Algebra I

1er. Cuatrimestre 2013

Práctica 1 - Conjuntos

Si A es un subconjunto de un conjunto referencial V, denotaremos por A' al complemento de A respecto de V. Por convención, si x es un número real positivo, $\sqrt{x}$ denota el único número real positivo cuyo cuadrado es x.

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}, -1\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   $i)\, 3 \in A$ $\quad$ $ii)\, \{1, 2\} \subseteq A$ $\quad$ $iii)\, \{1, 2\} \in A.$

   $iv)\, \{3\} \subseteq A$ $\quad$ $v)\, \{\{3\}\} \subseteq A$ $\quad$ $vi)\, \emptyset \in A.$

   $vii)\, \{-1, 2\} \subseteq A$ $\quad$ $viii)\, \emptyset \subseteq A$ $\quad$ $ix)\, \{1, 2, -1\} \in A.$

2. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos
   (a) $A = \{1, 2, \sqrt{9}\}$ $\quad B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$.
   (b) $A = \{1, 2, 0, -1, -2\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x + 3| \leq 1\}$.
   (c) $A = \{1, 2, \sqrt{9}\}$ $\quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   (d) $A = \{\emptyset\}$ $\quad B = \emptyset$.
   (e) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < |x| < 3\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 3\}$

3. Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{-1, 3 - 5, 7, -8, 11\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ y $A \triangle B$.

4. Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n$ es múltiplo de $15\}$, hallar el complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V \,/\, n \geq 132\}$.

5. Dado el conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$ y dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ hallar

   $i) A \cap (B \triangle C)$ $\quad$ $ii) (A \triangle B) - C$ $\quad$ $iii) (A - B) \cap C$

   $iv) (A \cup B') \cap C$ $\quad$ $v) A' \cap B' \cap C'$ $\quad$ $vi) (A - B') \triangle C$

6. En un grupo de 110 alumnos hay 63 alumnos que estudian inglés, 30 que estudian alemán y 50 que estudian francés. Sabiendo que hay 7 alumnos que estudian los tres idiomas, 30 que sólo estudian inglés, 13 que sólo estudian alemán y 25 que sólo estudian francés, determinar
   (a) ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas?
   (b) ¿Cuántos alumnos estudian inglés y alemán pero no francés?
   (c) ¿Cuántos alumnos estudian alemán y francés pero no inglés?
   (d) ¿Cuántos alumnos estudian inglés y francés pero no alemán?
   (e) ¿Cuántos alumnos no estudian ningún idioma?

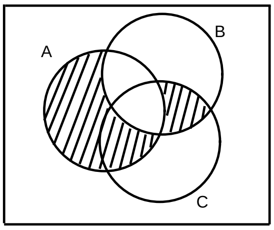
7. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

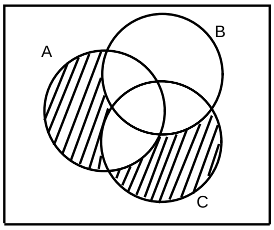
   $i) A \cap (B \cup C)$ $\quad$ $ii) A \cup (B \cap C)$ $\quad$ $iii) A' \cup (B \cap C)$

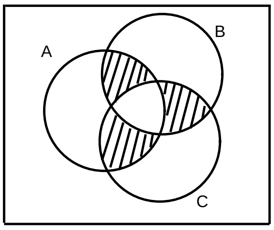
   $iv) (A \cup B') \cap C$ $\quad$ $v) A \triangle (B \cup C)$ $\quad$ $vi) (A \triangle B) \cap (C - A)$

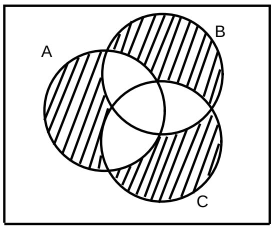
   $vii) A - (B' \triangle C)$ $\quad$ $viii) A \cup (B \triangle C)$ $\quad$ $ix) (A \cup B) \cap (A \cup C)$

8. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

i) 

ii) 

iii) 

iv) 

9. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los conjuntos A, B y C y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
   (b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
   (c) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.
   (d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   (e) $C \subseteq A \Longrightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)'$.
   (f) $A \triangle B = \emptyset \Longleftrightarrow A = B$.
   (g) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$.
   (h) $A \triangle \emptyset = A$.

10. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   (b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
   (c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
   (d) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
   (e) $A - (A \triangle B) = A \cap B$.
   (f) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$.
   (g) $A \subseteq B \Longrightarrow A \triangle B = B \cap A'$.
   (h) $A \subseteq B \Longleftrightarrow B' \subseteq A'$.
   (i) $C \subseteq A \Longrightarrow (A \cup B) \cap C' = (B - C) \cup (A \triangle C)$.
   (j) $A \cap C = \emptyset \Longrightarrow A \cap (B \triangle C) = A \cap B$.

11. (a) Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

$i) A = \emptyset$	$ii) A = \{1\}$	$iii) A = \{a, b\}$
$iv) A = \{1, a, \{-1\}\}$	$v) A = \{1, \{1, 2\}\}$	$vi) A = \{1, 3, 5, \emptyset\}$

(b) ¿Qué relación existe entre la cantidad de elementos de A y la de su conjunto de partes?

(c) Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

12. (a) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{a, b, c\}$. Hallar $A \times A$, $B \times C$, $(A \cap B) \times C$, $(A \cup B) \times C$ y $(A - B) \times B$

    (b) Sean X e Y conjuntos. Si X tiene n elementos e Y tiene m elementos, ¿cuántos elementos tiene $X \times Y$?

    (c) Sean A, B y C conjuntos. Probar que

    $i)(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ $\qquad$ $ii)(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

    $iii)(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ $\qquad$ $iv)(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

13. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿cuántas relaciones de A en B hay?

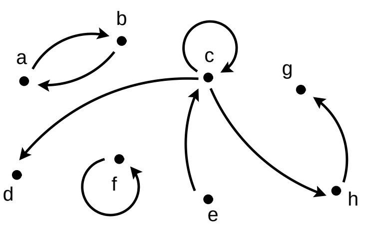
14. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

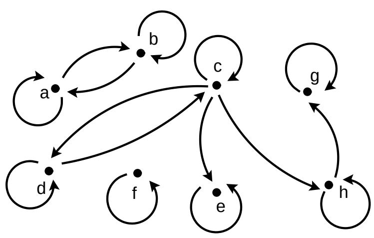
dibujando 6 puntos en el plano que representen cada uno de los elementos de A y una flecha de a a b para cada $(a, b) \in \mathcal{R}$. Viendo el gráfico determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

15. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

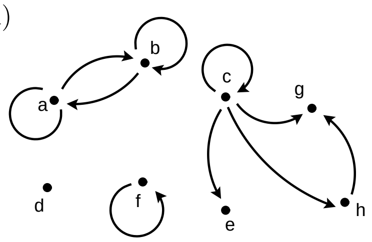
i)



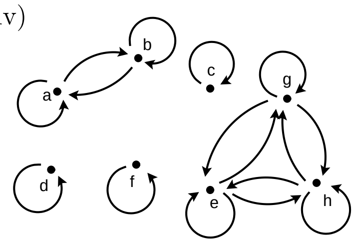
ii)



iii)



iv)



16. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

    (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

    (b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$.

    (c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

    (d) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b \text{ es par}\}$.

(e) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b$ es impar$\}$.

(f) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, |a| \leq |b|\}$.

(g) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $A \,\mathcal{R}\, B \iff 2 \notin A - B$.

(h) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $A \,\mathcal{R}\, B \iff A \cap \{1, 2, 3\} \subseteq B \cap \{1, 2, 3\}$.

(i) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \iff a + 3b$ es divisible por 4.

(j) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \iff b$ es múltiplo de a.

17. Dar un ejemplo de una relación en $\mathbb{R}$ que:

(a) sea simétrica y antisimétrica.

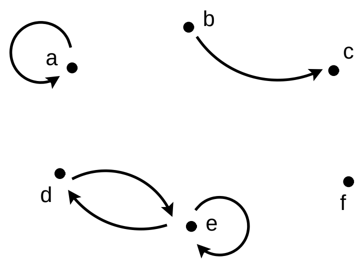
(b) no sea ni simétrica ni antisimétrica.

(c) sea simétrica y transitiva pero no reflexiva.

(d) sea reflexiva y simétrica pero no transitiva.

(e) sea de equivalencia y de orden.

18. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



¿Cuál es la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

(a) reflexiva,

(b) simétrica,

(c) transitiva,

(d) reflexiva y simétrica,

(e) simétrica y transitiva,

(f) reflexiva y transitiva,

(g) de equivalencia.

19. Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ encuentre una relación de orden $\mathcal{R}$ en A que tenga 12 elementos y que verifique $(a, b) \in \mathcal{R}$, $(e, a) \in \mathcal{R}$ y $(c, d) \notin \mathcal{R}$. ¿Es única?

20. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A

$$\mathcal{R} = \{(a, a),(b, b),(c, c),(d, d),(e, e),(f, f),(a, b),(b, a),(a, f),(f, a),(b, f),(f, b),(c, e),(e, c)\}$$

hallar

(a) la clase de b,

(b) la clase de c,

(c) la clase de d,

(d) la partición asociada a $\mathcal{R}$.

21. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1,3\},\{2,6,7\},\{4,8,9,10\},\{5\}\}$.

22. Hallar todas las particiones del conjunto $A = \{1,2,3\}$. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A?

23. (a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos
    i. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b),(5,c)\}$,
    ii. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,b),(5,c),(3,d)\}$,
    iii. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b)\}$,
    iv. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,e)\}$,
    v. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \,/\, a = 2b-3\}$,
    vi. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N} \,/\, a = 2b-3\}$,
    vii. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,/\, a+b \text{ es divisible por } 5\}$,
    viii. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, b = a^2\}$,

    (b) Para cada una de las relaciones de A en B definidas en a) que sean funciones hallar la imagen y determinar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

24. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

    (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^3 - 5.$
    (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5.$
    (c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x + y.$
    (d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (2x, x^2, x-7).$
    (e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 6, \\ x+6 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$
    (f) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}.$
    (g) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$
    (h) $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a,b) = 3a - 2b.$
    (i) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a) = \begin{cases} a+1 & \text{si } a \text{ es par} \\ a-1 & \text{si } a \text{ es impar.} \end{cases}$

25. (a) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad\qquad g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n+1 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad\qquad g(n,m) = n.(m+1)$$

calcular $(f\circ g)((3,4)$, $(f\circ g)((2,5)$ y $(f\circ g)((3,2)$.

(b) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 7 \end{cases} \qquad\qquad g(n) = \sqrt{n}$$

Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tal que

i. $(f \circ g)(n) = 13$.

ii. $(f \circ g)(n) = 15$.

26. Hallar $f \circ g$ en los casos

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 - 18$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x + 3$.

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 3$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x^2 - 18$

(c) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n - 1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4, \end{cases}$
$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g(n) = 4n$.

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + 5, 3x)$
$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(n) = \sqrt{n}$.

27. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ denota la función identidad.

28. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \longrightarrow C$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones entonces valen

(a) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

(b) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva.

(c) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva.

(d) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.

(e) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva.