7}{35} + \frac{a}{7} - \frac{a^3}{5} \in \mathbb{Z}$.

20. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $7^n \equiv 5\ (13)$.

21. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^{236} \equiv 6\ (19)$.

22. Probar que $(2^n + 7^{n+1} : 2^{n+1} + 7^n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

23. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(3^{n+1} + 4^n : 4^{n+1} - 3^n) \neq 1$.

24. Sea p un primo, $p > 2$ y sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p \not| \, a$. Probar que $p^n \mid a^{(p-1)p^{n-1}} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comparar con el ejercicio 19. i) de la práctica 4. (Sugerencia: En el paso inductivo notar que $a^{(p-1)p^n} - 1 = (a^{(p-1)p^{n-1}})^p - 1^p$ y usar el ejercicio 8 de la práctica 2)

25. (a) Hallar el resto de la división de 3^{3603} por 5^3.

    (b) Hallar el resto de la división de 7^{542} por 81.

26. Hallar todos los enteros a que satisfacen simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 0 & \pmod 8 \\ a \equiv 2 & \pmod 5 \\ a \equiv 1 & \pmod{21} \end{cases}$$

27. Hallar todos los enteros a que satisfacen simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 3 & \pmod{10} \\ a \equiv 2 & \pmod 7 \\ a \equiv 5 & \pmod 9 \end{cases}$$

28. Determinar si existe algún entero a que satisfaga simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 1 & \pmod 6 \\ a \equiv 2 & \pmod{20} \\ a \equiv 3 & \pmod 9 \end{cases}$$

29. Determinar si existe algún entero a que satisfaga simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 1 & \pmod{12} \\ a \equiv 7 & \pmod{10} \\ a \equiv 4 & \pmod 9 \end{cases}$$

    y, en caso afirmativo, hallarlos todos.

30. Sabiendo que los restos de la división de un entero a por 3, 5 y 8 son 2, 3 y 5 respectivamente, hallar el resto de la división de a por 120.

31. ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 2 y cuyo resto en la división por 18 sea 8?

32. ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 13 y cuyo resto en la división por 35 sea 22?

33. Hallar el menor entero positivo a que satisfaga **simultáneamente** las dos condiciones siguientes:

    (a) el resto de la división de a por 21 es 13.

    (b) el resto de la división de $6a$ por 15 es 9.

34. Hallar un entero a entre 60 y 90 tal que el resto de la división de $2a$ por 3 sea 1 y el resto de la división de $7a$ por 10 sea 8.

35. Calcular el resto de la división de $\sum_{i=1}^{1759} i^{42}$ por 56

36. (a) Hallar el resto de la división de $3.7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$ por 70.

    (b) Hallar el resto de la división de 3^{385} por 400.

    (c) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $539 \mid 3^{253}a + 5^{44}$.

37. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \equiv 53\ (77)$.

38. Hallar el resto de la división de 2^{2^n} por 13 para cada $n \in \mathbb{N}$.

39. (a) Probar que $(3a^6 - 3 : 5a^6 + 2) = 1$ ó 7. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales vale 7.

    (b) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^7 - 3 : 5a^7 + 2) = 7$.

    (c) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(11a^6 + 1 : 90) = 5$.

    (d) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(9a^{25} + 10 : 280) = 35$. Hallar el resto de la división de a por 70.

    (e) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^{98} - 5a^{50} + 4 : 140a) = 14$.

    (f) Hallar todos los enteros positivos a tales que $(4a^{62} - a : 11a) \neq a$.

    (g) Para cada entero a hallar $(a^{18} + 413 : 3^2.5.7^3)$.

40. Hallar todos los divisores positivos de 25^{70} que sean congruentes a 2 módulo 9 y a 3 módulo 11.

41. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(5^{n+1} - 9^n \ : \ 9^{n+1} + 39\, a\, 5^n) = 22$. Hallar el resto de la división de a por 44.