Algebra I

1er. Cuatrimestre 2013

Práctica 7 - Polinomios

1. Calcular el coeficiente de X^{20} de f en los casos
   (a) $f = (X-3)^{133}$.
   (b) $f = (X-1)^4(X+5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$.
   (c) $f = (X^5+4)^7 - (X+1)^{25} - 3$.
   (d) $f = X^{18}(X^4+2X-3)^{13} + 3(X^5-2)^7 - X^{19}(2X^6+7X^2+5X-3)^{10}$.

2. Calcular el grado y el coeficiente principal de f en los casos
   (a) $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$.
   (b) $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$.
   (c) $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$.

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

   i) $f^2 = Xf + X + 1$ ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$

   iii) $(X+1)f^2 = X^3 + Xf$ iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \text{grado}(f).X^2 f$

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos
   (a) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4, \quad g = X^2 + 2$.
   (b) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X^3 + 1$.
   (c) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X + 1$.
   (d) $f = 6X^5 + 3X^2 - 9X + 1, \quad g = 3X + 2$.
   (e) $f = X^9 - 3X^7 + X^6 - 2X^5 + 3X^3 - X^2 + 3, \quad g = X^5 + 4X - 1$.

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que
   (a) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$.
   (b) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$.
   (c) El resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

   Definición: Sea $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Dados $f, g, h \in \mathbf{K}[X]$ decimos que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso escribimos $f \equiv g \pmod{h}$.

6. Sea $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $h \in \mathbf{K}[X]$. Probar que si $f, g, p, q \in \mathbf{K}[X]$ entonces
   (a) $f \equiv f \pmod{h}$.
   (b) Si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $g \equiv f \pmod{h}$.
   (c) Si $f \equiv g \pmod{h}$ y $g \equiv p \pmod{h}$ entonces $f \equiv p \pmod{h}$.
   (d) Si $f \equiv g \pmod{h}$ y $p \equiv q \pmod{h}$ entonces $f + p \equiv g + q \pmod{h}$ y $f.p \equiv g.q \pmod{h}$.
   (e) Si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (f) r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ ó $\text{grado}(r) < \text{grado}(h)$.

7. Hallar el resto de la división de f por h en los casos
   (a) $f = X^{353} - X - 1, \quad h = X^{31} - 2$.

(b) $f = X^{45} + X^{28} - X^{13} + 3, \quad h = X^{17} + 5.$
(c) $f = X^{1000} - X^{40} + 11X^{20} + 12X^2 - 2, \quad h = X^6 + 1.$
(d) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2, \quad h = X^{100} - X + 1.$

8. (a) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ y sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Probar que si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.
   (b) Probar que no existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(3) = 4$ y $f(-2) = 7$.

9. Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ tales que:
   (a) f es mónico de grado 3 y $f(\sqrt{2}) = 5$;
   (b) f es mónico de grado 3 y $f(1) = -f(-1)$.

10. (a) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.
    (b) Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.
    (c) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 4 cuyas únicas raíces complejas sean 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$

11. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

12. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$.

13. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $a \in \mathbf{K}$. Probar que
    (a) $X - a \mid X^n - a^n$.
    (b) Si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$.
    (c) Si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$.

14. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g siendo
    (a) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1.$
    (b) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X.$
    (c) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, \quad g = X^4 + 2X + 1.$

15. (a) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.
    (b) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

16. (a) Hallar todas las raíces racionales de
        i. $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$.
        ii. $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$.
        iii. $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$.
    (b) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales.

17. (a) Hallar todas las raíces complejas de $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz de f.
    (b) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1 + 2\sqrt{5}$ y a $3 - \sqrt{2}$ como raíces.
    (c) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional.
    (d) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1 + \sqrt{2}) = 3$, $f(2 - \sqrt{3}) = 3$ y $f(1 + \sqrt{5}) = 3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$.

18. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tales que $a_j \neq a_k$ si $j \neq k$. Probar que

$$f = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$$

es el único polinomio en $\mathbb{C}[X]$ que es nulo o de grado menor o igual que n y que satisface $f(a_k) = b_k$ para todo $0 \le k \le n$

19. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que
    (a) $f(1) = 3$, $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 3$ y $f(-1) = 1$.
    (b) $f(2) = 0$, $f(-3) = \frac{1}{2}$, $f(3) = -1$ y $f(-2) = 1$.

20. Hallar todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que $X^3 f' = f^2$.

21. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1, \qquad f_{n+1} = X f_n^2 + X^2 f_n' \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que grado$(f_n) = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

22. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos
    (a) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1$.
    (b) $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2, \quad a = \frac{1}{2}$.
    (c) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i$.
    (d) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2$.

23. (a) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene todas sus raíces simples.
    (b) Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple.

24. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^3$.

25. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz **doble** de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$.

26. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$ tiene todas sus raíces simples.

27. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ tiene todas sus raíces simples.

28. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1, \qquad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f_n') \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Probar que i es raíz **doble** de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

29. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz múltiple de f si y sólo si es raíz de $(f : f')$. Deducir que si $f \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible entonces tiene todas sus raíces simples.

30. Factorizar el polinomio $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

31. Factorizar el polinomio $X^4 - 6X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

32. Factorizar el polinomio $X^6 - 2$ en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

33. Factorizar el polinomio $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que $1 + 2\,i$ es raíz.

34. Factorizar el polinomio $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz.

35. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a+4)X^3 + (4a+5)X^2 - (5a+2)X + 2a$ tenga a a como raíz **doble**. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

36. Factorizar el polinomio $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que $\sqrt{2}\,i$ es raíz múltiple de f.

37. Factorizar el polinomio $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

38. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

39. Sean a, b y c las raíces complejas de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$.

    (a) Hallar

i) $a + b + c$	ii) $ab + ac + bc$	iii) abc
iv) $a^2 + b^2 + c^2$	v) $a^3 + b^3 + c^3$	vi) $a^4 + b^4 + c^4$
vii) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$	viii) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$	ix) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

    (b) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a + b$, $a + c$ y $b + c$.

40. Factorizar el polinomio $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que la suma de tres de sus raíces es $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

41. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6.