UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Marcos de Gabor y la conjetura de Feichtinger

Pablo Esteban Schmidberg

Directora: Dra. Silvia Lassalle

Marzo de 2008

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi directora, Silvia Lassalle, por todo lo que me enseñó durante este tiempo, por la excelente predisposición y por la constante guía que significó para mí.

Quiero agradecer muy especialmente a mi mamá, por su apoyo incondicional y por haberme ayudado a encarrilarme en los momentos difíciles. A mi papá, por estar siempre presente, por escucharme y bancarme en todo momento. A Ana María, que me acompañó durante todo este tiempo brindádome muy buenos consejos. A Sandra y nuestras charlas acerca de la vida.

A mi amiga Magui, que además de divertirnos mucho y de compartir muchos momentos, fue una excelente compañera de ruta a lo largo de la carrera. A mi amiga Lau Pezzatti, que si bien cursamos pocas materias juntos, nunca faltó momento para la diversión y para la reflexión. A mis amigos Lean del Pezzo, Eze Martín, Caro Mosquera, Lau Barbagallo y Ani Silva, por tantos momentos juntos, dentro y fuera de la facu, así como nuestros eternos pero fructíferos debates acerca de la carrera. A todos mis compañeros de la facu: Isa Herrero, Vicky Patternostro, José Luis Romero, Edu Romero, Lean Lombardi, Martín Mereb, Mercedes Pérez Millán y JP Vicedo.

No me voy a olvidar de Rosita y su silenciosa compañía durante los largos días de tipeo.

Índice General

Introducción

Una base en un espacio de Hilbert H es un conjunto de elementos $\{f_i\}_{i\in I}$ que nos permite escribir cada $f \in H$ como una combinación lineal (infinita) de los elementos f_i de la base de la forma:

$$f = \sum_{i\in I} a_i(f) f_i, \tag{1}$$

donde los coeficientes a_i, obtenidos a través de transformaciones lineales, son *únicos*. En los espacios de Hilbert, la noción de ortogonalidad es intrínseca a la estructura geométrica y esto hace de las bases ortonormales, conjuntos muy convenientes. Es la misma base el sistema biortogonal que recupera los coeficientes de (1): $a_i(f) = \langle f, f_i\rangle$. Esta condición hace de las bases ortonormales una estructura, en cierto modo, rígida. Una leve modificación de éstas da lugar a las bases de Riesz. Ambas estructuras verifican la conocida desigualdad de Bessel. Ésta es la clave que asegura convergencia incondicional en la escritura (1). Si bien las bases dan una manera de descomponer cualquier elemento del espacio en término de los coeficientes en forma única, esta propiedad proporciona ciertas limitaciones:

a) Las bases son estructuras poco flexibles.

b) Pocas veces se pueden construir bases con propiedades adicionales.

c) Leves perturbaciones en la base pueden destruir sus propiedades.

Es por esta razón que surge la necesidad de generalizar este concepto. Una manera de hacerlo es a través de la noción de *marco*. Un marco es también un conjunto $\{f_i\}_{i\in I}$ del espacio H que permite escribir cada elemento f como en (1), donde los coeficientes a_i no son necesariamente únicos.

El concepto de marco fue introducido en 1952 por Duffin y Schaeffer como una herramienta para el estudio de *series de Fourier no armónicas*, es decir sucesiones de la forma $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de números reales o complejos. Aparentemente, la comunidad matemática de entonces no vislumbró la importancia de esta nueva herramienta. Fue recién, casi 30 años más tarde, con la publicación del libro de Young, en 1980, que el tema recobró interés. Aquí, los marcos son presentados en un contexto abstracto y, como antes, utilizados para el estudio de series de Fourier no armónicas. Poco tiempo después, en 1985, Daubechies, Grossman y Meyer notaron que los marcos se podían utilizar para encontrar expansiones en series de funciones en $L^2(\mathbb{R})$ muy similares a las expansiones que dan las bases ortonormales. Probablemente, puede considerarse éste como el momento en que se inicia el desarrollo del estudio de marcos. La redundancia hace de los marcos una herramienta útil con aplicaciones a diferentes campos tales como teoría de muestreo, reducción de ruido, así como procesamiento de imágenes y señales (ver, por ejemplo, [1, 9, 12]).

Paralelamente a la aparición del concepto de marco, surge el análisis de Gabor, que busca representar funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$ como superposiciones de traslaciones y modulaciones de una función fija $g \in L^2(\mathbb{R})$, llamada *función ventana o generador*. Los operadores en $L^2(\mathbb{R})$ involucrados en el análisis de Gabor son

Traslación por $a \in \mathbb{R}$: $(T_a f)(x) :\, = f(x-a)$, $x \in \mathbb{R}$,

Modulación por $b \in \mathbb{R}$: $(E_b g)(x) :\, = e^{2\pi i b x} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Hay dos formas de pensar en la representación que busca el análisis de Gabor. La primera forma es buscar representaciones mediante la *integral* involucrando todas las posibles traslaciones y modulaciones, es decir representaciones como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c_f(a,b) e^{2\pi i b x} g(x-a) dbda,$$

donde cada f queda determinada por una función de dos variables c_f que hace verdadera la igualdad. Además, es necesario especificar en qué sentido dicha igualdad es válida. La segunda forma es restringir los parámetros de traslación y modulación a un subconjunto discreto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ y buscar representaciones de f mediante *series* en términos de las funciones

$$\{e^{2\pi i b x} g(x-a)\}_{(a,b)\in\Lambda}.$$

La idea básica surgió con Gabor en 1946, quién consideró una sucesión de funciones de la forma $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, donde $ab = 1$ y g es la Gaussiana, $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. La misma clase de funciones había sido considerada por Neumann, en el contexto de mecánica cuántica, en su libro de 1932. Mucho más adelante, alrededor de 1980, Janssen, Davis y Heller observaron que este sistema de Gabor particular genera expansiones inestables y no es apropiado para muchas aplicaciones. Los papers de Janssen pueden ser vistos como el punto de partida del análisis matemático de sistemas de Gabor. En 1986, el análisis de Gabor tomo un nuevo rumbo con Daubechies, Grossman y Meyer, ya que allí se propone por primera vez la idea de combinar análisis de Gabor con teoría de marcos.

La base ortonormal $\{e^{2\pi imx}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(0,1)$ proporciona uno de los ejemplos más sencillos de sistemas de Gabor, que además resulta ser base, para $L^2(\mathbb{R})$. Si consideramos la función carcterística del intervalo $[0,1]$, $\chi_{[0,1]}$, cada traslación con $n \in \mathbb{Z}$ produce una base de $L^2(n, n+1)$. Así $\{E_mT_n\chi_{[0,1]}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y por lo tanto, una base de Gabor.

Sin embargo, la base ortonormal $\{e^{2\pi imx}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(0,1)$ presenta algunas limitaciones. Mencionemos dos de ellas. La primera, es en relación a subespacios. Si consideramos $I \subseteq [0,1]$ un intervalo abierto, con medida estrictamente menor a 1, podemos identificar $L^2(I)$ con el subespacio de $L^2(0,1)$ cuyas funciones se anulan fuera de I. Esto hace que la restricción de $\{e^{2\pi imx}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ al intervalo I sea un sistema de generadores que carece de la propiedad de describir a cada $f \in L^2(I)$ en forma única. Mostraremos con el Ejemplo 1.3.3 que $\{e^{2\pi imx}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(I)$.

La segunda limitación la observamos dentro del contexto de análisis tiempo-frecuencia. Sabemos que $\hat{\chi}_{[0,1]}(w) = \frac{e^{-2\pi iw}}{i}\frac{\sin \pi w}{\pi w}$. Luego, el hecho de ser $\chi_{[0,1]}$ discontinua sumado a la oscilación y decaimiento lento de $\hat{\chi}_{[0,1]}$, hace que la función característica sea poco atractiva para este tipo de análisis. Se podría eperar alguna mejora al cambiar $\chi_{[0,1]}$ por una función g más suave. Lamentablemente el teorema de Bailan-Low muestra que si $\{E_mT_ng\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz, o bien $xg(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ o bien $w\hat{g}(w) \notin L^2(\mathbb{R})$. Es decir, hay restricciones sobre las propiedades de g para que ésta genere una base de Riesz de Gabor. Puesto en palabras, una tal función no puede estar bien localizada en ambos campos a la vez: de tiempo y de frecuencia.

Si se quiere un decaimiento rápido para g y $\hat{g}$ habrá que preguntarse si es necesario conservar todas la propiedades de una base o si es posible flexibilizar alguna. La propiedad que queremos mantener es la de tener para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ convergencia incondicional de la expasión (1) en términos de $\{E_m T_n g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$. La primer observación es que no se requiere la ortonormalidad y podemos trabajar con bases de Riesz. Además, la convergencia incondicional puede combinarse con buen decaimiento para g y $\hat{g}$. Luego la propiedad que se puede descartar es la unicidad. Es aquí donde los marcos cobran protagonismo.

En este trabajo pretendemos dar una descripción de las coincidencias y diferencias entre estos tres conceptos: Bases de Riesz (entre las que se encuentran las ortonormales), Marcos y Sistemas de Gabor. Veremos condiciones necesarias y condiciones suficientes para determinar cuándo estamos en presencia de tal o cual estructura. A la vez, presentaremos ejemplos que muestran el alcance de los resultados más recientes.

En el primer capítulo damos las definiciones básicas que necesitaremos a lo largo del trabajo. También desarrollamos algunos resultados elementales con la intención de hacer una presentación autocontenida.

El problema de determinar cuándo un sistema de Gabor es un marco de $L^2(\mathbb{R})$ fue largamente estudiado y hacemos mención de esto como introducción del Capítulo 2. Aquí, presentamos resultados donde se estudian condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco para un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$. También mencionamos resultados similares para marcos de traslaciones (marcos de la forma $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$) y marcos de modulaciones (marcos de la forma $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$). Además, estudiamos condiciones necesarias y suficientes para que un marco de Gabor sea una base de Riesz para el subespacio correspondiente.

Ahora bien, no siempre un marco resulta ser una base de Riesz y uno puede preguntarse si es posible extraer del sistema $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ una subfamilia que sí lo sea. Sin embargo, aunque esto fuera posible, en general, remover elementos de $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no es una ventaja desde el punto de vista computacional puesto que se perderían los beneficios de trabajar con $\{(na, mb)\}$, que es un reticulado de $\mathbb{R}^2$. Este hecho nos conduce a la siguiente pregunta: ¿Todo marco se puede escribir como una unión finita de bases de Riesz?. Esta pregunta, con algunas modificaciones, se conoce como la *Conjetura de Feichtinger* que es un problema abierto. Sobre esta conjetura trabajamos en el Capítulo 3. Mencionamos otras conjeturas y mostramos que son equivalentes a la Conjetura de Feichtinger. Además, mostramos que la conocida *conjetura de pavimentación* implica todas las otras conjeturas. Finalmente, mencionamos y mostramos algunos resultados positivos, entre los cuales se da una respuesta afirmativa a la Conjetura de Feichtinger para ciertos marcos de Gabor.

Este trabajo está principalmente basado en [4, 5, 6].

Capítulo 1

Definiciones y resultados preliminares

A lo largo de este trabajo, H denotará un espacio de Hilbert arbitrario y $\{e_i\}_{i\in I}$ denotará una base ortonormal del espacio de Hilbert en el cual estemos trabajando.

Por $L^2(\mathbb{R})$ denotamos el espacio formado por las funciones definidas en la recta real que son de cuadrado integrable con respecto a la medida de Lebesgue, considerado con el producto interno usual. Comencemos definiendo los siguientes operadores sobre funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$:

Traslación por $a \in \mathbb{R}$: $(T_a f)(x) := f(x-a)$, $x \in \mathbb{R}$.

Modulación por $b \in \mathbb{R}$: $(E_b g)(x) := e^{2\pi i b x} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ahora definamos la *Transformada de Fourier* $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$ por

$$\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

Como es usual, la Transformada de Fourier se extiende a una isometría de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$. Notamos la transformada inversa de Fourier de una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ por $\mathcal{F}^{-1}g$ ó por $\check{g}$. Nos van a ser útiles las siguientes relaciones de conmutación válidas para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}T_a = E_{-a}\mathcal{F}, \qquad \mathcal{F}E_a = T_a\mathcal{F}. \tag{1.1}$$

Una sucesión $\{f_i\}_{i\in I}$ en H se dice acotada si admite una cota inferior y una cota superior, es decir: $0 < \inf_{i\in I} \|f_i\| \leq \sup_{i\in I} \|f_i\| < \infty$.

Finalmente, notamos por $c_{00}(I)$ al subespacio de $\ell^2(I)$ formado por las sucesiones con finitas coordenadas no nulas.

1.1 Bases y sucesiones de Riesz

Definición 1.1.1. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una sucesión de elementos en un espacio de Hilbert H.*

i) $\{f_i\}_{i\in I}$ se dice una sucesión de Riesz si y sólo si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\sum_{i\in I}|a_i|^2 \leq \Big\|\sum_{i\in I}a_if_i\Big\|^2 \leq B\sum_{i\in I}|a_i|^2 \tag{1.2}$$

para toda elección de escalares $\{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$.

Las constantes A y B se llaman respectivamente cota inferior y superior de Riesz.

ii) Si además se tiene $\overline{\text{gen}}\{f_i\}_{i\in I} = H$, decimos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz.

Ejemplo 1.1.2. *Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $H = \ell_2$. Consideremos la sucesión $f_n = e_n - \frac{1}{2}e_{n+1}$, $n \geq 1$. Luego, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz con cota inferior $\frac{1}{4}$ y cota superior $\frac{9}{4}$.*

Para ver esto, notemos que $f_n = \{Te_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $T = I - \frac{1}{2}S$, donde I es el operador identidad y S el operador de traslación de ℓ_2, es decir $Se_n = e_{n+1}$.

Como $\|\frac{1}{2}S\| = \frac{1}{2}$ y $T = I - \frac{1}{2}S$, se tiene que T es un isomorfismo. Así, $\overline{\text{gen}}\{f_n\} = \overline{\text{gen}}\{Te_n\} = \ell_2$.

Ahora veamos que vale (1.2) con $A = \frac{1}{4}$ y $B = \frac{9}{4}$. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Escribiendo $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_ne_n$ tenemos que $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ y $\|Tf\|^2 = \|\sum_{n=1}^{\infty}a_nf_n\|^2$. Luego,

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|^2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 \leq \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nf_n\Big\|^2 \leq \|T\|^2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2.$$

Además, $\|T\| \leq 1 + \frac{1}{2}\|S\| = \frac{3}{2}$ y como $T + \frac{1}{2}S = I$, se tiene que $\frac{1}{\|T^{-1}\|} \geq \frac{1}{2}$.

Observación 1.1.3. *Toda sucesión de Riesz $\{f_i\}_{i\in I}$ es base de $\overline{\text{gen}}\{f_i\}$.*

Demostración. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una sucesión de Riesz y sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de $\ell^2(I)$. Por la primera desigualdad de (1.2), $\{f_i\}_{i\in I}$ es linealmente independiente. Definimos el operador $T\colon \text{gen}\{f_i\} \to \ell^2(I)$ por $Tf_i := e_i$. Notar que T es acotado con

$\|T\| \leq \sqrt{\frac{1}{A}}$. En efecto, dada $f \in \text{gen}\{f_i\}$, escribimos $f = \sum_{i \in I'} a_i f_i$ con $I' \subseteq I$ finito, entonces por (1.2) tenemos que

$$\|Tf\|_2^2 = \Big\| \sum_{i \in I'} a_i e_i \Big\|_2^2 = \sum_{i \in I'} |a_i|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2.$$

Extendemos T a $\overline{\text{gen}\{f_i\}}$ por densidad.

Ahora, definimos el operador $U\colon c_{00}(I) \to \overline{\text{gen}}\{f_i\}$ por $Ue_i = f_i$. Análogamente, de (1.2) tenemos que U es acotado con $\|U\| \leq \sqrt{B}$. Extendemos U a $\ell^2(I)$ por densidad.

Por lo tanto, T es un isomorfismo con inverso U, de donde se sigue el resultado. □

Observación 1.1.4. *Si $\{f_i\}_{i \in I}$ es una sucesión de Riesz con cotas A y B, entonces*

$$A \leq \|f_i\|^2 \leq B \quad \textit{para todo } i \in I.$$

Demostración. Sea $j \in I$. Eligiendo los escalares $\{\delta_{ij}\}_{i \in I}$, por (1.2) se tiene el resultado. □

Observación 1.1.5. *Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H. Entonces, $\{f_i\}_{i \in I}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si vale* (1.2) *para toda toda elección de escalares en $c_{00}(I)$.*

De la demostración de la Observación 1.1.3, se deduce la equivalencia:

Proposición 1.1.6. *Sean $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq H$ y $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ una base ortonormal. Entonces, $\{f_i\}_{i \in I}$ es una base de Riesz si y sólo si existe U un operador lineal, acotado y biyectivo de H tal que $Ue_i = f_i$ para todo $i \in I$.*

Otra formulación equivalente para las bases de Riesz la da el siguiente resultado conocido:

Proposición 1.1.7. *Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una sucesión de elementos de H. Luego, $\{f_i\}_{i \in I}$ es una base de Riesz si y sólo si es una sucesión acotada y es base incondicional.*

Notar que como consecuencia inmediata de esta proposición se tiene que todo conjunto finito y linealmente independiente es una sucesión de Riesz.

Observación 1.1.8. *Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una sucesión de Riesz con cotas inferior A y superior B.*

i) Todo subconjunto de $\{f_i\}_{i\in I}$ *es otra sucesión de Riesz con las mismas cotas.*

ii) Si $\{c_i\}_{i\in I}$ *satisface* $0 < c \leq |c_i| \leq C < \infty$*, entonces* $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ *es una sucesión de Riesz con cotas* Ac^2, BC^2.

Demostración. De la Observación 1.1.5, se obtiene inmediatamente *i)*. Veamos que vale *ii)*. Como $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Riesz con cotas A y B, para cualquier elección de escalares $\{a_i\}_{i\in I'}$ con $I' \subseteq I$ finito, se tiene:

$$A\sum_{i\in I'}|c_i a_i|^2 \leq \|\sum_{i\in I'}(c_i a_i) f_i\|^2 \leq B\sum_{i\in I'}|c_i a_i|^2$$

El resultado es consecuencia inmediata de las desigualdades $c^2\sum_{i\in I'}|a_i|^2 \leq \sum_{i\in I'}|c_i a_i|^2 \leq C^2\sum_{i\in I'}|a_i|^2$ y de la Observación 1.1.5. $\square$

Observación 1.1.9. *Sea* $\{f_i\}_{i=1}^n \subseteq H$*. Luego,* $\{f_i\}_{i=1}^n$ *es una sucesión de Riesz si y sólo si* $\{f_i\}_{i=1}^n$ *admite cota inferior positiva.*

Demostración. Fijemos los escalares $\{a_i\}_{i=1}^n$. En consecuencia,

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_i f_i\Big\| \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq Mn^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

donde $M = \max_{1\leq i\leq n}\|f_i\|$.

Lo anterior muestra que toda sucesión finita tiene cota superior de Riesz, que depende de la cota superior de los $\|f_i\|$ y de la cantidad de elemetos de la sucesión, de donde se sigue el resultado. $\square$

Como la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ es un operador lineal isométrico, se tiene:

Observación 1.1.10. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *una sucesión de elementos en* $L^2(\mathbb{R})$*. Entonces,* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una sucesión de Riesz con cotas A y B si y sólo si* $\{\mathcal{F}f_i\}_{i\in I}$ *lo es.*

En las sucesiones de Riesz que vienen dadas por un sistema de Gabor, se tiene el siguiente resultado:

Observación 1.1.11. *Si* $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *es una sucesión de Riesz con cotas A y B, entonces* $\{E_c T_d E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *también lo es para todo* $c, d \in \mathbb{R}$.

Demostración. El resultado se sigue inmediatamente de las siguientes igualdades válidas para todo $c, d \in \mathbb{R}$ y toda elección de escalares $\{a_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn} E_c T_d E_{mb} T_{na} g \Big\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big| e^{2\pi icx} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn} e^{2\pi imb(x-d)} g(x-na-d) \big|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big| \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn} e^{2\pi imby} g(y-na) \big|^2 dy \\ &= \Big\| \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn} E_{mb} T_{na} g \Big\|^2,\end{aligned}$$

donde se realizó oportunamente el cambio de variables $y = x - d$. $\square$

Proposición 1.1.12. *Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de H. Las cotas óptimas para toda sucesión de Riesz $\{f_i\}_{i\in I} = \{Ue_i\}_{i\in I}$ son*

$$A = \|U^{-1}\|^{-2} \quad y \quad B = \|U\|^2.$$

1.2 Sucesiones de Bessel

Definición 1.2.1. *Una familia de vectores $\{f_i\}_{i\in I}$ en H se dice una sucesión de Bessel si y sólo si existe una constante $B > 0$ tal que*

$$\sum_{i\in I} \big|\langle f, f_i\rangle\big|^2 \leq B\|f\|^2 \qquad \text{para todo } f \in H.$$

En tal caso, diremos que la sucesión tiene constante de Bessel B.

Veamos un ejemplo de una sucesión de Bessel:

Ejemplo 1.2.2. *Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal para H. Consideremos la sucesión $\{\frac{1}{\sqrt{n}}e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y veamos que es una sucesión de Bessel con constante de Bessel* 1. *En efecto, dada $f \in H$, se tiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle f, \frac{1}{\sqrt{n}}e_n\rangle\big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\langle f, e_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

A continuación, damos una serie de observaciones que usaremos en los capítulos que siguen.

Observación 1.2.3. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *en* H *una sucesión de Bessel con constante de Bessel* B*. Luego,* $\sup_{i\in I} \|f_i\| \leq \sqrt{B}$.

Demostración. Como $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel con constante de Bessel B, para cada $j \in I$ fijo, se tiene $\sum_{i\in I} |\langle f_j, f_i\rangle|^2 \leq B\|f_j\|^2$. Por otra parte,

$$\sum_{i\in I} |\langle f_j, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I-\{j\}} |\langle f_j, f_i\rangle|^2 + \|f_j\|^4 \geq \|f_j\|^4.$$

Así, $\|f_j\|^4 \leq B\|f_j\|^2$ y, por lo tanto, $\|f_j\| \leq \sqrt{B}$ para todo $j \in I$. □

Observación 1.2.4. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *en* H *una sucesión de Bessel con constante* B*. Luego,*

a) Todo subconjunto de $\{f_i\}_{i\in I}$ *resulta una sucesión de Bessel con la misma constante.*

b) Si $\{c_i\}_{i\in I}$ *satisface* $|c_i| \leq C$ *para todo* $i \in I$*, entonces* $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ *es una sucesión de Bessel con constante* BC^2*.*

Demostración. Lo afirmado en *a)* es inmediato. Veamos que vale *b)*. Sea $I' \subseteq I$ finito. El resultado se obtiene de las siguientes desigualdades:

$\sum_{i\in I'} |\langle f, c_i f_i\rangle|^2 \leq C^2 \sum_{i\in I'} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq BC^2\|f\|^2$, para todo $f \in H$. □

Lema 1.2.5. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *en* H *una sucesión de Bessel con constante* B*. Luego,* $\|\sum_{i\in I} a_i f_i\|^2 \leq B\sum_{i\in I} |a_i|^2$ *para toda elección de escalares* $\{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$*.*

Demostración. Fijemos $\{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ e $I' \subseteq I$ finito. Como $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel con constante B, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i\in I'} a_i f_i\|^2 &= \Big(\sup_{\|g\|=1} |\langle \sum_{i\in I'} a_i f_i, g\rangle|\Big)^2 \\
&\leq \Big(\sup_{\|g\|=1} \sum_{i\in I'} |a_i||\langle f_i, g\rangle|\Big)^2 \\
&\leq (\sum_{i\in I'} |a_i|^2)(\sup_{\|g\|=1} \sum_{i\in I} |\langle f_i, g\rangle|^2) \\
&\leq (\sum_{i\in I'} |a_i|^2)(\sup_{\|g\|=1} B\|g\|^2) \\
&\leq (\sum_{i\in I'} |a_i|^2)B.
\end{aligned}$$

Como $\{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, la suma $\sum_{i\in I'} a_i f_i$ es de Cauchy, de donde se sigue el resultado. □

1.3 Marcos en espacios de Hilbert

En la introducción vimos que las bases tienen algunas limitaciones y, por lo tanto, surge la necesidad de generalizar este concepto. De las propiedades que tiene una base, queremos mantener la convergencia incondicional de la expansión en serie de cada elemento. Por eso, la propiedad de la que podemos prescindir es la de la escritura única. Los *marcos* son entonces la estructura adecuada. A continuación damos la definición precisa:

Definición 1.3.1. *Una familia de vectores $\{f_i\}_{i\in I}$ en H se dice un marco para H si y sólo si existen constantes $A, B > 0$ tales que*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \left|\langle f, f_i\rangle\right|^2 \leq B\|f\|^2 \qquad \textit{para todo } f \in H. \tag{1.3}$$

Las constantes A y B se llaman respectivamente cota inferior y superior del marco.

Llamaremos sucesión de marco a una sucesión $\{f_i\}_{i\in I}$ que satisface (1.3) para toda $f \in \overline{gen}\{f_i\}$.

Dado un marco $\{f_i\}_{i\in I}$ para H, tenemos definido el *operador de marco* $S\colon H \to H$ por

$$Sf: = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle f_i.$$

S resulta un operador acotado, positivo, inversible y autoadjunto.

Observación 1.3.2. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un marco para H con operador de marco S. Luego,*

$$f = \sum_{i\in I} \langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i \quad \textit{para toda } f \in H.$$

La serie converge incondicionalmente para todo $f \in H$.

Demostración. Sea $f \in H$. Como S es inversible y autoadjunto, se tiene

$$f = SS^{-1}f = \sum_{i\in I} \langle S^{-1}f, f_i\rangle f_i = \sum_{i\in I} \langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i.$$

Además, como $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel y $\{\langle f, S^{-1}f_i\rangle\}_{i\in I} = \{\langle S^{-1}f, f_i\rangle\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, la serie converge incondicionalmente. □

Toda sucesión de marco resulta una sucesión de Bessel. En efecto, si consideramos $H_1 = \overline{\text{gen}}\{f_i\}$ y H_2 su complemento ortogonal, tenemos que $H = H_1 \bigoplus_\perp H_2$. Todo $f \in H$ se escribe $f = g + h$ con $g \in H_1$ y $h \in H_2$ y vale $g \perp h$, $h \perp f_i$ para todo $i \in I$. Luego, $\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle g, f_i\rangle|^2 \leq B\|g\|^2 \leq B(\|g\|^2 + \|h\|^2) = B\|f\|^2$.

Ahora veamos algunos ejemplos que nos muestran algunas relaciones entre los marcos, las sucesiones de Bessel y las sucesiones de Riesz:

Ejemplo 1.3.3. *Consideremos la base ortonormal $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{e^{2\pi ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ para $L^2]0,1[$ y sea $I \subseteq]0,1[$ un intervalo abierto con $|I| < 1$. Luego, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(I)$ con cotas $A = B = 1$ pero no es base para $L^2(I)$.*

En efecto, como $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f\|^2$ para toda $f \in L^2]0,1[$, en particular vale también para toda $f \in L^2(I)$ y, por lo tanto, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(I)$ con cotas $A = B = 1$.

Veamos que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ no es base para $L^2(I)$. Sea $f \in L^2(I)$. Luego, $f \in L^2]0,1[$ y se tiene que

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, e_k\rangle e_k \quad \text{en } L^2]0,1[. \tag{1.4}$$

Restringiendo la expansión anterior a I, tenemos que

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, e_k\rangle e_k \quad \text{en } L^2(I). \tag{1.5}$$

Definimos la función $\widetilde{f}$ por

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I, \\ 1 & \text{si } x \notin I. \end{cases}$$

Entonces, $\widetilde{f} \in L^2]0,1[$ y tenemos la respresentación

$$\widetilde{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \widetilde{f}, e_k\rangle e_k \quad \text{en } L^2]0,1[. \tag{1.6}$$

Como $f = \widetilde{f}$ en I, (1.6) muestra que

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \widetilde{f}, e_k\rangle e_k \quad \text{en } L^2(I). \tag{1.7}$$

Así, (1.5) y (1.7) son dos expansiones de f en $L^2(I)$ que resultan distintas, pues como $f \neq \widetilde{f}$ en $L^2]0,1[$, las expansiones (1.4) y (1.6) muestran que $\{\langle f, e_k\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}} \neq \{\langle \widetilde{f}, e_k\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}}$. $\square$

Ejemplo 1.3.4. *Sea* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una base ortonormal para* H.

i) Repitiendo cada elemento de $\{e_n\}$ *dos veces, obtenemos un marco para* H *con cotas* $A = B = 2$. *Por otro lado, si sólo repetimos* e_1 *dos veces, obtenemos un marco con cotas* $A = 1$ *y* $B = 2$.

ii) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *la sucesión obtenida de repetir cada elemento* $\frac{1}{\sqrt{n}}e_n$ n *veces. Veamos que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es un marco para* H *con cotas* $A = B = 1$ *pero no es una sucesión de Riesz. En efecto, dada* $f \in H$, *se tiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n\big|\langle f, \frac{1}{\sqrt{n}}e_n\rangle\big|^2 = \|f\|^2.$$

Por otra parte, como $\frac{1}{\sqrt{n}}e_n \longrightarrow 0$, *por la Observación 1.1.4* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no es una sucesión de Riesz.*

iii) Consideremos la sucesión de Bessel $\{\frac{1}{\sqrt{n}}e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *del Ejemplo 1.2.2 y veamos que no es una sucesión de marco. En efecto, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big|\langle e_n, \frac{1}{\sqrt{k}}e_k\rangle\big|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|\langle e_n, e_k\rangle|^2 = \frac{1}{n}.$$

El siguiente lema establece que basta verificar la condición de marco (1.3) para un subespacio denso en H.

Lema 1.3.5. *Una familia de vectores* $\{f_i\}_{i\in I}$ *en* H *es un marco para* H *si y sólo si existen constantes* $A, B > 0$ *tales que*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \big|\langle f, f_i\rangle\big|^2 \leq B\|f\|^2 \qquad \text{para todo } f \in V,$$

con V *un subespacio denso en* H.

Observación 1.3.6. *Sea* $\{e_i\}_{i\in I}$ *una base ortonormal de H. Si* $\{f_j\}_{j\in J}$ *es una sucesión de Bessel con constante* B, *entonces* $\{f_j\}_{j\in J}\bigcup\{e_i\}_{i\in I}$ *es un marco para* H *con cota inferior 1 y cota superior* $B + 1$.

Demostración. Basta considerar las desigualdades

$$\|g\|^2 \leq \sum_{j\in J} |\langle g, f_j\rangle|^2 + \sum_{i\in I} |\langle g, e_i\rangle|^2 \leq B\|g\|^2 + \|g\|^2 = (B + 1)\|g\|^2.$$

□

Observación 1.3.7. *Si* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una sucesión de marco en* H *con cotas* A *y* B_1 *y* $\{g_j\}_{j\in J}$ *es una sucesión de Bessel con constante* B_2*, entonces* $\{f_i\}_{i\in I}\bigcup\{g_j\}_{j\in J}$ *es una sucesión de marco con cotas* A *y* B_1+B_2*.*

Demostración. Sean $\{f_i\}_{i\in I}$ una sucesión de marco en H con cotas A y B_1 y $\{g_j\}_{j\in J}$ una sucesión de Bessel con constante B_2. Luego, para toda $f\in H$, se tiene

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2 + \sum_{j\in J}|\langle f,g_j\rangle|^2 \leq (B_1+B_2)\|f\|^2.$$

□

Observación 1.3.8. *Si* $\{f_i\}_{i=1}^m$ *es una sucesión finita de elementos en un espacio de Hilbert* H *con algún* $f_i\neq 0$*, entonces resulta una sucesión de marco con cota superior* $B:=\sum_{i=1}^m\|f_i\|^2$*.*

Demostración. Sea $V:=\text{gen}\{f_i\}_{i=1}^m$. Dado $f\in V$ se tiene que $\sum_{i=1}^m|\langle f,f_i\rangle|^2\leq\sum_{i=1}^m\|f\|^2\|f_i\|^2=(\sum_{i=1}^m\|f_i\|^2)\|f\|^2$. Luego, $\{f_i\}_{i=1}^m$ es sucesión de Bessel con constante de Bessel $B:=\sum_{i=1}^m\|f_i\|^2$.

Ahora veamos que $\{f_i\}$ admite cota inferior positiva. Sea $\phi:V\to\mathbb{R}$ la función definida por $\phi(f):=\sum_{i=1}^m|\langle f,f_i\rangle|^2$. Como $\varphi_i:V\to\mathbb{C}$ definida por $\varphi_i(f):=\langle f,f_i\rangle$ es continua para todo i, entonces ϕ lo es.

Sea S la esfera unitaria de V, que es compacta. Sea A el mínimo valor que alcanza ϕ sobre S. Luego, existe $g\in V$ con $\|g\|=1$ tal que

$$A=\min\phi(S)=\min\left\{\sum_{i=1}^m|\langle f,f_i\rangle|^2/f\in V,\|f\|=1\right\}=\sum_{i=1}^m|\langle g,f_i\rangle|^2. \tag{1.8}$$

Entonces $A>0$, si no, $\langle g,f_i\rangle=0$ para todo $i=1,\ldots,m$, y como $V=\text{gen}\{f_i\}_{i=1}^m$, resulta $g=0$, lo cual es un absurdo pues $\|g\|=1$.

Sea $f\in V$ no nulo. De (1.8) tenemos que

$$\sum_{i=1}^m|\langle f,f_i\rangle|^2=\sum_{i=1}^m|\langle\frac{f}{\|f\|},f_i\rangle|^2\|f\|^2\geq A\|f\|^2,$$

lo cual completa la demostración. □

Lema 1.3.9. *Sea* $\{f_i\}_{i=1}^m$ *un marco para* V *un espacio vectorial con* $\dim V = n$*, y sea* $S\colon V \to V$ *el operador de marco. Luego,*

a) S tiene exactamente n autovalores contados con su multiplicidad, y son todos reales.

b) El menor autovalor y el mayor autovalor de S son cotas inferior y superior del marco respectivamente. Además, son cotas óptimas y los autovalores de S son positivos.

c) Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de S contados con su multiplicidad. Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^2$$

Demostración. Veamos que valen *a)* y *b)*:

Como S es autoadjunto, V tiene una base ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^n$ formada por autovectores de S. Sean $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ los correspondientes autovalores que, por ser S es autoadjunto, resultan reales.

Por otro lado, como todo $f \in V$ se puede escribir como $f = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k\rangle e_k$, tenemos que

$$Sf = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle S e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k\rangle e_k. \tag{1.9}$$

Por la definición de S, vale que $Sf = \sum_{i=1}^m \langle f, f_i\rangle f_i$, lo que implica que

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle f, f_i\rangle \langle f_i, f\rangle = \sum_{i=1}^{m} |\langle f, f_i\rangle|^2. \tag{1.10}$$

De (1.9) y (1.10) tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle f, f_i\rangle|^2 = \langle Sf, f\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k\rangle\langle e_k, f\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\langle f, e_k\rangle|^2,$$

de donde se deduce que

$$0 < \lambda_{\min}\|f\|^2 = \lambda_{\min} \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 \le \sum_{i=1}^{m} |\langle f, f_i\rangle|^2 \le \lambda_{\max} \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \lambda_{\max}\|f\|^2.$$

Luego, $\lambda_{\min}$ y $\lambda_{\max}$ son cotas para el marco. Además, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} |\langle e_j, f_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i |\langle e_j, e_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_{ji} = \lambda_j$ para todo $j = 1, \dots, n$. Entonces, las cotas son óptimas y todos los autovalores son positivos.

Finalmente, de (1.10) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\|e_k\|^2=\sum_{k=1}^{n}\langle Se_k,e_k\rangle=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\langle e_k,f_i\rangle|^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|\langle f_i,e_k\rangle|^2=\sum_{i=1}^{m}\|f_i\|^2,$$

de donde se obtiene *c)*. □

Consideremos una sucesión de elementos $\{f_i\}_{i\in I}$ en $L^2(\mathbb{R})$. Como se tiene que $\text{gen}\{\mathcal{F}f_i\}=\mathcal{F}(\text{gen}\{f_i\})$ y que la Transformada de Fourier $\mathcal{F}$ en $L^2(\mathbb{R})$ es una isometría, entonces por el Lema 1.3.5, tenemos la siguiente observación:

Observación 1.3.10. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una sucesión de elementos en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces, $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de marco con cotas A y B si y sólo si $\{\mathcal{F}f_i\}_{i\in I}$ lo es.*

De la definición de marco, se tiene el siguiente resultado inmediato:

Observación 1.3.11. *Una sucesión $\{f_i\}_{i\in I}$ en H es un marco con cotas A y B si y sólo si existe un operador acotado $R\colon H\to\ell^2(I)$ definido por $Rf\colon=\{\langle f,f_i\rangle\}_{i\in I}$ que cumple*

$$A\|f\|^2\le\|Rf\|^2\le B\|f\|^2\qquad\textit{para todo } f\in H.$$

Tomando operadores adjuntos, se tiene:

Observación 1.3.12. *Una sucesión $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco con cotas A y B si y sólo si existe un operador acotado y suryectivo $T\colon\ell^2(I)\to H$ definido por $Te_i\colon=f_i$ que cumple*

$$A\|a\|^2\le\|Ta\|^2\le B\|a\|^2\qquad\textit{para todo } a\in(Nu\ T)^\perp.$$

Demostración. Supongamos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco con cotas A y B. Luego, por la Observación 1.3.11 existe $R\colon H\to\ell^2(I)$ un operador acotado con $Rf\colon=\{\langle f,f_i\rangle\}_{i\in I}$ que cumple

$$A\|f\|^2\le\|Rf\|^2\le B\|f\|^2\qquad\text{para todo } f\in H.$$

Sea $T\colon=R^*$, veamos que cumple las condiciones deseadas. Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de $\ell^2(I)$. Es fácil ver que $Te_i\colon=f_i$. En efecto, para todo $f\in H$, $\langle f,Te_i\rangle_H=\langle Rf,e_i\rangle_{\ell^2(I)}=\langle f,f_i\rangle_H$.

Ahora veamos que T es suryectivo. Dada $f\in H$, $f=\sum_{i\in I}\langle f,S^{-1}f_i\rangle f_i=\sum_{i\in I}\langle S^{-1}f,f_i\rangle f_i$ con $S\colon H\to H$ el operador de marco. $R(S^{-1}f)=\{\langle S^{-1}f,f_i\rangle\}_{i\in I}\in\ell^2(I)$ y, por lo tanto, $T(R(S^{-1}f))=\sum_{i\in I}\langle S^{-1}f,f_i\rangle f_i=f$.

Tomemos $a \in (\text{Nu } T)^{\perp}$ y veamos que $A\|a\|^2 \leq \|Ta\|^2 \leq B\|a\|^2$. Por la Observación 1.3.11, se tiene que $\|T\|^2 = \|R\|^2 \leq B$, de donde se deduce la segunda desigualdad. Ahora veamos que $A\|a\|^2 \leq \|Ta\|^2$. Como R es acotado inferiormente, $\text{Rg}(R)$ es cerrado. Luego, dado $b \in \ell^2(I)$, $b = x + y$ con $x \in \text{Rg}(R)$ e $y \in (\text{Rg}(R))^{\perp}$. Como $(\text{Rg}(R))^{\perp} = \text{Nu }(R^*) = \text{Nu } T$, se tiene que $\langle a, b\rangle = \langle a, x\rangle$ con $x = Rf$ para algún $f \in H$ y $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|b\|^2$. Entonces, $|\langle a, b\rangle|^2 = |\langle a, Rf\rangle|^2 = |\langle Ta, f\rangle|^2 \leq \|Ta\|^2\|f\|^2 \leq \frac{1}{A}\|Ta\|^2\|Rf\|^2 \leq \frac{1}{A}\|Ta\|^2\|b\|^2$. Como $\|a\| = \sup_{\|b\|\leq 1} |\langle a, b\rangle|$ y lo anterior vale cualquiera sea $b \in \ell^2(I)$ y $a \in (\text{Nu } T)^{\perp}$, se tiene que $A\|a\|^2 \leq \|Ta\|^2$.

Recíprocamente, supongamos que existe un operador T que cumple las condiciones dadas. Como T es suryectivo, razonando como antes, tenemos definido el operador R y $\{f_i\}$ resulta un marco para H. □

La siguiente observación nos provee otra formulación equivalente para establecer si una sucesión dada es una sucesión de marco. En adelante, para un subespacio V de H, notaremos $d(x, V)$ la distancia de $x \in H$ a V, es decir $d(x, V) = \inf_{v\in V} \|x - v\|$.

Observación 1.3.13. *Sea $T\colon \ell^2(I) \to H$ un operador acotado. Luego,*

$$A\|a\|^2 \leq \|Ta\|^2 \leq B\|a\|^2 \qquad \textit{para todo } a \in (\textit{Nu } T)^{\perp}$$

si y sólo si

$$Ad(a, \textit{Nu } T)^2 \leq \|Ta\|^2 \leq B\|a\|^2 \qquad \textit{para todo } a \in \ell^2(I).$$

Demostración. Escribamos $V :=\text{Nu } T$. El resultado se sigue de que todo $a \in \ell^2(I)$ se escribe como $a = a_V + a_{V^\perp}$ y de que $d(a, \text{Nu } T)^2 = \|a_{V^\perp}\|^2 \leq \|a\|^2$. □

En términos de una sucesión $\{f_i\}_{i\in I}$ en H se tiene:

Proposición 1.3.14. *Una sucesión $\{f_i\}_{i\in I}$ en H es una sucesión de marco con cotas A y B si y sólo si el operador lineal $T\colon c_{00}(I) \to H$ definido por $Te_i = f_i$ se extiende a un operador acotado en $\ell^2(I)$ que cumple*

$$A\|a\|^2 \leq \|Ta\|^2 \leq B\|a\|^2 \qquad \textit{para todo } a \in (\textit{Nu } T)^{\perp}.$$

Demostración. Consideremos $H = \overline{\text{gen}}\{f_i\}$. Supongamos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de marco con cotas A y B. Entonces, por las Observaciones 1.3.11 y 1.3.12, existe un operador acotado $T\colon \ell^2(I) \to H$ definido por $Te_i \colon = f_i$ que cumple

$$A\|a\|^2 \leq \|Ta\|^2 \leq B\|a\|^2 \qquad \text{para todo } a \in (\text{Nu } T)^\perp.$$

Ahora supongamos que tenemos un operador acotado $T\colon \ell^2(I) \to H$ definido por $Te_i \colon = f_i$ que cumple lo mencionado arriba. Por la condición $A\|a\|^2 \leq \|Ta\|^2$ para todo $a \in (\text{Nu } T)^\perp$, se tiene que T tiene rango cerrado. Por otro lado, como $Te_i \colon = f_i$, entonces $\text{Rg}(T) = \overline{\text{gen}}\{f_i\}$ y por las Observaciones 1.3.11 y 1.3.12, $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de marco con cotas A y B. □

Para finalizar este capítulo de resultados básicos, vamos a relacionar marcos con sucesiones de Riesz:

Proposición 1.3.15. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ en H una sucesión de marco con cotas A y B. Sea $T\colon \ell^2(I) \to H$ el operador acotado tal que $Te_i = f_i$ para todo $i \in I$. Luego, $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si T es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Riesz, luego T resulta inyectivo. En efecto, si $Ta = 0$, escribiendo $a = \sum_{i\in I} a_i e_i$, se tiene $0 = \|Ta\|^2 = \left\| \sum_{i\in I} a_i f_i \right\|^2 \geq A \sum_{i\in I} |a_i|^2 = A\|a\|^2$, de donde $a = 0$.

Ahora supongamos que T es inyectivo, y veamos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Riesz. Por la Observación 1.3.13, tenemos que

$$Ad(a, \text{Nu } T)^2 \leq \|Ta\|^2 \leq B\|a\|^2, \quad \text{para todo } a \in \ell^2(I).$$

Como $\text{Nu } T = 0$, entonces $d(a, \text{Nu } T) = \|a\|$, y por lo tanto

$$A\|a\|^2 \leq \|Ta\|^2 \leq B\|a\|^2 \qquad \text{para todo } a \in \ell^2(I).$$

Luego, dada una sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, escribiendo $a = \sum_{i\in I} a_i e_i$, como $Te_i = f_i$, se tiene el resultado. □

Proposición 1.3.16. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una sucesión de marco en H. Sus cotas óptimas son*

$$A = \|S^{-1}\|^{-1} \quad y \quad B = \|S\|.$$

Como consecuencia de las Proposiciones 1.1.12 y 1.3.16, se tiene:

Proposición 1.3.17. *Toda sucesión de Riesz es una sucesión de marco. Además, sus cotas de marco coinciden con sus cotas de Riesz.*

Capítulo 2

Marcos de Gabor

Cuando un sistema de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$ se llama *marco de Gabor* o *marco de Weyl-Hiesenberg*. Los parámetros $a, b > 0$ y la función ventana $g \in L^2(\mathbb{R})$ están fijos y los operadores en $L^2(\mathbb{R})$ involucrados son

Traslación por $a \in \mathbb{R}$: $(T_af)(x) \colon = f(x-a)$, $x \in \mathbb{R}$,

Modulación por $b \in \mathbb{R}$: $(E_bg)(x) \colon = e^{2\pi ibx}f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Las relaciones de conmutación (1.1) muestran que una modulación en el dominio tiempo se corresponde a una traslación en el dominio de la transformada de Fourier. Por esta razón, las funciones E_bT_ag se llaman *traslaciones de tiempo-frecuencia* de g y el análisis de Gabor se conoce también como el *análisis de tiempo-frecuencia*.

En general, dada una función fija $g \in L^2(\mathbb{R})$ es muy difícil encontrar el rango exacto de parámetros a, b para el cual el sistema de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco. La respuesta exacta se conoce para muy pocas funciones. Inclusive el caso $g = \chi_{[0,\alpha]}$ con $\alpha > 0$ es sorprendentemente muy difícil de estudiar, ver [7, Sec. 8.6]. Se conocen algunos resultados parciales para el estudio en $L^2(\mathbb{R})$, que mencionaremos a continuación.

Dados $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$, consideramos la función dada por la matriz bi-infinita

$$M(x) \colon = (g(x - na - m/b))_{m,n\in\mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Denotemos por $M(x)^*$ a la matriz conjugada traspuesta de $M(x)$. Se puede ver que el operador en $\ell^2(\mathbb{Z})$ dado por $M(x)M(x)^*$ es positivo. Ron y Shen caracterizaron los marcos de Gabor en términos de este operador.

Teorema 2.0.18. *Sean A y B positivos y $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ un sistema de Gabor dado. Luego, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$ con cotas A y B si y sólo si*

$$bAI \leq M(x)M(x)^* \leq bBI \quad \textit{para casi todo } x \in \mathbb{R},$$

donde I es la identidad de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Un resultado fundamental dice que el producto ab establece cuando es posible que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco para $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.0.19. *Sean $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$. Luego,*

i) Si $ab > 1$, entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no es un marco para $L^2(\mathbb{R})$.

ii) Si $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$, se tiene

$$ab = 1 \quad \textit{si y sólo si} \quad \{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \textit{ es una base de Riesz.}$$

Así, sólo es posible que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco si $ab \leq 1$. En tal caso, el marco no es una base de Riesz si $ab < 1$. Es más, cuando $ab > 1$, se puede ver que la familia $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no es completa en $L^2(\mathbb{R})$, ver [13]. La suposición $ab \leq 1$ no es suficiente para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco. Por ejemplo, si $a \in]1/2, 1[$, $\{E_m T_{na}\chi_{[0,1/2]}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no es completo en $L^2(\mathbb{R})$ y no puede ser un marco.

Se conoce una condición necesaria para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco para $L^2(\mathbb{R})$ que depende de la interacción entre la función g y el parámetro de traslación a y está expresada en términos de la siguiente función:

$$G\colon \mathbb{R} \to [0, \infty], \quad G(x)\colon = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g(x - na)\right|^2.$$

Teorema 2.0.20. *Sean $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$. Si $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$ con cotas A y B, entonces*

$$0 < bA \leq G(x) \leq bB \quad \textit{para casi todo } x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

En particular, una función g que genera un marco de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es necesariamente acotada. Notar que el Teorema 2.0.20 da una relación entre las cotas del marco y las cotas para la función G.

Por otra parte, se conoce una condición suficiente para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco para $L^2(\mathbb{R})$, que no es exactamente el recíproco del Teorema 2.0.20.

Teorema 2.0.21. *Sean $a, b > 0$. Supongamos que la función ventana $g \in L^2(\mathbb{R})$ tiene soporte en un intervalo de longitud $\leq \frac{1}{b}$ y que la función G verifica* (2.1) *para algunos A y B positivos. Entonces, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco de Gabor para $L^2(\mathbb{R})$ con cotas A y B.*

En este caso, la condición (2.1) es decisiva para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco, ya que por ejemplo $\{E_m T_{na}\chi_{[0,1/2]}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ con $a \in\,]1/2, 1[$ no es un marco para $L^2(\mathbb{R})$ a pesar de que $\chi_{[0,1/2]}$ esté soportada en un intervalo de longitud $1/2$. Notar que en este caso G se anula en $]1/2, a[\, + na$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, no hemos encontrado un ejemplo en el cual G verifique (2.1) pero $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no sea un marco.

Si bien, dada $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ puede no ser un marco para $L^2(\mathbb{R})$, podría ser un marco para un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$, por ejemplo para la clausura del subespacio que la sucesión genera.

En este capítulo, estudiaremos algunas condiciones necesarias y algunas condiciones suficientes para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea una *sucesión de marco*. Entre otros resultados, vamos a obtener versiones similares a las dadas en los Teoremas 2.0.20 y 2.0.21. Además, daremos un resultado para subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ que generaliza otros resultados conocidos para el espacio total $L^2(\mathbb{R})$.

2.1 Marcos de traslaciones y marcos de modulaciones

Con el objetivo de demostrar los resultados principales de este capítulo, comenzaremos trabajando con marcos de la forma $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (marcos de traslaciones) y de la forma $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ (marcos de modulaciones), donde $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$ están fijos.

Identifiquemos la circunferencia $\mathbb{T}$ con el intervalo $[0, 1[$ de manera estándar via la función $x \mapsto e^{2\pi i x}$. Para estudiar cuándo una sucesión de traslaciones $\{T_{na}g\}$ es un marco, necesitaremos la función auxiliar $\Phi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}\left(\frac{x+n}{a}\right)\right|^2,$$

con $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a > 0$. Sea E el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$ formado por todas la f tales que $\Phi(x)f(x) = 0$ para casi todo x. Recordar que $d(f, E)$ denota la distancia de f al subespacio E.

Veamos algunos resultados previos.

Lema 2.1.1. *La función Φ pertenece a $L^1(\mathbb{T})$ y además verifica $\hat{\Phi}(n) = a\langle T_{na}g, g\rangle$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Veamos primero que $\Phi \in L^1(\mathbb{T})$. En efecto,

$$\int_0^1 \Phi(x)dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |g(y/a)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y/a)|^2 dy = a\|g\|_2^2.$$

Por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(n) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \left|\hat{g}\left(\frac{x+m}{a}\right)\right|^2 e^{-2\pi inx} dx \\
&= a\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{m/a}^{(m+1)/a} |\hat{g}(z)|^2 e^{-2\pi i(naz - nm)} dz \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(z)|^2 e^{-2\pi inaz} dz \\
&= a\langle E_{-na}\hat{g}, \hat{g}\rangle \\
&= a\langle T_{na}g, g\rangle.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.1.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $Ad(f, E)^2 \le \frac{1}{b}\int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx \le B\|f\|^2$ *para toda* $f \in L^2(\mathbb{T})$.

b) $A\|f\|^2 \le \frac{1}{b}\int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx \le B\|f\|^2$ *para toda* $f \in E^\perp$.

Demostración. Dada $f \in E^\perp$, $d(f, E) = \|f\|$, entonces a) implica b) es inmediato.

Recíprocamente, sea $f \in L^2(\mathbb{T})$ y consideremos la descomposición natural $f = f_E + f_{E^\perp}$. Como $f_E(x)\Phi(x) = 0$ para casi todo x, tenemos que

$$|f(x)|^2\Phi(x) = (f_E(x) + f_{E^\perp}(x))(\overline{f_E(x) + f_{E^\perp}(x)})\Phi(x) = |f_{E^\perp}(x)|^2\Phi(x).$$

Además, $d(f, E)^2 = \|f_{E^\perp}\|^2$, entonces aplicando b) a $f_{E^\perp}$, se tiene a). □

Lema 2.1.3. *Sean $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a > 0$ tales que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Bessel en $L^2(\mathbb{R})$ con constante B. Entonces, $G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 \leq B$ en casi todo punto y, en particular, $|g(x)|^2 \leq B$ en casi todo punto.*

Demostración. Como $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Bessel con constante B, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, T_{na}g\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $h > 0$, consideramos $f = \frac{1}{2h}\chi_{[t-h,t+h]}$ y tenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \overline{g(y-na)}dy\Big|^2 \leq B.$$

Fijemos $n \in \mathbb{Z}$. Como $g \in L^2(\mathbb{R}) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R})$, con $h \longrightarrow 0$, se tiene

$$\sum_{k=-n}^{n} \big|g(t-ka)\big|^2 \leq B \quad \text{para casi todo } t.$$

Por lo tanto, $G(t) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=-n}^{n} |g(t-ka)|^2 \leq B$ para casi todo t. □

Ahora sí, estamos en condiciones de establecer una condición necesaria y suficiente para que la sucesión de traslaciones $\{T_{na}g\}$ sea un marco.

Teorema 2.1.4. *Sean $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a > 0$. Luego, $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B si y sólo si para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$, tenemos*

$$Ad(f,E)^2 \leq \frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx \leq B\|f\|^2, \tag{2.2}$$

o equivalentemente, para toda $f \in E^\perp$,

$$A\|f\|^2 \leq \frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx \leq B\|f\|^2. \tag{2.3}$$

Además, si se satisface alguna de estas condiciones, entonces $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si $E = \{0\}$.

Demostración. El Lema 2.1.3 da la equivalencia entre (2.2) y (2.3).

Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la base canónica de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Sea $T\colon c_{00}(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{R})$ el operador lineal definido por $Te_n \colon = T_{na}g$.

Primero, supongamos que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B y veamos que vale (2.2). Por la Proposición 1.3.14, T se extiende a un operador acotado en $\ell^2(\mathbb{Z})$ y, por la Observación 1.3.13, satisface

$$Ad(u, \text{Nu } T)^2 \leq \|Tu\|^2 \leq B\|u\|^2 \quad \text{para todo } u \in \ell^2(\mathbb{Z}). \tag{2.4}$$

Sea $U\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ la isometría natural definida por $Uf\colon = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$. Veamos que $\|TUf\|^2 = \frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx$ para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$. En efecto, dada $f \in L^2(\mathbb{T})$, como $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$, f se escribe $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$ (en el sentido de L^2) y, como por el Lema 2.1.3 g es acotada en $\mathbb{T}$, se tiene

$$f(x)g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}g(x).$$

Luego, para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|TUf\|^2 &= \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)T_{na}g\Big\|^2 \\
&= \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)E_{-na}\hat{g}\Big\|^2 \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^{1/a} \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{-2\pi inay}\hat{g}\big(y+\frac{m}{a}\big)\Big|^2 dy \qquad (2.5)\\
&= \frac{1}{a}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \Big|f(x)\hat{g}\big(\frac{x+m}{a}\big)\Big|^2 dx \\
&= \frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Luego, $f \in E$ si y sólo si $Uf \in \text{Nu } T$, esto es $E = U^{-1}\text{Nu } T$ o equivalentemente $U(E) = \text{Nu } T$. Como U es una isometría, $d(f,E) = d(Uf, UE) = d(Uf, \text{Nu } T)$. Luego de (2.4) y (2.5) tenemos que

$$Ad(f,E)^2 \leq \frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx \leq B\|f\|^2 \quad \text{para toda } f \in L^2(\mathbb{T}),$$

como queríamos probar.

Ahora, supongamos que vale (2.2) y veamos que $\{T_{na}g\}$ es una sucesión de marco con las cotas dadas. Afirmamos que g resulta acotada en $\mathbb{T}$. Procedemos como en el Lema 2.1.3. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $h > 0$, consideramos $f = \frac{1}{2h}\chi_{[t-h,t+h]}$. Por (2.2), $\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \Phi \leq aB$ y por el Lema 2.1.1, $\Phi \in L^1(\mathbb{T})$. Así, $|g(t)|^2 \leq \Phi(t) \leq aB$ para casi todo $t \in \mathbb{T}$.

Por otra parte, de (2.5), tomando $f = U^{-1}u$ para $u \in c_{00}(\mathbb{Z})$, se tiene que

$$\|Tu\|^2 = \frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx \leq B\|f\|^2 = B\|u\|^2.$$

Luego, por densidad, T se extiende a un operador acotado en $\ell^2(\mathbb{Z})$, conservando las desigualdades de las normas. Además, como g es acotada, vale (2.5) para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$, y como $d(f,E) = d(Uf,V)$ para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$, entonces se satisface (2.4) para todo $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$. La Observación 1.3.13 y la Proposición 1.3.14 muestran que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B.

Para finalizar la demostración, si se satisface (2.2), por la Proposición 1.3.15 y como $U(E) = V = \text{Nu}\, T$, tenemos que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si $U(E) = 0$, lo que equivale a $E = 0$. □

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar los resultados fundamentales sobre marcos de traslaciones y marcos de modulaciones.

Teorema 2.1.5. *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces, $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B si y sólo si*

$$0 < aA \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}\left(\frac{x+n}{a}\right)\right|^2 \leq aB \quad \textit{para casi todo } x \textit{ tal que } \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}\left(\frac{x+n}{a}\right)\right|^2 \neq 0. \qquad (2.6)$$

En tal caso, $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}\left(\frac{x+n}{a}\right)\right|^2 = 0$ tiene medida nula.

Demostración. Sea $N_\Phi :\, = \{x \in \mathbb{T}/\Phi(x) = 0\}$. Notamos por $L^2(N_\Phi)$ al conjunto de todas las funciones en $L^2(\mathbb{T})$ que se anulan en $\mathbb{T} \setminus N_\Phi$. Como $\Phi > 0$ en casi todo punto de N_Φ, tenemos que $E = L^2(N_\Phi)$.

Se tiene que $d(f,E)^2 = \int_{\mathbb{T}\setminus N_\Phi} |f|^2$ para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$. En efecto, escribimos $f = f_E + f_{E^\perp}$, donde f_E miminiza el conjunto $\{\|f-h\|_2^2/h \in L^2(N_\Phi)\}$ y $\|f-h\|_2^2 = \int_{N_\Phi} |f-h|^2 + \int_{\mathbb{T}\setminus N_\Phi} |f|^2$ para toda $h \in L^2(N_\Phi)$, entonces $f_E = f\chi_{N_\Phi}$ y, por lo tanto, $f_{E^\perp} = f - f_E = f\chi_{\mathbb{T}\setminus N_\Phi}$.

Primero supongamos que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B y veamos que vale (2.6). Por el Teorema 2.1.4, para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$, tenemos que

$$aA\int_{\mathbb{T}\setminus N_\Phi} |f|^2 \leq \int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx \leq aB\|f\|^2.$$

Por lo tanto, para casi todo $x \in \mathbb{T} \setminus N_\Phi$, tenemos que

$$aA \leq \Phi(x) \leq aB.$$

Supongamos que esto último no es cierto. Entonces, existe $Z \subseteq \mathbb{T} \setminus N_\Phi$ con $|Z| > 0$ tal que $aA > \Phi(x)$ para todo $x \in Z$ o $\Phi(x) > aB$ para todo $x \in Z$. En cualquiera de los dos casos, tomando $f \colon = \frac{1}{\sqrt{|Z|}}\chi_Z$ e integrando en $\mathbb{T}$, se llega a una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que vale (2.6), es decir,

$$aA \leq \Phi(x) \leq aB \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{T} \setminus N_\Phi.$$

Multiplicando la desigualdad anterior por $|f(x)|^2$, integrando en $\mathbb{T}$ y usando que $d(f, E)^2 = \int_{\mathbb{T}\setminus N_\Phi} |f|^2$ y $\int_{\mathbb{T}\setminus N_\Phi} |f(x)|^2\Phi(x)dx = \int_0^1 |f(x)|^2\Phi(x)dx$ para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$, por el Teorema 2.1.4, se tiene que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B.

Para finalizar la demostración, supongamos que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B y veamos que vale la última afirmación. Por el Teorema 2.1.4, tenemos que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si $E = \{0\}$. Como resulta $E = L^2(N_\Phi)$, $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si N_Φ tiene medida nula.

Notar que como Φ tiene período 1, entonces $\widetilde{N_\Phi} \colon = \{x \in \mathbb{R}/\Phi(x) = 0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}(N_\Phi + m)$, y en particular, N_Φ tiene medida nula si y sólo si $\widetilde{N_\Phi}$ tiene medida nula. De esta manera, que demostrado el teorema. $\square$

Dados dos parámetros $a, b > 0$ distintos, uno puede preguntarse si cada vez que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco, entonces $\{T_{nb}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ también lo es. El Teorema 2.1.6 nos da una respuesta a este interrogante.

Teorema 2.1.6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < b < a$. Entonces,*

1. *Existe una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco pero $\{T_{nb}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no lo es.*

2. *Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ y $\{T_{nb}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco, entonces $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ también lo es.*

3. *Si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$, entonces existe una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{T_{nb}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco pero $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no lo es.*

Demostración. Para esta demostración escribimos la función auxiliar Φ en términos de los parámetros a y b, es decir,

$$\Phi_a(x) \colon = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}\big(\frac{x+n}{a}\big)\right|^2 \quad \text{y} \quad \Phi_b(x) \colon = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}\big(\frac{x+n}{b}\big)\right|^2.$$

El Teorema 2.1.5 muestra que $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco si y sólo si Φ_a es acotada por arriba y por debajo en casi todo punto en $\mathbb{T}\setminus N_a$, donde $N_a\colon = \{x\in\mathbb{T}/\Phi_a(x)=0\}$. La misma afirmación también es válida para Φ_b.

1. Definimos una función $g\in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\hat{g}(x)\colon = \begin{cases} 1 & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{a}, \\ \frac{ab}{b-a}\big(x-\frac{1}{b}\big) & \text{si } \frac{1}{a}\le x\le \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, para $x\in[\frac{b}{a},1]$, se tiene que

$$\Phi_b(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}\big(\frac{x+n}{b}\big)\right|^2 = \hat{g}\big(\frac{x}{b}\big)^2 = \frac{ab}{b-a}\big(\frac{x}{b}-\frac{1}{b}\big).$$

Así, Φ_b no es acotada por debajo en $\mathbb{T}$ y, por lo tanto, $\{T_{nb}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no es una sucesión de marco.

Por otra parte, si $x\in\mathbb{T}$, $\frac{x}{a}\in[0,\frac{1}{a}[$, entonces $\Phi_a(x)\ge\hat{g}(\frac{x}{a})^2=1$. Así, Φ_a está acotada por debajo en $\mathbb{T}$. Como además $\hat{g}$ es acotada y tiene soporte compacto, Φ_a es acotada por arriba, resultando $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de marco.

2. Supongamos que $\frac{a}{b}\in\mathbb{Z}$ y $\{T_{nb}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco. Luego, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $a=mb$. Por el algoritmo de división por m, tenemos que

$$\Phi_a(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}\big(\frac{x+n}{mb}\big)\right|^2 = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}\big(\frac{\frac{x}{m}+\frac{k}{m}+l}{b}\big)\right|^2 = \sum_{k=0}^{m-1}\Phi_b\big(\frac{x+k}{m}\big).$$

Entonces, como $\Phi_b\ge 0$ es acotada por arriba y por debajo en casi todo punto en $\mathbb{T}\setminus N_b$, Φ_a resulta acotada por arriba y por debajo en casi todo punto en $\mathbb{T}\setminus N_a$ y, por lo tanto, $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de marco.

3. Supongamos que $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Z}$. Entonces, existe un único $k\in\mathbb{Z}$ tal que $\frac{k}{a}<\frac{1}{b}<\frac{k+1}{a}$. Tomando $0<\epsilon<\min\{\frac{k+1}{a}-\frac{1}{b},\frac{1}{b}-\frac{k}{a}\}$, se tiene que

$$\frac{x+n}{a}\notin\big[\frac{1}{b},\frac{1}{b}+\epsilon\big] \quad \text{para todo } n\in\mathbb{Z} \text{ y todo } 0<x<\epsilon. \tag{2.7}$$

Definimos una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\hat{g}(x)\colon = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{a}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{b} \leq x \leq \frac{1}{b} + \epsilon, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, si $x \in \mathbb{T}$, $0 < \frac{x}{a} < \frac{1}{a}$ y, por (2.7), tenemos que

$$\Phi_a(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left|\hat{g}\left(\frac{x+n}{a}\right)\right|^2 = \hat{g}\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2.$$

Así, Φ_a no es acotada por debajo en $\mathbb{T} \setminus N_a$, de donde $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no es una sucesión de marco.

Ahora veamos que $\{T_{nb}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco. Basta ver que Φ_b es acotada por arriba y por debajo en $\mathbb{T} \setminus N_b$. Como $\hat{g}$ es acotada y tiene soporte compacto, Φ_b es acotada por arriba. Sea $0 < c < \min\{\epsilon, \frac{1}{a}\}$. Sea $x \in \mathbb{T} \setminus N_b$. Como $\Phi_b(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}(\frac{x+n}{b})\right|^2 \neq 0$, $\frac{x+n}{b} \in [0, \frac{1}{a}] \bigcup [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon]$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Si $\frac{x+n}{b} \in [0, c]$, $\frac{x+n+1}{b} \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon]$ y, por lo tanto, $\Phi_b(x) \geq \hat{g}(\frac{x+n+1}{b})^2 = 1$. Si $\frac{x+n}{b} \in [c, 1[$, $\Phi_b(x) \geq \hat{g}(\frac{x+n}{b})^2 \geq c^2$. Así, Φ_b es acotada por debajo en $\mathbb{T} \setminus N_b$. $\square$

Para trabajar con ciertos marcos de modulaciones, la función $G\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$, definida en la introducción de este capítulo, tendrá un rol importante. Recordar que

$$G(x)\colon = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g(x - na)\right|^2.$$

Consideremos el conjunto

$$N_G\colon = \left\{x \in \mathbb{R} / G(x) = 0\right\},$$

es decir el soporte de G, $sop(G)$ y $\mathbb{R} \setminus N_G$ coinciden salvo un conjunto de medida nula. En adelante, usaremos este hecho sin hacer mención explícita.

Corolario 2.1.7. *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Luego, $\{E_{\frac{n}{a}}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B si y sólo si*

$$0 < \frac{A}{a} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g(x - na)\right|^2 \leq \frac{B}{a} \quad \textit{para casi todo } x \in \mathbb{R} \setminus N_G.$$

En tal caso, $\{E_{\frac{n}{a}}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si N_G tiene medida nula.

Demostración. Utilizando el cambio de variable $x = ay$, tenemos que para casi todo $x \in \mathbb{R} \setminus N_G$ la desigualdad

$$0 < \frac{A}{a} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g(x - na)\right|^2 \leq \frac{B}{a}$$

es válida si y sólo si para casi todo y tal que $ay \in \mathbb{R} \setminus N_G$ la desigualdad

$$0 < \frac{A}{a} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g\big((y - n)a\big)\right|^2 \leq \frac{B}{a}$$

es válida. Esto último es equivalente a pedir que

$$\frac{1}{a}A \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g\big((y + n)a\big)\right|^2 \leq \frac{1}{a}B \quad \text{para casi todo } y \text{ con } \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g\big((y + n)a\big)\right|^2 \neq 0. \qquad (2.8)$$

Luego, por el Teorema 2.1.5, la condición dada por (2.8) es equivalente a pedir que $\{T_{\frac{n}{a}}\check{g}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea una sucesión de marco con cotas A y B, lo cual por la Observación 1.3.10 equivale a que $\{\mathcal{F}T_{\frac{n}{a}}\check{g}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea una sucesión de marco con las mismas cotas. Finalmente, por las relaciones de conmutación (1.1), esta última condición es equivalente a que $\{E_{\frac{n}{a}}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea una sucesión de marco con cotas A y B.

Por otra parte, de (1.1) y por la Observación 1.1.10, se tiene que $\{T_{\frac{n}{a}}\check{g}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si $\{E_{\frac{n}{a}}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ lo es.

Así, el Teorema 2.1.5 asegura que $\{T_{\frac{n}{a}}\check{g}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si $\big\{y \in \mathbb{R} / \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g\big((y + n)a\big)\right|^2 = 0\big\}$ tiene medida nula, o equivalentemente

$$N_G = \Big\{x \in \mathbb{R} / \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g\big(x + na\big)\right|^2 = 0\Big\}$$

tiene medida nula.

De esta manera, queda completada la demostración. $\square$

2.2 Marcos para subespacios de $L^2(\mathbb{R})$

Los resultados obtenidos para sucesiones de marcos de traslaciones y de modulaciones van a ser de utilidad para estudiar el tema central de este capítulo: las sucesiones de marcos dadas por un sistema de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$.

Comencemos definiendo $L^2(\mathbb{R}\setminus N_G)$ como el conjunto de funciones en $L^2(\mathbb{R})$ que se anulan en N_G. Notar que $L^2(\mathbb{R}\setminus N_G)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$ y las funciones de $L^2(\mathbb{R}\setminus N_G)$ acotadas con soporte compacto forman un subconjunto denso.

Observación 2.2.1. *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Luego, $\overline{gen}\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \subseteq L^2(\mathbb{R}\setminus N_G)$.*

Demostración. Notar que $sop(E_{mb}T_{na}g) \subseteq sop(T_{na}g) \subseteq sop(G)$ para todo $m,n \in \mathbb{Z}$. Además, $L^2(\mathbb{R}\setminus N_G)$ es cerrado en $L^2(\mathbb{R})$, de donde se sigue el enunciado. $\square$

A continuación, veremos un resultado importante acerca de funciones acotadas con soporte compacto:

Lema 2.2.2. *Sean $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$.*

a) Supongamos que $G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2$ es acotada. Luego, para toda función acotada f con soporte compacto, se tiene

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\right|^2 = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 G(x)dx + \frac{1}{b}\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} f(x-k/b) \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}dx.$$

b) Si g es acotada con soporte en un intervalo I de longitud $|I| \leq \frac{1}{b}$, entonces para toda función acotada f con soporte compacto, se tiene

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\right|^2 = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 G(x)dx.$$

Demostración. Veamos que vale a). Sea f acotada con soporte compacto. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, consideramos la función periódica, de período $\frac{1}{b}$,

$$F_n(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}.$$

Cada F_n está bien definida, ya que al ser f de soporte compacto, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x-k/b) \neq 0$ sólo para finitos valores de k. Además, la cantidad de valores de k para los cuales $f(x-k/b) \neq 0$ está uniformemente acotada. En efecto, para $x \in \mathbb{R}$, consideremos $A_x := \left\{k \in \mathbb{Z} / f(x-k/b) \neq 0\right\} \subseteq \mathbb{Z}$. Veamos que existe $C > 0$ tal que $|A_x| \leq C$ para casi todo x. Existe $M > 0$ tal que $sop(f) \subseteq [-M, M]$. Ahora, dado $x \in \mathbb{R}$, resulta que $\frac{m}{b} \leq x < \frac{m}{b} + \frac{1}{b}$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Si $f(x - k/b) \neq 0$, entonces $|\frac{k}{b} - x| \leq M$, lo que implica que $\frac{m}{b} - M \leq x - M \leq \frac{k}{b} \leq x + m \leq \frac{m}{b} + \frac{1}{b} + M$, de donde $m - bM \leq k \leq m + 1 + bM$, es decir, k pertenece a un intervalo de longitud $C\colon = 1 + 2bM$.

Por otro lado, tenemos que existen $D_1, D_2 > 0$ tales que $|f(x)| \leq D_1$ y $|G(x)| \leq D_2$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, como $\alpha \leq \alpha^2 + 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}|F_n(x)| &\leq D_1 \sum_{k \in A_x} \left|g(x - na - k/b)\right| \leq D_1 \sum_{k \in A_x} \left(|g(x - na - k/b)|^2 + 1\right)\\ &\leq D_1 |A_x| (D_2 + 1) \leq D_1 C (D_2 + 1).\end{aligned}$$

Luego, F_n es acotada. Así, $F_n \in L^1]0, 1/b[\bigcap L^2]0, 1/b[$. Más aún, $\widetilde{F_n} \in L^1]0, 1/b[\bigcap L^2]0, 1/b[$, donde $\widetilde{F_n}(x)\colon = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x - k/b)\overline{g(x - na - k/b)}|$. Como f es acotada con soprte compacto y $g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||\overline{g(x - na)}||e^{-2\pi imbx}|dx < \infty$. Luego,

$$\begin{aligned}\langle f, E_{mb} T_{na} g \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k/b}^{(k+1)/b} f(x)\overline{g(x - na)} e^{-2\pi imbx} dx\\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{1/b} f(t - k/b)\overline{g(t - k/b - na)} e^{-2\pi imbt + 2\pi imk} dt\\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{1/b} f(t - k/b)\overline{g(t - k/b - na)} e^{-2\pi imbt} dt\\ &= \int_0^{1/b} F_n(t) e^{-2\pi imbt} dt,\end{aligned} \tag{2.9}$$

donde la última igualdad se debe a que $\widetilde{F_n} \in L^1]0, 1/b[$.

Por otra parte, como $\{\sqrt{b} E_{mb}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2]0, 1/b[$ y $F_n \in L^2]0, 1/b[$, se tiene que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \Big| \int_0^{1/b} F_n(x) e^{-2\pi imbx} dx \Big|^2 = \frac{1}{b} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left|\langle F_n, \sqrt{b} E_{mb} \rangle_{L^2(0,1/b)}\right|^2 = \frac{1}{b} \int_0^{1/b} |F_n|^2 dx. \tag{2.10}$$

Ahora, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left|g(x - na)\overline{g(x - na - k/b}\right| \leq G(x)^{\frac{1}{2}} G(x - k/b)^{\frac{1}{2}} \leq D_2$ para casi todo x. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\overline{f(x)} f(x - k/b)\right| &\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left|g(x - na)\overline{g(x - na - k/b)}\right| dx\\ &\leq D_2 \int_{sop(f)} \sum_{k \in A_x} |\overline{f(x)}||f(x - k/b)|\\ &\leq D_2 D_1^2 C |sop(f)| < \infty.\end{aligned} \tag{2.11}$$

De (2.9) y (2.10), obtenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\int_0^{1/b} F_n(x)e^{-2\pi imbx}dx\right|^2 = \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{1/b}|F_n(x)|^2dx.$$

Escribiendo $|F_n(x)|^2 = \overline{F_n(x)}F_n(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\overline{f(x-l/b)}g(x-na-l/b)F_n(x)$, de (2.11) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\right|^2 =&\frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{1/b}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\overline{f(x-l/b)}g(x-na-l/b)F_n(x)dx\\ =&\frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}g(x-na)F_n(x)dx\\ =&\frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}g(x-na)\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}dx\\ =&\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2G(x)dx+\\ &\frac{1}{b}\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}f(x-k/b)\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}dx.\end{aligned}$$

Ahora veamos que vale b). Como g está soportada en un intervalo I de longitud $|I|\leq\frac{1}{b}$, entonces $g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}=0$ para todo $k\neq 0$. Siguiendo la demostración de a), se obtiene el resultado. □

El siguiente resultado da una condición suficiente para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea una sucesión de marco. Esta condición es significativamente más débil que algunas condiciones suficientes conocidas para marcos en $L^2(\mathbb{R})$. Este hecho se estudiará en la siguiente sección.

Teorema 2.2.3. *Sean $g\in L^2(\mathbb{R})$ y $a,b>0$. Supongamos que*

1. $A:=\inf_{x\in[0,a]\setminus N_G}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)|^2-\sum_{k\neq 0}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}\right|\right]>0,$
2. $B:=\sup_{x\in[0,a]}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}\right|\right]<\infty.$

Entonces, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R}\setminus N_G)$ con cotas $\frac{A}{b}$ y $\frac{B}{b}$.

Demostración. Notar que, por la Observación 2.2.1, $\overline{\text{gen}}\{E_{mb}T_{na}g\} \subseteq L^2(\mathbb{R} \setminus N_G)$. Luego, la sucesión $\{E_{mb}T_{na}g\}$ podrá, a lo sumo, ser un marco para este subespacio.

Primero observamos que $G(x) \leq B$ para casi todo $x \in [0, a]$ y, por ser a-periódica, $G(x) \leq B$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R} \setminus N_G)$ acotada. Por el Lema 2.2.2,

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\right|^2 =& \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 G(x)dx + \\ & \frac{1}{b}\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} f(x-k/b) \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}dx.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Queremos estimar el segundo término de (2.12). Para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos la función

$$H_k(x) :\ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\overline{T_{na+k/b}g(x)}.$$

Como $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha T_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\sum_{k\neq 0}\left|T_{-k/b}H_{k(x)}\right| = \sum_{k\neq 0}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na-k/b}g(x)\overline{T_{na}g(x)}\Big| = \sum_{k\neq 0}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{T_{na+k/b}g(x)}T_{na}g(x)\Big| = \sum_{k\neq 0}\left|H_k(x)\right|.$$

Luego, usando oportunamente el cambio de variable $y = x - k/b$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} f(x-k/b)\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}dx\Big| \\
\leq\ & \sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\sqrt{|H_k(x)|}|T_{k/b}f(x)|\sqrt{|H_k(x)|}dx \\
\leq\ & \sum_{k\neq 0}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2|H_k(x)|dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |T_{k/b}f(x)|^2|H_k(x)|dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & \Big(\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2|H_k(x)|dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} |T_{k/b}f(x)|^2|H_k(x)|dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
=\ & \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\sum_{k\neq 0}|H_k(x)|dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\sum_{k\neq 0}|T_{-k/b}H_k(x)|dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
=\ & \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\sum_{k\neq 0}|T_{-k/b}H_k(x)|dx \\
=\ & \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\sum_{k\neq 0}|H_k(x)|dx.
\end{aligned}$$

Notar que por periodicidad, en las condiciones del teorema, A es ínfimo de $G(x) - \sum_{k\neq 0}|H_k(x)|$ en $\mathbb{R}\setminus N_G$. Por (2.12), como f está soportada en $\mathbb{R}\setminus N_G$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\right|^2 \\
\geq\ & \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)|^2 - \sum_{k\neq 0}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}\Big|\Big]dx \\
\geq\ & \frac{A}{b}\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Análogamente, por (2.12) y por ser B una cota superior para $G(x) + \sum_{k\neq 0}|H_k(x)|$ en $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\right|^2 \\
\leq\ & \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)|^2 + \sum_{k\neq 0}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}\Big|\Big]dx \\
=\ & \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\Big(G(x) + \sum_{k\neq 0}|H_k(x)|\Big)dx \\
\leq\ & \frac{B}{b}\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Hemos probado que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ cumple las condiciones de marco con cotas $\frac{A}{b}$ y $\frac{B}{b}$ para un subconjunto denso de $L^2(\mathbb{R}\setminus N_G)$. Entonces, por el Lema 1.3.5 queda probado el resultado. $\square$

El Teorema 2.2.3 brinda una manera de construir marcos de Gabor de multi-ventanas: Escribiendo $N_g :\ = \{x \in \mathbb{R}/G(x) = 0\}$, si $g_1, \ldots, g_k$ es una colección de funciones que satisfacen las condiciones del Teorema 2.2.3, entonces $\{E_{mb}T_{na}g_s\}_{m,n\in\mathbb{Z},s=1,\ldots,k}$ es un marco para $L^2(\bigcup_{s=1}^k \mathbb{R}\setminus N_{g_s})$. En particular, si $\bigcup_{s=1}^k \mathbb{R}\setminus N_{g_s} = \mathbb{R}$, entonces se obtiene un marco para $L^2(\mathbb{R})$.

La condición $G(x) \geq A > 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$ es una condición necesaria para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco para $L^2(\mathbb{R})$, como se enuncia en el Teorema 2.0.20. Sin embargo, el Teorema 2.2.3 muestra que *no* es necesario que G esté acotada por debajo en $\mathbb{R}$ para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea una sucesión de marco. Más aún, mostraremos un ejemplo de una sucesión de marco $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ para la cual G no está acotada por debajo en $\mathbb{R}\setminus N_G$.

Para funciones g soportadas en un intervalo I de longitud $|I| \leq \frac{1}{b}$ se tiene, como consecuencia del Teorema 2.2.3, la siguiente caracterización de sucesiones de marcos de Gabor, que relaciona resultados similares a los enunciados en los Teoremas 2.0.20 y 2.0.21.

Corolario 2.2.4. *Supongamos que $g \in L^2(\mathbb{R})$ está soportada en un intervalo I de longitud $|I| \leq \frac{1}{b}$. Entonces, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B si y sólo si*

$$bA \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g(x-na)\right|^2 \leq bB, \quad \textit{para casi todo } x \in \mathbb{R} \setminus N_G.$$

En ese caso, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ resulta ser un marco para el espacio $L^2(\mathbb{R} \setminus N_G)$.

Demostración. Primero supongamos que $bA \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g(x-na)\right|^2 \leq bB$ para casi todo $x \in \mathbb{R} \setminus N_G$. Por la condición sobre el soporte de g, se tiene para todo $x \in \mathbb{R}$, $g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)} = 0$ para todo $k \neq 0$. Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\sum_{k\neq 0} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)} \right| = 0.$$

Entonces, se cumplen las condiciones del Teorema 2.2.3 (cambiando A por bA y B por bB), de donde $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ resulta ser un marco para $L^2(\mathbb{R} \setminus N_G)$ con cotas A y B.

Ahora supongamos que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B. En particular, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Bessel con constante B, esto es, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Por el Lema 2.1.3, g resulta acotada. Como además g está soportada en un intervalo I de longitud $|I| \leq \frac{1}{b}$, por el Lema 2.2.2, para toda f acotada de soporte compacto tenemos que

$$\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 G(x)dx = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2,$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 G(x)dx \leq B\|f\|^2.$$

Luego, tomando para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $h > 0$, $f = \frac{1}{2h}\chi_{[t-h,t+h]}$ y haciendo tender h a 0, resulta $G(t) \leq bB$ para casi todo t.

Finalmente, veamos que $bA \leq G(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R} \setminus N_G$. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $0 < G(x) < (1-\epsilon)bA$ en un conjunto de medida positiva. Luego, existe Δ de medida positiva contenido en un intervalo $\widetilde{I}$ de longitud $|\widetilde{I}| \leq \frac{1}{b}$ tal que $0 < G(x) < (1-\epsilon)bA$ en Δ. Así, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ soportada en Δ tenemos que

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2 = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 G(x)dx \leq (1-\epsilon)A\|f\|^2. \tag{2.13}$$

Como $G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 > 0$ en Δ, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\chi_\Delta T_{ka}g$ no es la función nula. Sea $\Delta' \colon = \Delta \bigcap sop(T_{ka}g) \subseteq \widetilde{I}$.

Afirmamos que $f\colon = \chi_{\Delta'}T_{ka}g \in \overline{\text{gen}}\{E_{mb}T_{ka}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$. En efecto, como $\chi_{\Delta'} \in L^2(\widetilde{I})$ y $\{e^{2\pi imbx}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\widetilde{I})$, se tiene una escritura para $\chi_{\Delta'}$ de la forma $\chi_{\Delta'}(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{2\pi imbx}$. Como además $|T_{ka}g(x)|^2 \leq G(x) \leq bB$ para casi todo x, resulta $f = \chi_{\Delta'}T_{ka}g = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{2\pi imbx}T_{ka}g$. En particular, $f = \chi_{\Delta'}T_{ka}g \in \overline{\text{gen}}\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$.

Por otro lado, como f está soportada en Δ, f satisface (2.13), lo que contradice que A es cota inferior del marco $\{E_{mb}T_{na}g\}$.

Luego, $0 < bA \leq G(x) \leq bB$ para casi todo $x \in \mathbb{R} \setminus N_G$, como queríamos probar. De esta condición, por el Teorema 2.2.3, se tiene que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ resulta ser un marco para $L^2(\mathbb{R} \setminus N_G)$ con cotas A y B. $\square$

En lo que resta de esta sección veremos como inciden el parámetro de traslación $a > 0$ y el soporte de g para determinar cuando $\{E_{mb}T_{na}g\}$ es una sucesión de marco o de Riesz en términos de las modulaciones $\{E_{mb}g\}$. Para ésto, trabajaremos con la función auxiliar $\widetilde{G}(x)\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ dada por

$$\widetilde{G}(x)\colon = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|g(x+m/b)\right|^2.$$

Para funciones g con la propiedad que las traslaciones $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tienen soporte disjunto, se tiene otra caracterización de sucesiones de marcos de Gabor, que veremos después de los resultados que siguen a continuación.

Observación 2.2.5. *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que las traslaciones $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tienen soporte disjunto. Luego, para todos $k, m, n \in \mathbb{Z}$, se tiene* *a)* $\langle E_{mb}T_{na}g, E_{kb}T_{la}g\rangle = 0$ *si* $l \neq n$.

b) $\langle E_{mb}T_{na}g, E_{kb}T_{na}g\rangle = e^{2\pi imbna}e^{-2\pi ikbna}\langle E_{mb}g, E_{kb}g\rangle$.

Demostración. Por la condición de los soportes de las traslaciones de g, se tiene que

$$\langle E_{mb}T_{na}g, E_{kb}T_{la}g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi imbx}T_{na}g(x)e^{-2\pi ikbx}\overline{T_{la}g(x)} = 0,$$

con lo cual vale a).

El resultado de b) se sigue de considerar el cambio de variable $y = x - na$. □

Lema 2.2.6. *Sean* $g \in L^2(\mathbb{R})$ *y* $a > 0$ *tales que las traslaciones* $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *tienen soporte disjunto. Luego,* $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *es una sucesión de marco con cotas* A *y* B *si y sólo si* $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *lo es.*

Demostración. Supongamos que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B. Consideremos $f \in \text{gen}\{E_{mb}g\}$ y veamos que valen las cotas deseadas para $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}g\rangle\right|^2$. Escribiendo $f = \sum_{k\in F} a_k E_{kb}g$, con $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito, por la Observación 2.2.5, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\right|^2 &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \Big|\sum_{k\in F} a_k\langle E_{kb}g, E_{mb}T_{na}g\rangle\Big|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big|\sum_{k\in F} a_k\langle E_{kb}g, E_{mb}g\rangle\Big|^2 \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}g\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

Como $\text{gen}\{E_{mb}g\} \subseteq \text{gen}\{E_{mb}T_{na}g\}$, entonces

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}g\rangle\right|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Por el Lema 1.3.5, se sigue que $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B.

Ahora supongamos que $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B. Consideremos $f \in \text{gen}\{E_{mb}T_{na}g\}$ y veamos que valen las cotas deseadas para $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\right|^2$. Escribiendo $f = \sum_{k\in F_1, l\in F_2} c_{kl}E_{kb}T_{la}g$, con $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{Z}$ finitos, por la Observación 2.2.5, para $n \in F_2$ fijo se tiene

$$\begin{aligned} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2 &= \langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\langle E_{mb}T_{na}g, f\rangle \\ &= \sum_{k,r\in F_1} c_{kn}\overline{c_{rn}}e^{2\pi ikbna}e^{-2\pi irbna}\langle E_{kb}g, E_{mb}g\rangle\langle E_{mb}g, E_{rb}g\rangle \\ &= \Big\langle \sum_{k\in F_1} c_{kn}e^{2\pi ikbna}E_{kb}g, E_{mb}g\Big\rangle\Big\langle E_{mb}g, \sum_{r\in F_1} c_{rn}e^{2\pi irbna}E_{rb}g\Big\rangle \qquad (2.14) \\ &= \Big|\Big\langle \sum_{k\in F_1} c_{kn}e^{2\pi ikbna}E_{kb}g, E_{mb}g\Big\rangle\Big|^2. \end{aligned}$$

Notar que por lo hecho anteriormente, $|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2 = 0$ si $n \notin F_2$. Escribamos $M_n := \sum_{k\in F_1} c_{kn}e^{2\pi ikbna}E_{kb}g$.

Por otra parte, como $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B y $M_n \in \operatorname{gen}\{E_{mb}g\}$, tenemos que

$$A\|M_n\|^2 \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle M_n, E_{mb}g\rangle|^2 \leq B\|M_n\|^2,$$

y por lo tanto, de (2.14),

$$A\sum_{n\in F_2} \|M_n\|^2 \leq \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2 \leq B\sum_{n\in F_2} \|M_n\|^2.$$

Falta ver que $\|f\|^2 = \sum_{n\in F_2} \|M_n\|^2$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = \langle f, f\rangle &= \sum_{k,r\in F_1, l,s\in F_2} c_{kl}\overline{c_{rs}}\langle E_{kb}T_{la}g, E_{rb}T_{sa}g\rangle = \sum_{l\in F_2}\sum_{k,r\in F_1} c_{kl}e^{2\pi ikbla}\overline{c_{rl}e^{2\pi irbla}}\langle E_{kb}g, E_{rb}g\rangle \\ &= \sum_{l\in F_2}\langle M_l, M_l\rangle = \sum_{l\in F_2} \|M_l\|^2. \end{aligned}$$

Por el Lema 1.3.5, se sigue que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B. De esta manera queda completada la demostración. □

Lema 2.2.7. *Sean $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a > 0$ tales que las traslaciones $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tienen soporte disjunto. Luego, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz con cotas A y B si y sólo si $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ lo es.*

Demostración. Si $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz con cotas A y B, por la Observación 1.1.8 $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ también lo es.

Ahora supongamos que $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz con cotas A y B. Sea $\{c_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de escalares con finitas coordenadas no nulas. Veamos que se cumplen las cotas de Riesz para $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Procediendo de manera análoga a la demostración del Lema 2.2.6, se tiene

$$\Big\| \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{mn}E_{mb}T_{na}g\Big\|^2 = \sum_{n\in Z}\Big\| \sum_{m\in Z} c_{mn}e^{2\pi imbna}E_{mb}g\Big\|^2. \tag{2.15}$$

Escribamos $R_n := \sum_{m\in Z} c_{mn}e^{2\pi imbna}E_{mb}g$. Luego,

$$A\sum_{m\in Z}|c_{mn}e^{2\pi imbna}|^2 \le \|R_n\|^2 \le B\sum_{m\in Z}|c_{mn}e^{2\pi imbna}|^2$$

y, por (2.15), se tiene que

$$A\sum_{m,n\in Z}|c_{mn}|^2 \le \Big\| \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{mn}E_{mb}T_{na}g\Big\|^2 \le B\sum_{m,n\in Z}|c_{mn}|^2.$$

De esta manera, queda concluida la demostración. □

Proposición 2.2.8. *Sean $g \in {}^2(\mathbb{R})$ y $a > 0$ tales que las traslaciones $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tienen soporte disjunto. Luego, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B si y sólo si*

$$bA \le \sum_{m\in\mathbb{Z}}\big|g(x+m/b)\big|^2 \le bB, \quad \textit{para casi todo } x \in \mathbb{R}\setminus N_{\widetilde{G}}.$$

En ese caso, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz si y sólo si $N_{\widetilde{G}}$ tiene medida nula.

Demostración. Por el Lema 2.2.6, tenemos que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B si y sólo si $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ lo es. Ahora, el Corolario 2.1.7 asegura que $\{E_{mb}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas A y B si y sólo si

$$bA \le \sum_{m\in\mathbb{Z}}\big|g(x+m/b)\big|^2 \le bB, \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}\setminus N_{\widetilde{G}}.$$

De la misma manera se obtiene el resultado para sucesiones de Riesz. □

Ahora estamos en condiciones de mostrar que G acotada por debajo en $\mathbb{R}\setminus N_G$ por un número positivo no es una condición necesaria para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea una sucesión de marco.

Ejemplo 2.2.9. *Sean $a, b > 0$ tales que $\frac{1}{ab} \notin \mathbb{N}$. Luego, existe $0 < \epsilon < \frac{1}{b}$ tal que definiendo la función g por*

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \epsilon], \\ \sqrt{1 - (x - \frac{1}{b})^2} & \text{si } x \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$\{E_{mb}T_{na}g\}_{m\in\mathbb{Z}}$ resulta una sucesión de marco pero G no resulta acotada por debajo en $\mathbb{R} \setminus N_G$ por un número positivo.

Existe un único $r \in \mathbb{Z}$ no negativo tal que $ra < \frac{1}{b} < (r+1)a$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \min\{\frac{1}{b} - ra; (r+1)a - \frac{1}{b}\}$. Por la elección de ϵ, se tiene que la función g queda bien definida y

$$[0, \epsilon] + na \bigcap [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon] = \emptyset \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}, \tag{2.16}$$

pues $na + \epsilon \leq ra + \epsilon < \frac{1}{b}$ para todo $n \leq r$ y $\frac{1}{b} + \epsilon < (r+1)a \leq (n+1)a$ para todo $n \geq r+1$. Así, $\epsilon < a$. En efecto, si $\epsilon \geq a$, entonces $ra < \frac{1}{b} < (r+1)a \leq ra + \epsilon$, y obtendríamos que $[\frac{1}{b}, ra + \epsilon] \subseteq [ra, ra + \epsilon] \bigcap [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon] = \emptyset$, lo cual es un absurdo.

Esto nos permite mostrar que las traslaciones $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tienen soporte disjunto. En efecto, fijemos $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Como $sop(g) = [0, \epsilon] \bigcup [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon]$, entonces $sop(T_{na}g) = sop(g) + na = [0, \epsilon] + na \bigcup [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon] + na$. Por otro lado, como $0 < \epsilon < a$, entonces $[0, \epsilon] + na \bigcap [0, \epsilon] = \emptyset$ y, en particular, $[\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon] + na \bigcap [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon] = \emptyset$. Luego, por (2.16), tenemos que $\big([0, \epsilon] + na \bigcup [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon] + na\big) \bigcap \big([0, \epsilon] \bigcup [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon]\big) = \emptyset$.

Por otra parte, para $x \in [0, \epsilon]$, tenemos que

$$\widetilde{G}(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|g(x + \frac{m}{b})\right|^2 = 1.$$

En efecto, fijemos $0 \leq x \leq \epsilon$. Como $\epsilon < \frac{1}{b}$, entonces $[\frac{m}{b}, \frac{m}{b} + \epsilon] \bigcap \big([0, \epsilon] \bigcup [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon]\big) = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $m \neq 1$ y, por lo tanto, $[\frac{m}{b}, \frac{m}{b} + \epsilon] \bigcap sop(g) = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $m \neq 1$. Como $x + \frac{m}{b} \in [\frac{m}{b}, \frac{m}{b} + \epsilon]$, entonces los únicos sumandos a considerar son los correspondientes a $m = 0$ y $m = 1$, es decir, x^2 y $1 - x^2$.

Además, para $x \in]\epsilon, \frac{1}{b}[$, tenemos que $\widetilde{G}(x) = 0$, porque si $\epsilon < x < \frac{1}{b}$, entonces $x - \frac{m}{b} < 0 < \epsilon + \frac{1}{b} < x + \frac{m}{b}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $x + \frac{m}{b} \notin sop(g)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Notar que $N_{\widetilde{G}} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}]\epsilon, \frac{1}{b}[+ \frac{m}{b}$, pues $\widetilde{G} = 1$ en $[0, \epsilon]$, $\widetilde{G} = 0$ en $]\epsilon, \frac{1}{b}[$ y $\widetilde{G}$ tiene período $\frac{1}{b}$. Luego, por la Proposición 2.2.8, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco.

Por otra parte, para $x \in [0, \epsilon]$, se tiene que

$$G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g(x-na)\right|^2 = x^2.$$

En efecto, fijemos $0 < x < \epsilon$ y $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Luego, $x + na \in [0, \epsilon] + na$ y, por (2.16), $x + na \notin [\frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \epsilon]$. Además, como $[0, \epsilon] \bigcap [0, \epsilon] + na = \emptyset$, $x + na \notin [0, \epsilon]$. Luego, el único sumando no nulo corresponde a $n = 0$, que es x^2.

Así, G no admite cota inferior positiva en $\mathbb{R} \setminus N_G$. Pero se sabe que esta es una condición necesaria para que $\{E_{mb}T_{na}g\}$ sea un marco para $L^2(\mathbb{R} \setminus N_G)$, ver [10]. Entonces, $\overline{\text{gen}}\{E_{mb}T_{na}g\} \neq L^2(\mathbb{R} \setminus N_G)$. □

Para $ab > 1$ se puede construir una sucesión ortonormal teniendo todas las propiedades del Ejemplo 2.2.9. Notar que por el Teorema 2.0.19 esta sucesión nunca puede ser un marco para $L^2(\mathbb{R})$. Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 1$, la función g queda:

$$g(x) \colon = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ \sqrt{2x - x^2} & \text{si } x \in]1, 2], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Siguiendo el razonamiento del Ejemplo 2.2.9, resulta $\widetilde{G}(x) = 1$ en $\mathbb{R}$ y $G(x) = x^2$ en $]0, 1[$ y, por lo tanto, $\{E_mT_{2n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas $A = B = 1$, pero G no es acotada por debajo en $\mathbb{R} \setminus N_G = \mathbb{R}$.

Ahora veamos que $\{E_mT_{2n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión ortonormal. Como $\{E_mT_{2n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con cotas $A = B = 1$, resulta

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, E_mT_{2n}g\rangle\right|^2 = \|f\|^2 \quad \text{para toda } f \in \overline{\text{gen}}\{E_mT_{2n}g\}.$$

Además, $\|E_mT_{2n}g\| = 1$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, pues dados $m, n \in \mathbb{Z}$, $\|E_mT_{2n}g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|g(x-2n)\right|^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = 1$. Así, $\{E_mT_{2n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión ortonormal.

Si $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco, $\{T_{na}g\}_{n\in\mathbb{Z}}$ también lo es y, por el Lema 2.1.3, G es acotada por arriba. La siguiente Proposición muestra que también $\widetilde{G}$ debe serlo.

Proposición 2.2.10. *Si* $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *es una sucesión de marco con cota superior* B*, entonces*

$$\widetilde{G}(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|g(x+\frac{m}{b})\right|^2 \leq bB \quad \textit{para casi todo } x.$$

Demostración. Sea $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de marco con cota superior B. Luego, por la Observación 1.3.10, $\{\mathcal{F}^{-1}E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de marco con las misma cotas, pero por las relaciones de conmutación de $\mathcal{F}$ dadas en (1.1), $\mathcal{F}^{-1}E_{mb}T_{na}g = T_{-mb}E_{na}\check{g}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Luego, $\{T_{mb}\check{g}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de Bessel para su generado con constante B, pues dada $f \in \overline{\text{gen}}\{T_{mb}\check{g}\} \subseteq \overline{\text{gen}}\{T_{mb}E_{na}\check{g}\}$, se tiene $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, T_{mb}\check{g}\rangle|^2 \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, T_{mb}E_{na}\check{g}\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$. Por la demostración del Teorema 2.1.5 y sus resultados previos (mirando sólo la parte de las cotas superiores), tenemos que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|g(\frac{x+m}{b})\right|^2 \leq bB \quad \text{para casi todo } x.$$

El resultado se sigue de tomar el cambio de variables $y = \frac{x}{b}$. □

Es fácil ver que $\widetilde{G}$ no es necesariamente acotada por debajo. Basta considerar $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ con $g = \chi_{[0,a[}$ y $ab < 1$, que resulta un marco de Gabor aunque $\widetilde{G}(x) = 0$ para todo $x \in [a, \frac{1}{b}[$.

2.3 Algunos comentarios sobre marcos de $L^2(\mathbb{R})$

Cuando g tiene soporte en un intervalo de longitud $\leq \frac{1}{b}$, el Teorema 2.0.21 nos da una condición suficiente para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco de Gabor para $L^2(\mathbb{R})$. En tal caso, se tiene:

Teorema 2.3.1. *En las hipótesis del Teorema 2.0.21, el operador de marco* S *y su inverso* S^{-1} *de* $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *vienen dados por*

$$Sf = \frac{G}{b}f \quad \textit{y} \quad S^{-1}f = \frac{b}{G}f,$$

donde $f \in L^2(\mathbb{R})$.

En el caso que g es contínua, está soportada en un intervalo I y es positiva en el interior de ese intervalo, podemos obtener un rango de valores para los parámetros a y b para el cual $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ resulta un marco de Gabor para $L^2(\mathbb{R})$:

Corolario 2.3.2. *Supongamos que la función ventana g es contínua con soporte en un intervalo I y $g > 0$ en el interior de I. Luego, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para todo $(a,b) \in]0, |I|[\times]0, \frac{1}{|I|}[$.*

El Teorema 2.2.3 nos provee una serie de resultados conocidos acerca de condiciones suficientes para que un sistema de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco. Sin embargo, veremos mediante un ejemplo que estas condiciones resultan más restrictivas que las del Teorema 2.2.3.

Teorema 2.3.3. *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Supongamos que*

(1) Existen constantes $A, B > 0$ tales que $A \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 \leq B$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

(2) $\sum_{k\neq 0} \big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}gT_{na+\frac{k}{b}}\overline{g}\big\|_\infty < A$.

Entonces, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco de Gabor para $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Notar que si en el Teorema 2.2.3 modificamos la primera condición reemplazando "$x \in [0,a]\backslash N_G$" por "$x \in [0,a]$", obtenemos como conclusión que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ resulta un marco de Gabor para $L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto, basta ver que las condiciones dadas en este teorema implican las condiciones dadas en el Teorema 2.2.3 (con la modificación mencionada antes).

Supongamos que valen las condiciones dadas en este teorema. Veamos primero que se cumple la primera condición dada en el Teorema 2.2.3. Considerando las sumas parciales y tomando supremo,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}\Big| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[0,a]} \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}\Big|,$$

de donde

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,a]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}\Big| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}gT_{na+k/b}\overline{g}\Big\|_\infty \\
&= \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}gT_{na}\overline{g}\Big\|_\infty + \sum_{k\neq 0} \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}gT_{na+k/b}\overline{g}\Big\|_\infty \\
&= \big\|G\big\|_\infty + \sum_{k\neq 0} \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}gT_{na+k/b}\overline{g}\Big\|_\infty \\
&< B + A.
\end{aligned}$$

Para concluir con la demostración, la segunda condición dada en el Teorema 2.2.3 se sigue de las siguientes desigualdades:

$$\inf_{x\in[0,a]}\Big[G(x)-\sum_{k\neq 0}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}\Big|\Big]\geq$$
$$\inf_{x\in[0,a]}G(x)-\sup_{x\in[0,a]}\sum_{k\neq 0}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}\Big|\geq$$
$$A-\sum_{k\neq 0}\Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}}T_{na}gT_{na+k/b}\overline{g}\Big\|_{\infty}>0.$$

□

Razonando de una manera análoga al Teorema 2.3.3, se obtiene:

Teorema 2.3.4. *Sea $g\in L^2(\mathbb{R})$. Supongamos que*

(1) Existen constantes $A,B>0$ tales que $A\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)|^2\leq B$ para casi todo $x\in\mathbb{R}$,

(2) Existe una constante $0<D<A$ tal que

$$\sum_{k\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)g(x-na-k/b)|\leq D$$

para casi todo $x\in\mathbb{R}$.

Entonces, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco de Gabor para $L^2(\mathbb{R})$ con cotas $\frac{A-D}{b}$ y $\frac{B+D}{b}$.

Por otro lado, el Teorema 2.3.3 nos provee el siguiente resultado:

Corolario 2.3.5. *Sea $g\in L^2(\mathbb{R})$. Supongamos que*

(1) Existen constantes $A,B>0$ tales que $A\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)|^2\leq B$ para casi todo $x\in\mathbb{R}$,

(2) $\lim_{b\to 0}\sum_{k\neq 0}\big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}}T_{na}gT_{na+\frac{k}{b}}\overline{g}\big\|_{\infty}=0$.

Entonces, existe un $b_0>0$ tal que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco de Gabor para $L^2(\mathbb{R})$ para todo $0<b<b_0$.

Observación 2.3.6. *Si valen las condiciones del Teorema 2.3.3, entonces*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k\neq 0} \big|H_k(x)\big| < \inf_{x\in\mathbb{R}} G(x).$$

Demostración. El resultado se obtiene de las siguientes desigualdades:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k\neq 0} \big|H_k(x)\big| \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k\neq 0} \big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)T_{na+k/b}\overline{g}(x)\big| \;\leq\; \sum_{k\neq 0} \big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}gT_{na+\frac{k}{b}}\overline{g}\big\|_\infty \;<\; A \;\leq$$
$G(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. □

La ventaja del Teorema 2.2.3 es que comparamos las funciones $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2$ y $\sum_{k\neq 0} |H_k(x)|$ *puntualmente* en vez de suponer que el supremo de $\sum_{k\neq 0} |H_k(x)|$ es menor que el ínfimo de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2$. Para finalizar este capítulo, veremos un ejemplo en donde el Teorema 2.2.3 nos muestra que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$, pero sin embargo las segundas condiciones de los Teoremas 2.3.3 y 2.3.4 no se satisfacen:

Ejemplo 2.3.7. *Sean $a = b = 1$ y sea*

$$g(x) \colon = \begin{cases} 1+x & \textit{si } x \in [0,1[, \\ \frac{1}{2}x & \textit{si } x \in [1,2[, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, no valen las segundas condiciones de los Teoremas 2.3.3 y 2.3.4.

Basta ver que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.3, donde el intervalo a considerar es $[0,a] = [0,1]$. Para ésto, calculemos $G(x)$ y $\sum_{k\neq 0} |H_k(x)|$ en este intervalo.

Para $x \in [0,1[$, veamos que

$$H_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n)g(x-n-k) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2 & \text{si } k = -1 \text{ ó } k = 1, \\ \frac{5}{4}(1+x)^2 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En particular, para $k = 0$ obtenemos $H_0(x) = G(x) = \frac{5}{4}(x+1)^2$ para $x \in [0,1[$.

En efecto, dado $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0; -1$, se tiene que $g(x-n) = 0$ para casi todo $x \in [0,1[$. En particular, dado $k \in \mathbb{Z}$, si $k \neq 0; 1$, entonces $g(x+1-k) = 0$ para casi todo $x \in [0,1[$. Como $sop(g) = [0,2]$, si $|z-y| \geq 2$, $g(z)g(y) = 0$. Luego, $g(x-n)g(x-n-k) = 0$ para casi todo $x \in [0,1[$ y para todo $k \neq -1, 0, 1$. Sea $x \in [0,1[$. Si $k = -1$, $g(x-n)g(x-n+1) \neq 0$ si y sólo si $n = 0$. En tal caso, $H_{-1}(x) = g(x)g(x+1)$. Si $k = 0$, $g(x-n)g(x-n) \neq 0$ si y sólo si $n = 0$ o $n = 1$. En tal caso, $H_0(x) = g(x)^2 + g(x+1)^2$. Si $k = 1$, $g(x-n)g(x-n-1) \neq 0$ si y sólo si $n = -1$. Así, $H_1(x) = g(x+1)g(x)$. Es decir, para $x \in [0, 1[$,

$$H_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2 & \text{si } k = -1 \text{ ó } k = 1, \\ \frac{5}{4}(1+x)^2 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $|N_G| = 0$. Veamos que se cumplen las condiciones del Teorema 2.2.3 con $A = \frac{1}{4}$ y $B = 9$. La cota superior es

$$B = \sup_{x \in [0,1[} \left[\frac{1}{2}(1+x)^2 + \frac{5}{4}(1+x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 \right] = 9$$

y la cota inferior es

$$A = \inf_{x \in [0,1[} \left[\frac{5}{4}(1+x)^2 - (1+x)^2 \right] = \frac{1}{4}.$$

En estas condiciones, podemos asegurar que $\{E_m T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo,

$$\sum_{k \neq 0} \|H_k\|_\infty = \sum_{k \neq 0} \Big\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n g T_{n+k} \overline{g} \Big\|_\infty = \sup_{x \in [0,1[} \frac{1}{2}(1+x)^2 + \sup_{x \in [0,1[} \frac{1}{2}(1+x)^2 = 4 > \frac{1}{4} = A,$$

lo que muestra que no vale la segunda condición del Teorema 2.3.3.

Por otra parte, si $x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 0]$,

$$\sum_{k \neq 0} |H_k(x)| = \sum_{k \neq 0} \Big| \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x-n) \overline{g(x-n-k)} \Big| = (1+x)^2 \geq 1 > \frac{1}{4} = A,$$

de este modo no vale la segunda condición del Teorema 2.3.4. □

Capítulo 3

Marcos y la Conjetura de Feichtinger

En este capítulo estudiaremos la Conjetura de Feichtinger, que establece que *todo marco puede escribirse como una unión finita de sucesiones de Riesz*. Esta conjetura tiene una formulación para espacios de dimensión finita conocida como la Conjetura *finita* de Feichtinger. Ambas, tienen sus respectivas formulaciones en términos de sucesiones de Bessel. El resultado fundamental de Bourgain y Tzafriri conocido como Teorema de la *Invertibilidad Restringida* da origen a una quinta conjetura en término de operadores sobre espacios euclídeos. Veremos que todas estas conjeturas son equivalentes.

Por otra parte, la conjetura de pavimentación establece que en todo espacio de dimensión finita, todo operador cuya matriz asociada tiene diagonal nula admite una descomposición a través de una cantidad fija de proyecciones donde cada componente tiene norma tan pequeña como se desee. En la segunda sección veremos que esta conjetura implica todas las anteriores.

Además, mostraremos que con ciertas condiciones adicionales sobre las sucesiones $\{f_i\}_{i\in I}$ se logra dar resultados positivos. Esto es, se prueba la validez de algunas de las conjeturas.

Finalmente, cerramos este capítulo mostrando condiciones que aseguran que ciertos marcos de Gabor pueden escribirse como una unión finita de sucesiones de Riesz. Esto es, la Conjetura de Feichtinger tiene respuesta positiva para estos marcos. Para facilitar la notación, cada vez que enunciemos que un conjunto se puede partir en "M" subconjuntos, estaremos diciendo que se puede partir en "a lo sumo M" subconjuntos.

3.1 Conjeturas y resultados previos

La Observación 1.1.4 nos muestra que un marco no acotado no puede ser escrito como una unión finita de sucesiones de Riesz. Sin embargo, no se conoce una respuesta para el caso de marcos acotados. Comenzaremos enunciando la conjetura original formulada por Feichtinger:

Conjetura 3.1.1. *Todo marco acotado puede ser escrito como una unión finita de sucesiones de Riesz.*

Dado $N \in \mathbb{N}$, definimos ℓ_2^N como $\mathbb{C}^N$ equipado con la norma de ℓ_2. La conjetura siguiente es la "versión finita" de la conjetura anterior:

Conjetura 3.1.2. *Para cada $B, C > 0$, existe un número natural $M = M(B, C)$ y un $A = A(B, C) > 0$ tales que cada vez que $\{f_i\}_{i=1}^n$ es un marco para de ℓ_2^N $(N \in \mathbb{N})$ con cota superior B y $\|f_i\| \geq C$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $\{1, \ldots, n\}$ se puede partir en $\{I_j\}_{j=1}^M$ de manera tal que para cada $j = 1, \ldots, M$, $\{f_i\}_{i\in I_j}$ es una sucesión de Riesz con cota inferior A y cota superior B.*

Notar que por la Observación 1.2.3, tener un marco $\{f_i\}_{i\in I}$ con cota superior B y $\|f_i\| \geq C$ para todo $i \in I$ es equivalente a tener un marco acotado.

En las dos conjeturas anteriores, se trabaja con marcos. A continuación, enunciaremos las dos conjeturas correspondientes para sucesiones de Bessel:

Conjetura 3.1.3. *Toda sucesión de Bessel acotada se puede escribir como una unión finita de sucesiones de Riesz.*

Conjetura 3.1.4. *Para cada $B > 0$, existe un número natural $M = M(B)$ y un $A = A(B) > 0$ tales que cada sucesión de Bessel $\{f_i\}_{i=1}^n$ con constante B y $\|f_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ se puede escribir como una unión de M sucesiones de Riesz con cota inferior A.*

En 1987, Bourgain y Tzafriri [2] demostraron el siguiente resultado fundamental (el cual lo usaremos para algunas demostraciones de este capítulo), conocido como el Teorema de la *Invertibilidad Restringida*:

Teorema 3.1.5. *(Bourgain-Tzafriri). Existe una constante universal $c > 0$ tal que cada vez que $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ es un operador lineal para el cual $\|Te_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces existe un subconjunto $\sigma \subseteq \{1, .., n\}$ de cardinalidad $|\sigma| \geq \frac{cn}{\|T\|^2}$ tal que*

$$\|\sum_{j\in\sigma} a_j Te_j\|^2 \geq c \sum_{j\in\sigma} |a_j|^2,$$

para toda elección de escalares $\{a_j\}_{j\in\sigma}$.

El teorema anterior motivó la siguiente conjetura, la cual está todavía abierta:

Conjetura 3.1.6. *Para cada $B > 0$ existe un número natural $M = M(B)$ y un $A = A(B) > 0$ tales que si $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ es un operador lineal para el cual $\|Te_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $\|T\| \leq \sqrt{B}$, entonces existe una partición $\{I_j\}_{j=1}^M$ del $\{1, \ldots, n\}$ tal que para cada $j = 1, \ldots, M$ y cada elección de escalares $\{a_i\}_{i\in I_j}$ tenemos que*

$$\|\sum_{i\in I_j} a_i Te_i\|^2 \geq A \sum_{i\in I_j} |a_j|^2.$$

Para simplificar la demostración del Teorema 3.2.1, necesitaremos los siguientes resultados elementales.

Proposición 3.1.7. *Fijemos un número natural M y supongamos que para cada número natural n tenemos una partición $\{I_i^n\}_{i=1}^M$ del $\{1, \ldots, n\}$. Entonces existen números naturales $\{n_1 < n_2 < \cdots\}$ tales que si $j \in I_i^{n_j}$ para algún $i = 1, \ldots, M$, entonces $j \in I_i^{n_k}$ para todo $k \geq j$. Por lo tanto, si $I_i = \{j / j \in I_i^{n_j}\}$, entonces*

1. *$\{I_i\}_{i=1}^M$ es una partición de $\mathbb{N}$.*

2. *Si $I_i = \{j_1 < j_2 < \cdots\}$, entonces para todo número natural k tenemos $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subseteq I_i^{n_{j_k}}$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único $i = 1, \ldots, M$ tal que $1 \in I_i^n$. Llamemos k_n a ese índice. Luego, queda bien definida la función $\varphi_1 \colon \mathbb{N} \to \{1, \ldots, M\}$, dada por $\varphi_1(n) = k_n$. De esta manera tenemos la unión disjunta $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^M \varphi_1^{-1}\{i\}$.

Por cardinalidad, existe $i_1 = 1, \ldots, M$ tal que $\mathrm{card}(\varphi_1^{-1}(i_1)) = \aleph_0$. Ordenando en forma creciente al conjunto $\varphi_1^{-1}(i_1)$, tenemos $\varphi_1^{-1}(i_1) = \{n_1^1 < n_2^1 < n_3^1 < \cdots\}$. Como $\varphi_1(n_j^1) =$

i_1 para todo $j \in \mathbb{N}$, $k_{n_j^1} = i_1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Luego, $1 \in I_{i_1}^{n_j^1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $\{n_j^1\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\mathbb{N}$.

Para cada n_j^1, existe un único índice i tal que 2 pertenece al i-ésimo conjunto de la partición $\{I_k^{n_j^1}\}_{k=1}^M$. Razonando como arriba, obtenemos $\{n_j^2\}_{j\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{n_j^1\}_{j\in\mathbb{N}}$ y un índice i_2 tal que $2 \in I_{i_2}^{n_j^2}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Así siguiendo, construimos una subsucesión $\{n_j^{l+1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{n_j^l\}_{j\in\mathbb{N}}$ y encontramos $i_{l+1} = 1, \ldots, M$ tal que $l+1 \in I_{i_{l+1}}^{n_j^{l+1}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Finalmente, tomamos $n_j \colon = n_j^j$ y los correspondientes conjuntos $I_i \colon = \{j \in \mathbb{N}/j \in I_i^{n_j}\}$ para cada $i = 1, \ldots, M$. Veamos que la elección hecha verifica las conclusiones de la proposición. De la construcción, se tiene en forma inmediata la siguiente afirmación: si $j \in I_i^{n_j}$ para algún $i = 1, \ldots, M$, entonces $j \in I_i^{n_k}$ para todo $k \geq j$.

Veamos que $\{I_i\}_{i=1}^M$ es una partición de $\mathbb{N}$. Fijemos $i \in \{1, \ldots, M\}$ y $j \in I_i$. Como $\{I_k^n\}_{k=1}^M$ es una partición de $\{1, \ldots, n\}$, si $j \in I_i$, se tiene que $j \in I_i^{n_j}$, luego $j \notin I_m^{n_j}$ para todo $m \neq i$ y, por lo tanto, $j \notin I_m$ para todo $m \neq i$. De esta manera, la unión de los $\{I_i\}$ es disjunta. Por otra parte, dado $j \in \mathbb{N}$, $\{n_m^j\}_{m=1}^\infty$ es una subsucesión de $\mathbb{N}$, entonces $n_m^j \geq m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y, en particular, $n_j = n_j^j \geq j$. Como $j \in \{1, \ldots, n_j\}$, existe i tal que $j \in I_i^{n_j}$. Luego $j \in I_i$.

Falta verificar la afirmación dada en *2*. Sea $I_i = \{j_1 < j_2 < \cdots\}$, finito ó infinito. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $j_k \in I_i$ y sea $m = 1, \ldots, k$. Como $j_m \in I_i$, $j_m \in I_i^{n_{j_m}}$. Luego $j_m \in I_i^{n_l}$ para todo $l \geq j_m$ y, en particular, $j_m \in I_i^{n_{j_k}}$. Esto vale cualquiera sea $m = 1, \ldots, k$. □

Notar que la afirmación dada por "*2*" de la proposición anterior vale para I_i finito ó infinito.

Finalmente, recordamos la definición de suma Hilbertiana y relacionamos esto con sucesiones de Bessel.

Definición 3.1.8. *Dada una sucesión de espacios de Hilbert $\{H_k\}_{k=1}^\infty$, definimos $H \colon = (\sum_{k=1}^\infty \bigoplus H_k)_{\ell_2}$ de la siguiente manera:*

$$\Big(\sum_{k=1}^\infty \bigoplus H_k\Big)_{\ell_2} \colon = \Big\{\{f_k\}_{k=1}^\infty / f_k \in H_k \ y \ \sum_{k=1}^\infty \|f_k\|^2 < \infty\Big\}.$$

Notar que H resulta un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle f, g\rangle_H :=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f_k, g_k\rangle_{H_k}$. En particular se tiene que $\|f\|_H^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|^2$. Además, todo $f_k \in H_k$ se puede pensar en H naturalmente y, para toda $g \in H$, vale que $\langle g, f_k\rangle_H=\langle g_k, f_k\rangle_{H_k}$.

Proposición 3.1.9. *Sea $H=(\sum_{k=1}^{\infty} \bigoplus H_k)_{\ell_2}$. Si para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}$ en H_k es una sucesión de Bessel con constante B, entonces $\{\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en H es una sucesión de Bessel con la misma constante.*

Demostración. Dado $g \in H$, $g=\{g_k\}$, como para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}$ es una sucesión de Bessel de H_k con constante B, entonces

$$\sum_{i=1}^{n_k} |\langle g_k, f_i^k\rangle_{H_k}|^2 \leq B\|g_k\|_{H_k}^2.$$

Como $\|g_k\|_{H_k}^2$ es sumable, además vale:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k} |\langle g, f_i^k\rangle_{H}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k} |\langle g_k, f_i^k\rangle_{H_k}|^2 \leq B\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\|_{H_k}^2 = B\|g\|_H^2.$$

□

Como la inclusión de H_k en H es isométrica se tiene:

Observación 3.1.10. *Sean $H=(\sum_{k=1}^{\infty} \bigoplus H_k)_{\ell_2}$ y $\{f_i^k\}_{i\in I} \subseteq H_k$. Si $\{f_i^k\}_{i\in I}$ es una sucesión de Riesz con cotas A y B en H, entonces también lo es en H_k.*

3.2 Equivalencia de las conjeturas

En principio puede parecer que las conjeturas para marcos 3.1.1 y 3.1.2 tienen hipótesis más restrictivas que las conjeturas para sucesiones de Bessel 3.1.3 y 3.1.4. Sin embargo, a continuación mostraremos que *todas* las conjeturas mencionadas en la sección anterior son *equivalentes.*

Teorema 3.2.1. *Las conjeturas 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4 y 3.1.6 son todas equivalentes en el sentido que todas son verdaderas ó todas son falsas.*

Demostración. Conjetura 3.1.3 $\Rightarrow$ Conjetura 3.1.1: Es trivial, ya que todo marco es una sucesión de Bessel.

Conjetura 3.1.1 $\Rightarrow$ Conjetura 3.1.4: Lo probaremos por el contrarrecíproco. Suponemos que la conjetura 3.1.4 es falsa. Luego, existe $B > 0$ tal que dados $M \in \mathbb{N}$ y $A > 0$, existe un número natural $n = n(M, A)$, un espacio de Hilbert H de dimensión finita y $\{f_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de Bessel con constante B que satisface $\|f_i\| = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$, de manera tal que para toda partición $\{I_j\}_{j=1}^M$ de $\{1, \dots, n\}$, existe $l = 1, \dots, M$ que cumple que $\{f_i\}_{i \in I_l}$ no es sucesión de Riesz. Luego, existen escalares $\{a_i\}_{i \in I_l}$ tales que

$$\Big\| \sum_{i \in I_l} a_i f_i \Big\|^2 < A \sum_{i \in I_l} |a_i|^2.$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, tomamos $M = k$ y $A = \frac{1}{k}$. Luego, existe $n_k \in \mathbb{N}$, H_k un espacio de Hilbert de dimensión finita, digamos m_k, y $\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}$ una sucesión de Bessel en H_k con constante B tales que satisfacen las condiciones mencionadas. Tomamos $H = (\sum_{k=1}^{\infty} \bigoplus H_k)_{\ell_2}$ y pensamos a los f_i^k en H. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\{e_i^k\}_{i=1}^{m_k}$ una base ortonormal de H_k.

Como $\langle e_i^k, e_j^k \rangle_H = \langle e_i^k, e_j^k \rangle_{H_k} = \delta_{ij}$ y para todo $k_1 \neq k_2$, $\langle e_i^{k_1}, e_j^{k_2} \rangle_H = 0$ para todo i y para todo j, entonces $\{\{e_i^k\}_{i=1}^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ resulta una base ortonormal de H.

Por otro lado, como $\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}$ es una sucesión de Bessel de H_k con constante B, por la Proposición 3.1.9, $\{\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ resulta una sucesión de Bessel de H con la misma constante B. Entonces, por la Observación 1.3.6, $\{\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \bigcup \{\{e_i^k\}_{i=1}^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es un marco con cota inferior 1 y cota superior $B + 1$. Además, $\|f_i^k\|_H = \|f_i^k\|_{H_k} = 1$ y $\|e_i^k\|_H = 1$. Luego, $\{\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \bigcup \{\{e_i^k\}_{i=1}^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es un marco acotado. Suponemos que este marco acotado se puede escribir como una unión de M sucesiones de Riesz ($M \in \mathbb{N}$ arbitrario fijo). Tomando el ínfimo de las M cotas inferiores de estas sucesiones de Riesz, podemos asumir que todas tienen la misma cota inferior, digamos A.

Luego, por la Observación 1.1.8, si consideramos para cada sucesión de Riesz el subconjunto formado sólo por los $\{f_i^k\}$, éstas siguen siendo sucesiones de Riesz con cota inferior A. Entonces, obtuvimos una partición de $\{\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en M sucesiones de Riesz cada una con cota inferior A. En particular, por la Observación 3.1.10, se tiene una partición de $\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}$ en M sucesiones de Riesz con la misma cota inferior, lo que es una contradicción. Esto muestra que la Conjetura 3.1.1 resulta falsa.

Conjetura 3.1.4 $\Rightarrow$ Conjetura 3.1.2: Sean $B, C > 0$. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un marco para $\ell_2^N (N \in \mathbb{N})$ con cota superior B y $\|f_i\| \geq C$ para todo $i \in I$. Entonces, por la Observación 1.2.4, $\{\frac{f_i}{\|f_i\|}\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel en ℓ_2^N con cota $\frac{B}{C^2}$. Entonces, usando la conjetura 3.1.4 para $\frac{B}{C^2}$, existen $M = M(B, C)$ y $\widetilde{A} = \widetilde{A}(B, C)$ tales que $\{\frac{f_i}{\|f_i\|}\}_{i\in I}$ se puede escribir como una unión de M sucesiones de Riesz cada una con cota inferior de Riesz $\widetilde{A}$.

Tenemos una partición $\{I_l\}_{l=1}^M$ de I tal que para todo $l = 1, \ldots, M$, $\{\frac{f_i}{\|f_i\|}\}_{i\in I_l}$ es una sucesión de Riesz con cota inferior $\widetilde{A}$. Sean $I' \subseteq I_l$ finito y escalares $\{a_i\}_{i\in I'}$. Como $\|f_i\| \geq C$, por la condición $\widetilde{A}\sum_{i\in I'} |\|f_i\|a_i|^2 \leq \|\sum_{i\in I'}(\|f_i\|a_i)\frac{f_i}{\|f_i\|}\|^2$, se tienen las desigualdades $\widetilde{A}C^2\sum_{i\in I'}|a_i|^2 \leq \widetilde{A}\sum_{i\in I'}|\|f_i\|a_i|^2 \leq \|\sum_{i\in I'} a_i f_i\|^2$. Notamos $A = \widetilde{A}C^2$ y, como $\widetilde{A} = \widetilde{A}(B, C)$, tenemos también $A = A(B, C)$. Luego,

$$A\sum_{i\in I'}|a_i|^2 \leq \|\sum_{i\in I'} a_i f_i\|^2.$$

Por otro lado, como $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco con cota superior B, por el Lema 1.2.5, se tiene que $\|\sum_{i\in I'} a_i f_i\|^2 \leq B\sum_{i\in I'}|a_i|^2$. Por lo tanto, todas las $\{f_i\}_{i\in I_l}$ resultan sucesiones de Riesz con cota inferior A y cota superior B.

Conjetura 3.1.2 $\Rightarrow$ Conjetura 3.1.6: Sean $B > 0$ y $C = 1$. Sea $T\colon \ell_2^n \to \ell_2^n$ un operador lineal con $\|T\| \leq \sqrt{B}$ tal que $\|Te_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Definimos $f_i \colon = Te_i$. Luego, $\|f_i\| = \|Te_i\| = 1 = C$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Así, $\sum_{i=1}^n |\langle f, f_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle f, Te_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle T^*f, e_i\rangle|^2 = \|T^*f\|^2 \leq \|T^*\|^2\|f\|^2 = \|T\|^2\|f\|^2 \leq B\|f\|^2$. Luego, $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión de Bessel con constante B.

Entonces, por la Observación 1.3.6, se tiene que $\{f_i\}_{i=1}^n \bigcup \{e_i\}_{i=1}^n$ es un marco formado por elementos de norma 1 con cota superior $B + 1$. Luego, usando la Conjetura 3.1.2 para $B + 1$ en lugar de B y para $C = 1$, existen $M = M(B)$, $A = A(B)$ y una partición $\{I_j\}_{j=1}^M$ de $\{1, \ldots, n\}$ tales que para todo $j = 1, \ldots, M$, $\{f_i\}_{i\in I_j} \bigcup \{e_i\}_{i\in I_j}$ es una sucesión de Riesz con cota inferior A.

Por la Observación 1.1.8, descartando los e_i, existe $1 \leq M' \leq M$ tal que para todo $j = 1, \ldots, M'$, $\{f_i\}_{i\in I_j}$ es una sucesión de Riesz con cota inferior A. Por lo tanto, para todo $j = 1, \ldots, M'$ y toda elección de escalares $\{a_i\}_{i\in I_j}$, tenemos la desigualdad

$$\|\sum_{i\in I_j} a_i f_i\|^2 \geq A\sum_{i\in I_j}|a_i|^2,$$

y como además habíamos definido $f_i = Te_i$, obtenemos el resultado buscado.

Conjetura 3.1.6 $\Rightarrow$ Conjetura 3.1.3:

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Consideramos $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de Bessel en H acotada con constante B. Luego, tenemos $C>0$ que satisface la condición $C \leq \|f_i\|$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, por la Observación 1.2.4, resulta que $\left\{\|\frac{f_i}{\|f_i\|}\right\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel en H acotada con constante $\frac{B}{C^2}$. Cambiando $\{f_i\}$ por $\left\{\frac{f_i}{\|f_i\|}\right\}$ si fuera necesario, podemos asumir que $\{f_i\}$ es una sucesión de Bessel con constante B y $\|f_i\|=1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para cada n, $\dim(\text{gen}\{f_i\}_{i=1}^{n}) \leq n$. Luego, consideramos H_n un subespacio de H de dimensión n que contenga a $\text{gen}\{f_i\}_{i=1}^{n}$.

Consideramos $\{e_i^n\}_{i=1}^{n}$ una base ortonormal de H_n. Sea el operador lineal $T_n : H_n \to H_n$ definido por $T_n e_i^n := f_i$. Tenemos que $\|T_n e_i^n\| = \|f_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Por las desigualdades $\|T_n^* f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle T_n^* f, e_i^n\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle f, T_n e_i^n\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$ para todo $f \in H_n$, se tiene que $\|T_n^* f\| \leq \sqrt{B}\|f\|$ para todo $f \in H_n$, de donde $\|T_n\| = \|T_n^*\| \leq \sqrt{B}$.

Aplicando la Conjetura 3.1.6, existe un $M = M(B)$, un $A = A(B) > 0$ y una partición $\{I_j^n\}_{j=1}^{M}$ de $\{1, \ldots, n\}$ tales que para cada $j = 1, \ldots, n$ y cada elección de escalares $\{a_i\}_{i \in I_j^n}$, vale $\|\sum_{i \in I_j^n} a_i T_n e_i^n\|^2 \geq A \sum_{i \in I_j^n} |a_i|^2$ y, como $T_n e_i^n = f_i$, tenemos que

$$\Big\| \sum_{i \in I_j^n} a_i f_i \Big\|^2 \geq A \sum_{i \in I_j^n} |a_i|^2. \tag{3.1}$$

Por esta condición, $\{f_i\}_{i \in I_j^n}$ es un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto, resulta una sucesión de Riesz, que tiene cota inferior A.

Para $M = M(B)$ y la partición que da la Conjetura 3.1.6 consideramos la subsucesión $\{n_k\}$ que da la Proposición 3.1.7 y la partición de $\mathbb{N}$ correspondiente a los $\{I_i\}_{i=1}^{M}$. Para cada $i = 1, \ldots, M$ fijo, falta ver que $\{f_i\}_{i \in I_i}$ es una sucesión de Riesz. Sea $I' \subseteq I_i$ finito y pongamos, con la notación de la Proposición 3.1.7, $I_i = \{j_1 < j_2 < \cdots\}$. Entonces, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I' \subseteq \{j_1, \ldots, j_k\}$, luego $I' \subseteq \{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq I_i^{n_{j_k}}$. Como por construcción $\{f_i\}_{i \in I_i^{n_{j_k}}}$ es una sucesión de Riesz, entonces $\{f_i\}_{i \in I'}$ también lo es y conserva la cota inferior A. Luego,

$$A \sum_{i \in I'} |a_i|^2 \leq \Big\| \sum_{i \in I'} a_i f_i \Big\|^2$$

para cualquier elección de escalares $\{a_i\}_{i \in I'}$ y para todo $I' \subseteq I_i$ finito.

Por otro lado, como $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel con constante B, obtenemos que B es cota superior de Riesz de $\{f_j\}_{j\in I_i}$.

En conclusión, $\{f_j\}_{j\in I_i}$ es una sucesión de Riesz para todo $i = 1, \ldots, M$, y así queda demostrado que vale la conjetura 3.1.3. $\square$

3.3 La conjetura de pavimentación

La siguiente conjetura, establece para espacios euclídeos, que todo operador cuya matriz asociada tiene diagonal nula admite una descomposición, a través de una cantidad fija de proyecciones, formada por operadores con norma suficientemente chica.

Conjetura 3.3.1. *(La conjetura de pavimentación). Para cualquier $\epsilon > 0$, existe una constante $M = M(\epsilon)$ tal que para cada número natural n y cada operador lineal S en ℓ_2^n cuya matriz con respecto a $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ tiene la diagonal nula, se puede encontrar una partición $\{\sigma_j\}_{j=1}^{M}$ del $\{1, \ldots, n\}$ tal que*

$$\|P_{\sigma_j} S P_{\sigma_j}\| \leq \epsilon \|S\| \quad \textit{para todo } j = 1, \ldots, M.$$

Para mostrar que esta conjetura implica todas las anteriores, basta probar que implica alguna de ellas. Esto es lo que establece la siguiente proposición.

Proposición 3.3.2. *La conjetura de pavimentación implica la Conjetura 3.1.4.*

Demostración. Sea $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ una sucesión de Bessel en ℓ_2^n con constante de Bessel B y $\|f_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Consideramos el operador lineal $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ definido por $Te_i = f_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. De las cuentas hechas en la demostración del Teorema 3.2.1 (Conj 3.1.6 $\Rightarrow$ Conj 3.1.3), tenemos que $\|T\| \leq \sqrt{B}$. Sea S el operador dado por $S \colon = T^*T - I : \ell_2^n \to \ell_2^n$. El lugar ij de la matriz de S viene dado por

$$\begin{aligned}
\langle Se_j, e_i \rangle &= \langle T^*Te_j - e_j, e_i \rangle \\
&= \langle T^*f_j, e_i \rangle - \langle e_j, e_i \rangle \\
&= \langle f_j, Te_i \rangle - \delta_{ij} \\
&= \langle f_j, f_i \rangle - \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Como $\|f_i\| = 1$, obtenemos

$$\langle Se_j, e_i\rangle = \begin{cases} \langle f_j, f_i\rangle & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Por la conjetura de pavimentación, dado $\epsilon > 0$, existe un número natural $M = M(\epsilon)$ y una partición $\{\sigma_k\}_{k=1}^{M}$ de $\{1, \ldots, n\}$ tales que

$$\|P_{\sigma_k} S P_{\sigma_k}\| \leq \epsilon \|S\| \text{ para todo } k = 1, \ldots, M. \tag{3.2}$$

Como para todo $x \in \ell_2^n$ valen las desigualdades

$$\|Sx\| \leq \|T^*Tx\| + \|x\| \leq \|T^*\|\|T\|\|x\| + \|x\| = (\|T\|^2 + 1)\|x\| \leq (B+1)\|x\|,$$

tenemos que $\|S\| \leq B + 1$. Tomando $\epsilon = \frac{1}{2(B+1)}$, de (3.2) se tiene que

$$\|P_{\sigma_k} S P_{\sigma_k} x\| \leq \|P_{\sigma_k} S P_{\sigma_k}\|\|x\| \leq \frac{\|S\|}{2(B+1)}\|x\| \leq \frac{\|x\|}{2} \tag{3.3}$$

para todo $x \in \ell_2^n$ y todo $k = 1, \ldots, M$, donde $M = M(B)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle P_{\sigma_k} S P_{\sigma_k} x, x\rangle &= \langle P_{\sigma_k}(T^*T - I)P_{\sigma_k} x, x\rangle \\ &= \langle (T^*T - I)P_{\sigma_k} x, P_{\sigma_k} x\rangle \\ &= \langle T^*TP_{\sigma_k} x, P_{\sigma_k} x\rangle - \langle P_{\sigma_k} x, P_{\sigma_k} x\rangle \\ &= \langle TP_{\sigma_k} x, TP_{\sigma_k} x\rangle - \|P_{\sigma_k} x\|^2 \\ &= \|TP_{\sigma_k} x\|^2 - \|P_{\sigma_k} x\|^2. \end{aligned}$$

Entonces, por la desigualdad dada en (3.3), tenemos que para todo $x \in \ell_2^n$ y todo $k = 1, \ldots, M$, vale $\left|\|TP_{\sigma_k} x\|^2 - \|P_{\sigma_k} x\|^2\right| = \left|\langle P_{\sigma_k} S P_{\sigma_k} x, x\rangle\right| \leq \|P_{\sigma_k} S P_{\sigma_k} x\|\|x\| \leq \frac{1}{2}\|x\|^2$.

Tomando $P_{\sigma_k} x$ en lugar de x y, usando que $P_{\sigma_k}^2 x = P_{\sigma_k} x$, tenemos que para todo $x \in \ell_2^n$ y todo $k = 1, \ldots, M$, vale

$$\left|\|TP_{\sigma_k} x\|^2 - \|P_{\sigma_k} x\|^2\right| \leq \frac{1}{2}\|P_{\sigma_k} x\|^2,$$

y, en particular, tenemos que

$$\frac{1}{2}\|P_{\sigma_k} x\|^2 \leq \|TP_{\sigma_k} x\|^2 \leq \frac{3}{2}\|P_{\sigma_k} x\|^2. \tag{3.4}$$

Sean $k = 1, \dots, M$ y escalares $\{a_i\}_{i\in\sigma_k}$. Consideramos $x = \sum_{i\in\sigma_k} a_i e_i \in \text{gen}\{e_i\}_{i\in\sigma_k}$. Luego, $P_{\sigma_k} x = x = \sum_{i\in\sigma_k} a_i e_i$. Entonces, de (3.4), tenemos que $\frac{1}{2}\|\sum_{i\in\sigma_k} a_i e_i\|^2 \leq \|T(\sum_{i\in\sigma_k} a_i e_i)\|^2 \leq \frac{3}{2}\|\sum_{i\in\sigma_k} a_i e_i\|^2$, de donde

$$\frac{1}{2}\sum_{i\in\sigma_k}|a_i|^2 \leq \|\sum_{i\in\sigma_k} a_i f_i\|^2 \leq \frac{3}{2}\|\sum_{i\in\sigma_k}|a_i|^2.$$

En conclusión, para cada $k = 1, \dots, M$, $\{f_i\}_{i\in\sigma_k}$ es una sucesión de Riesz con cota inferior de Riesz $\frac{1}{2}$ y cota superior de Riesz $\frac{3}{2}$. □

Notar que si la conjetura de pavimentación es verdadera, entonces no sólo vale la conjetura 3.1.4, sino que además las cotas de las bases de Riesz obtenidas son universales.

3.4 Resultados Positivos

Si bien las conjeturas anteriores no tienen aún una respuesta general, bajo ciertas hipótesis adicionales puede verse que resultan verdaderas.

A continuación, enunciaremos sin demostración un resultado de Bourgain-Tzafriri [3]:

Teorema 3.4.1. *(Bourgain-Tzafriri). Sea $\epsilon > 0$ y S un operador lineal en ℓ_2^n cuya matriz tiene la diagonal nula y todos los coeficientes acotados por $\frac{1}{log^{1+\gamma}n}$ para algún $\gamma > 0$. Luego, S satisface la conclusión de la conjetura de pavimentación: existe una partición $\{\sigma_k\}_{k=1}^M$ de $\{1, \dots, n\}$, donde $M = M(\gamma, \epsilon)$, tal que $\|P_{\sigma_k} S P_{\sigma_k}\| \leq \epsilon \|S\|$ para todo $k = 1, \dots, M$.*

El Teorema 3.4.1 implica una respuesta positiva a la Conjetura 3.1.4 para sucesiones que, en algún sentido, están "bien separadas". Usando la equivalencia de las conjeturas, se tienen resultados simliares para las Conjeturas 3.1.2 y 3.1.6.

Corolario 3.4.2. *Sea $\{f_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de Bessel con constante de Bessel B y con $\|f_i\| = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Supongamos que*

$$|\langle f_i, f_j\rangle| \leq \frac{1}{log^{1+\gamma}n} \text{ para todo } i \neq j.$$

Entonces, $\{f_i\}_{i=1}^n$ se puede escribir como una unión de $M = M(B, \gamma)$ sucesiones de Riesz cada una con cota inferior de Riesz $\frac{1}{2}$ y cota superior de Riesz $\frac{3}{2}$.

Demostración. Procedemos como en la Proposición 3.3.2. Para $T\colon \ell_2^n \to \ell_2^n$ dado por $Te_i = f_i$, se tiene que $S = T^*T - I$. En tal caso vimos que

$$\langle Se_j, e_i\rangle = \begin{cases} \langle f_j, f_i\rangle & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Además, $|\langle f_j, f_i\rangle| \leq \frac{1}{log^{1+\gamma}n}$ para todo $i \neq j$. Por el Teorema 3.4.1, siguiendo la demostración de la Proposición 3.3.2, se obtiene el resultado. □

Veamos que en las condiciones del Corolario 3.4.2, los elementos de $\{f_i\}_{i\in I}$, "están bien separados":

Observación 3.4.3. *Si $\{f_i\}_{i=1}^n$ es como en el corolario 3.4.2 y $n \geq 3$, entonces*

$$\|f_i - f_j\| \geq \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{log^{1+\gamma}n}}$$

Es decir, "f_i y f_j están bien separados".

Demostración. Como

$$\|f_i - f_j\|^2 = \langle f_i - f_j, f_i - f_j\rangle = \|f_i\|^2 + \|f_j\|^2 - 2\langle f_i, f_j\rangle \geq 2 - \frac{2}{log^{1+\gamma}n},$$

entonces se sigue el resultado. □

Corolario 3.4.4. *Valen las conjeturas 3.1.2 y 3.1.6 con los siguientes agregados:*

a) En Conjetura 3.1.2: $\big|\langle f_i, f_j\rangle\big| \leq \frac{C^2}{log^{1+\gamma}n}$ para todo $i \neq j$.

b) En Conjetura 3.1.6: $\big|\langle Te_i, Te_j\rangle\big| \leq \frac{1}{log^{1+\gamma}n}$ para todo $i \neq j$.

Demostración. Veamos que vale la conjetura 3.1.2. El Corolario 3.4.2 asegura una respuesta positiva para la conjetura 3.1.4 con el agregado:

$$\big|\langle f_i, f_j\rangle\big| \leq \frac{1}{log^{1+\gamma}n} \text{ para todo } i \neq j.$$

Ahora, si $\{f_i\}$ verifica $\|f_i\| \geq C$ para todo i, $|\langle \frac{f_i}{\|f_i\|}, \frac{f_j}{\|f_j\|}\rangle| = \frac{1}{\|f_i\|}\frac{1}{\|f_j\|}|\langle f_i, f_j\rangle| \leq \frac{1}{C^2}\frac{C^2}{log^{1+\gamma}n} = \frac{1}{log^{1+\gamma}n}$ para todo $i \neq j$. El resto de esta demostración sigue igual que la demostración de "Conj 3.1.4 ⇒ Conj 3.1.2" del Teorema 3.2.1, usando el Teorema de Bourgain-Tzafriri.

Veamos que b) da una respuesta positiva a la conjetura 3.1.6. En efecto, siguiendo la demostración de "Conj 3.1.2 ⇒ Conj 3.1.6" del Teorema 3.2.1, como en ese caso $f_i = Te_i$ y $C = 1$, se tiene el resultado. □

A continuación, mostraremos que toda sucesión de Bessel acotada se puede descomponer en una unión finita de conjuntos linealmente independientes. Para éllo, necesitamos un resultado de Christensen y Linder [8]:

Proposición 3.4.5. *Sean $M \in \mathbb{N}$, I un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $\{f_i\}_{i\in I}$ una sucesión de elementos no nulos en un espacio de Hilbert. Son equivalentes:*

1. *I se puede partir en M conjuntos disjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_M$ de manera que cada familia $\{f_i\}_{i\in I_j}$ $(j = 1, \ldots, M)$ es linealmente independiente.*

2. *Para cada subconjunto no vacío $J \subseteq I$ tenemos:*
$$\frac{|J|}{\dim(gen\{f_j\}_{j\in J})} \leq M.$$

Teorema 3.4.6. *Cada sucesión de Bessel $\{f_i\}_{i\in I}$ con constante de Bessel B y $\|f_i\| \geq C > 0$ para todo $i \in I$ se puede descomponer en $\lceil \frac{B}{C^2} \rceil$ conjuntos linealmente independientes.*

Demostración. Procedemos por el absurdo. Luego, tenemos $\{f_i\}_{i\in I}$ una sucesión de Bessel con constante B y $\|f_i\| \geq C > 0$ para todo $i \in I$ tal que no se puede descomponer en $\lceil \frac{B}{C^2} \rceil$ conjuntos linealmente independientes. Veamos que podemos tomar I finito. En efecto, si fuera I infinito, para cada $I' \subseteq I$ finito, por la Observación 1.2.4, $\{f_i\}_{i\in I'}$ resulta una sucesión de Bessel con constante B y $\|f_i\| \geq C > 0$ para todo $i \in I'$.

Suponemos que para todo $I' \subseteq I$ finito, $\{f_i\}_{i\in I'}$ se puede descomponer en $\lceil \frac{B}{C^2} \rceil$ conjuntos linealmente independientes. Sea $M := \lceil \frac{B}{C^2} \rceil$. Para simplificar la notación, supongamos que $I' = \{1, \ldots, k\}$. Luego, tenemos una partición $\{I_i^n\}_{i=1}^M$ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $\{f_j\}_{j\in I_i^n}$ es linealmente independiente. Por la Proposición 3.1.7, existe una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y conjuntos $I_i \subseteq \mathbb{N}$ con $i = 1, \ldots, M$ que cumplen:

i) $\{I_i\}_{i=1}^M$ es partición de $\mathbb{N}$.

ii) Si $I_i = \{j_1 < j_2 < \cdots\}$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, $\{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq I_i^{n_{j_k}}$.

Fijemos $i = 1, \ldots, M$ y $k \in \mathbb{N}$. Por la condición ii), $\{f_{j_l}\}_{l=1}^k \subseteq \{f_l\}_{l\in I_i^{n_{j_k}}}$. La independencia lineal de $\{f_l\}_{l\in I_i^{n_{j_k}}}$ implica la de $\{f_{j_l}\}_{l=1}^k$. Como k es arbitrario, $\{f_j\}_{j\in I_i}$ resulta linealmente independiente, cualquiera sea $i = 1, \ldots, M$. Entonces, por la condición i),

$\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se descompone en $M\colon = \lceil \frac{B}{C^2} \rceil$ conjuntos linealmente independientes, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, si I es infinito, entonces existe $I' \subseteq I$ finito tal que $\{f_i\}_{i\in I'}$ no se descompone en $\lceil \frac{B}{C^2} \rceil$ conjuntos linealmente independientes. Además, $\{f_i\}_{i\in I'}$ es una sucesión de Bessel con constante B y $\|f_i\| \geq C > 0$ para todo $i \in I'$.

Suponemos I finito. Por la Proposición 3.4.5, existe $J \subseteq I$ no vacío tal que

$$\frac{|J|}{\dim(\mathrm{gen}\{f_j\}_{j\in J})} > \lceil \frac{B}{C^2} \rceil. \tag{3.5}$$

Sea $V = \mathrm{gen}\{\frac{f_j}{\|f_j\|}\}_{j\in J} = \mathrm{gen}\{f_j\}_{j\in J}$. Como I es finito, J también lo es. Sea $n = \dim(V)$. Por la Observación 1.3.8, tenemos que $\{\frac{f_j}{\|f_j\|}\}_{j\in J}$ es una sucesión de marco (o equivalentemente un marco para V).

Por la Observación 1.2.4, tenemos que $\{\frac{f_i}{\|f_i\|}\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel con constante $\frac{B}{C^2}$. Luego, $\{\frac{f_j}{\|f_j\|}\}_{j\in J}$ también lo es. Como $\{\frac{f_j}{\|f_j\|}\}_{j\in J}$ es una sucesión de marco, su cota superior B_J es a lo sumo $\frac{B}{C^2} \leq \lceil \frac{B}{C^2} \rceil$. Luego, por la Observación 1.3.9, el operador de marco asociado a $\{\frac{f_j}{\|f_j\|}\}_{j\in J}$ S tiene exactamente n autovalores $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ con $0 < \lambda_k \leq B_J$ para todo k y vale

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{j\in J} \Big\| \frac{f_j}{\|f_j\|} \Big\| = |J|.$$

Además, $n\lambda_{\max} = \sum_{k=1}^n \lambda_{\max} \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k = |J|$. Entonces $\lambda_{\max} \geq \frac{|J|}{n}$ y, por la desigualdad dada en 3.5, $\lambda_{\max} \geq \frac{|J|}{n} > \lceil \frac{B}{C^2} \rceil$. Por otro lado, $\lambda_{\max} \leq B_J \leq \lceil \frac{B}{C^2} \rceil$. Entonces, resulta $\lambda_{\max} \leq \lceil \frac{B}{C^2} \rceil < \lambda_{\max}$, lo cual es un absurdo. De esta manera queda completada la demostración. □

A continuación, mostraremos que la Conjetura 3.1.6 es verdadera si la cota para la partición del $\{1, \ldots, n\}$ depende de un factor logarítmico de la dimensión n. En ese caso, el "A" encontrado es *universal*.

Proposición 3.4.7. *Existe una constante universal $c > 0$ y una función $d = d(\|T\|)$ tales que cada vez que se tiene un operador lineal $T\colon \ell_2^n \to \ell_2^n$ $(n \geq 2)$ con $\|Te_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces hay una partición $\{I_j\}_{j=1}^{\lfloor d \log n \rfloor}$ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que para cada $j = 1, \ldots, \lfloor d \log n \rfloor$ y para toda elección de escalares $\{a_i\}_{i\in I_j}$, tenemos que*

$$\Big\| \sum_{i\in I_j} a_i T e_i \Big\|^2 \geq c \sum_{i\in I_j} |a_i|^2. \tag{3.6}$$

Demostración. Consideremos la constante universal $c > 0$ del Teorema 3.1.5. Notar que podemos considerar $0 < c < 1$. En efecto, de ser $c \geq 1$, se puede tomar $0 < \widetilde{c} < 1$, de lo que resulta $\| \sum_{j\in\sigma} a_j Te_j\|^2 \geq c\sum_{j\in\sigma} |a_j|^2 \geq \widetilde{c}\sum_{j\in\sigma} |a_j|^2$ y $|\sigma| \geq \frac{cn}{\|T\|^2} \geq \frac{\widetilde{c}n}{\|T\|^2}$.

Sea $b\colon = \frac{c}{\|T\|^2}$. Notar que $0 < b < 1$, pues al ser $\|Te_i\| = \|e_i\| = 1$, $\|T\|^2 \geq 1 > c$. Sea $d > 0$ tal que $d > -\frac{1}{\log(1-b)} + \frac{1}{\log 2}$. Luego, si $n \geq 2$, $d\log n > -\frac{\log n}{\log(1-b)} + \frac{\log n}{\log 2} \geq -\frac{\log n}{\log(1-b)} + 1$ y, por lo tanto,

$$\lfloor d\log n\rfloor \geq \Big\lfloor -\frac{\log n}{\log(1-b)} + 1\Big\rfloor = \Big\lfloor -\frac{\log n}{\log(1-b)}\Big\rfloor + 1 > \Big\lfloor -\frac{\log n}{\log(1-b)}\Big\rfloor. \tag{3.7}$$

Entonces, por el Teorema 3.1.5, existe un subconjunto $I_1 \subseteq \{1,\ldots,n\}$ con $|I_1| \geq \frac{cn}{\|T\|^2} = bn$ que satisface la desigualdad dada en (3.6). Ahora, consideremos $J_1\colon = \{1,\ldots.n\}\setminus I_1$. Entonces $|J_1| = n - |I_1|$. Notamos $\ell_2^{J_1}\colon = \mathrm{gen}\{e_i\}_{i\in J_1}$. Elijamos una isometría (tal vez no suryectiva) $U_1\colon = Rng(T|_{\ell_2^{J_1}}) \to \ell_2^{J_1}$ y consideremos el operador lineal $S_1\colon = U_1T\colon \ell_2^{J_1} \to \ell_2^{J_1}$.

Dado que para todo $i \in J_1$, tenemos que $\|S_1e_i\| = \|Te_i\| = 1$, por el Teorema 3.1.5, existe $I_2 \subseteq J_1$ con $|I_2| \geq \frac{c(n-|I_1|)}{\|S_1\|^2}$ que satisface

$$\Big\|\sum_{i\in I_2} a_iS_1e_i\Big\|^2 \geq c\sum_{i\in I_2}|a_i|^2,$$

para toda elección de escalares $\{a_i\}_{i\in I_2}$. Como $\frac{c(n-|I_1|)}{\|S_1\|^2} = b(n-|I_1|)$ y $\|\sum_{i\in I_2} a_iS_1e_i\|^2 = \|U_1(\sum_{i\in I_2} a_iTe_i)\|^2 = \|\sum_{i\in I_2} a_iT_1e_i\|^2$, entonces I_2 satisface la desigualdad dada en (3.6). Análogamente, tomando $J_2 = J_1\setminus I_2 = \{1,\ldots,n\}\setminus(I_1\bigcup I_2)$, existe un subconjunto $I_3 \subseteq J_2$ con $|I_3| \geq b|J_2| = b(n-|I_1|-|I_2|)$ que satisface la desigualdad dada en (3.6).

Siguiendo con este razonamiento, dado $J_k = \{1,\ldots,n\}\setminus\bigcup_{l=1}^k I_l$, existe un subconjunto $I_{k+1} \subseteq J_k$ con $|I_{k+1}| \geq b(n-|I_1|-|I_2|-\cdots-|I_k|)$ que satisface la desigualdad dada en (3.6). Este proceso termina en algún $M \in \mathbb{N}$.

Notar que como $I_{k+1} \subseteq J_k = \{1,\ldots,n\}\setminus\bigcup_{l=1}^k I_l$ para todo $k = 1,\ldots,M$, entonces $I_1,\ldots,I_M$ resultan conjuntos disjuntos.

Sea $a_k\colon = \displaystyle\sum_{j=1}^k |I_j|$ para todo $k = 1,\ldots,M$. Luego, se tiene que

$$a_k = a_{k-1} + |I_k| \geq a_{k-1} + b(n-a_{k-1}) = bn + (1-b)a_{k-1}$$

para todo $k = 2, \ldots, M$. Entonces, aplicando lo anterior para $a_2, \ldots, a_k$, como ya teníamos que $a_1 = |I_1| \geq bn$, tenemos que

$$|I_1| + \cdots + |I_k| = a_k \geq bn \sum_{j=0}^{k-1} (1-b)^j = bn \frac{1-(1-b)^k}{1-(1-b)} = n(1-(1-b)^k) \tag{3.8}$$

para todo $k = 2, \ldots, M$. Para concluir con la demostración, falta ver que $M \leq \lfloor d \log n \rfloor$ y que $\bigcup_{j=1}^{\lfloor d \log n \rfloor} I_j$ es una partición de $\{1, \ldots, n\}$. En efecto, si $k \geq \lfloor d \log n \rfloor$, por (3.7) y (3.8), se tiene que

$$\begin{aligned} a_k &\geq n(1-(1-b)^{\lfloor d \log n \rfloor}) \\ &> n(1-(1-b)^{-\frac{\log n}{\log(1-b)}}) \\ &= n(1-(1-b)^{-\log_{(1-b)} n}) \\ &= n(1-n^{-1}) \\ &= n-1. \end{aligned}$$

Entonces, como $I_1, \ldots, I_M$ son conjuntos disjuntos, tenemos que

$$\Big|\bigcup_{j=1}^{k} I_j\Big| = \sum_{j=1}^{k} |I_j| > n-1.$$

Por otro lado, como $\bigcup_{j=1}^{k} I_j \subseteq \{1, \ldots, n\}$, entonces $|\bigcup_{j=1}^{k} I_j| \leq n$, resultando $|\bigcup_{j=1}^{k} I_j| = n$. $\square$

La Proposición 3.4.7 nos da una respuesta positiva a la Conjetura 3.1.4 si la cota para la cantidad de bases de Riesz depende de un factor logarítmico de la dimensión. En ese caso, la cota inferior de Riesz "A" es *universal.*

Además, puede obtenerse una resultado levemente más general, donde la cantidad de elementos de la sucesión de Bessel es independiente de la dimensión del espacio de Hilbert finito-dimensional al cual pertenece.

Teorema 3.4.8. *Existe una constante universal $c > 0$ y $D = D(B)$ tales que cada vez que $\{f_i\}_{i=1}^{k}$ es una sucesión de Bessel en un espacio de Hilbert H de dimensión n ($n \geq 2$) con $\|f_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, k$ y constante de Bessel B, entonces hay una partición $\{I_j\}_{j=1}^{\lfloor D \log n \rfloor}$ de $\{1, \ldots, k\}$ tal que para cada $j = 1, \ldots, \lfloor D \log n \rfloor$, $\{f_i\}_{i \in I_j}$ es una sucesión de Riesz con cota inferior c.*

Demostración. Aplicando el Teorema 3.4.6 para $\{f_i\}_{i=1}^k$ con $C = 1$, como $\|f_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, k$, entonces $\{f_i\}_{i=1}^k$ se puede descomponer en $\lceil B \rceil$ conjuntos linealmente independientes, es decir, existe una partición $\{J_l\}_{l=1}^{\lceil B \rceil}$ de $\{1, \ldots, k\}$ tal que $\{f_i\}_{i \in I_{J_l}}$ es linealmente independiente para todo $l = 1, \ldots, \lceil B \rceil$.

Notar que como $\{f_i\}_{i=1}^k \subseteq H$ y como $\dim H = n$, entonces $\dim(\text{gen}\{f_i\}_{i \in J_l}) \leq n$ para todo $l = 1, \ldots, \lceil B \rceil$. Luego, $k = \sum_{l=1}^{\lceil B \rceil} |J_l| = \sum_{l=1}^{\lceil B \rceil} \dim(\text{gen}\{f_i\}_{i \in J_l}) \leq \sum_{l=1}^{\lceil B \rceil} n = \lceil B \rceil n$, de donde

$$k \leq \lceil B \rceil n.$$

Sea $F_k \colon = \text{gen}\{f_i\}_{i=1}^k$, $\dim F_k \leq k$. Luego, considerando H_k un espacio de Hilbert k-dimensional $H_k \supseteq F_k$, podemos definir $T \colon H_k \to H_k$ tal que $Te_i = f_i$, donde $\{e_i\}_{i=1}^k$ es una base ortonormal de H_k.

Por lo hecho en la demostración del Teorema 3.2.1 (Conj 3.1.6 $\Rightarrow$ Conj 3.1.3), tenemos que $\|T\| \leq \sqrt{B}$, de donde

$$\frac{c}{\|T\|^2} \geq \frac{c}{B}$$

para todo $c > 0$. Luego, por la Proposición 3.4.7, existe una constante universal $c > 0$, $d = d(B)$ y una partición $\{I_j\}_{j=1}^{\lfloor d \log k \rfloor}$ de $\{1, \ldots, k\}$ tales que para cada $j = 1, \ldots, \lfloor d \log k \rfloor$ y cada elección de escalares $\{a_i\}_{i \in I_j}$, tenemos que

$$\Big\| \sum_{i \in I_j} a_i f_i \Big\|^2 = \Big\| \sum_{i \in I_j} a_i T e_i \Big\|^2 \geq c \sum_{i \in I_j} |a_i|^2.$$

Como $\{f_i\}_{i=1}^k$ es una sucesión de Bessel con constante de Bessel B, $\|f_i\| \leq \sqrt{B}$ para todo $i = 1, \ldots, k$, de donde

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i \in I_j} a_i f_i \Big\|^2 &\leq \Big(\sum_{i \in I_j} |a_i|^2 \Big) \Big(\sum_{i \in I_j} \|f_i\|^2 \Big) \\
&\leq \Big(\sum_{i \in I_j} |a_i|^2 \Big) B |I_j| \\
&\leq Bk \sum_{i \in I_j} |a_i|^2.
\end{aligned}$$

En conclusión, tenemos que $\{f_i\}_{i \in I_j}$ es una sucesión de Riesz con cota inferior de Riesz c para todo $j = 1, \ldots, \lfloor d \log k \rfloor$. Como $2 \leq n$, $\frac{d \log \lceil B \rceil}{\log 2} + d \geq \frac{d \log \lceil B \rceil}{\log n} + d$. Tomando $D \colon = \frac{d \log \lceil B \rceil}{\log 2} + d$, resulta que $D \log n \geq d \log \lceil B \rceil + d \log n$, de donde

$$\lfloor D \log n \rfloor \geq \lfloor d \log \lceil B \rceil + d \log n \rfloor = \lfloor d \log (\lceil B \rceil n) \rfloor.$$

Notar que como $d = d(B)$, entonces $D = D(B)$. Además, como $k \leq \lceil B \rceil n$, se tiene que $d \log k \leq d \log(\lceil B \rceil n)$. Finalmente, obtenemos que

$$\lfloor d \log k \rfloor \leq \lfloor d \log(\lceil B \rceil n) \rfloor \leq \lfloor D \log n \rfloor.$$

$\square$

3.5 Marcos de Gabor

Para finalizar este trabajo, relacionamos los resultados previos de este capítulo con los resultados del Capítulo 2, donde trabajamos con marcos de Gabor.

Recordemos que a lo largo del Capítulo 2 tuvimos en cuenta qué hipótesis aseguraban que un marco de traslaciones y/o modulaciones es una sucesión de Riesz. De la condición sobre el soporte de la función G, vemos que en cada una de estas clases hay marcos que no son sucesiones de Riesz. En este momento, es natural preguntarse si bajo ciertas hipótesis adicionales, vale la Conjetura de Feichtinger. Es decir, si dado un marco de Gabor (de traslaciones o de modulaciones) con alguna característica en particular, se puede escribir como una unión finita de sucesiones de Riesz. El caso de marcos de Gabor es lo que presentamos en el siguiente teorema, donde el requerimiento es una condición notable acerca de los parámetros a y b.

Notar que sólo interesan los parámetros $a, b > 0$ tales que $0 < ab < 1$, puesto que por el Teorema 2.0.19 la condición $0 < ab \leq 1$ es necesaria y en el caso $ab = 1$ se tiene una base de Riesz.

Teorema 3.5.1. *Sean $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $0 < ab < 1$ con ab racional tales que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco de Gabor para $L^2(\mathbb{R})$. Entonces, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ se puede escribir como una unión finita de sucesiones de Riesz.*

Demostración. Como $0 < ab < 1$ y ab es racional, existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $ab = \frac{p}{q}$. Veamos que el marco de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ puede descomponerse en una unión finita de sucesiones de Riesz.

Considerando el cambio de variables $y = bx$, podemos suponer que $b = 1$ y $a = \frac{p}{q}$ con

$p, q \in \mathbb{N}$. En efecto, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos que

$$\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi imbx}\overline{g(x-na)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tfrac{y}{b})e^{-2\pi imy}\overline{g(\tfrac{y}{b}-na)}dy = \langle \widetilde{f}, E_mT_{n\frac{p}{q}}\widetilde{g}\rangle,$$

donde $\widetilde{f}(x) = f(\frac{x}{b})$ y $\widetilde{g}(x) = g(\frac{x}{b})$.

Usando el algoritmo de división en $\mathbb{Z}$ se tiene que

$$\{E_mT_{\frac{1}{q}n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \bigcup_{k=0}^{p-1}\{E_mT_{\frac{1}{q}(np+k)}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \bigcup_{k=0}^{p-1}\{E_mT_{\frac{p}{q}n+\frac{k}{q}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}.$$

Fijemos $k = 0, \ldots, p-1$. Afirmamos que $\{E_mT_{\frac{p}{q}n+\frac{k}{q}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$. En efecto, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle f, E_mT_{\frac{p}{q}n+\frac{k}{q}}g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi imx}\overline{g(x-\tfrac{p}{q}n-\tfrac{k}{q})}dx = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y+\frac{k}{q})e^{-2\pi im(y+\frac{k}{q})}\overline{g(y-\frac{p}{q}n)}dy\\ &= e^{-2\pi im\frac{k}{q}}\langle T_{-\frac{k}{q}}f, E_mT_{\frac{p}{q}n}g\rangle.\end{aligned}$$

Luego, por la Observación 1.3.7, tenemos que $\{E_mT_{\frac{1}{q}n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$. En el resto de la demostración mostraremos que $\{E_mT_{\frac{1}{q}n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ se escribe como una unión finita de sucesiones de Riesz y, como $\{E_mT_{\frac{p}{q}n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \subseteq \{E_mT_{\frac{1}{q}n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, se sigue la conclusión del Teorema.

Usaremos un resultado de Ron y Shen [14, Th. 2.2] que asegura que si $\{E_mT_{\frac{1}{q}n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco para $L^2(\mathbb{R})$, entonces $\{E_{qm}T_ng\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz. Entonces, por el algoritmo de divisón por q, tenemos que

$$\{E_mT_{\frac{n}{q}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \bigcup_{k=0}^{q-1}\{E_mT_{\frac{nq+k}{q}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \bigcup_{k=0}^{q-1}\{E_mT_{n+\frac{k}{q}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \bigcup_{k=0}^{q-1}\bigcup_{j=0}^{q-1}\{E_{qm+j}T_{n+\frac{k}{q}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}.$$

Pero $E_{qm+j}T_{n+\frac{k}{q}}g = e^{2\pi i(qm+j)x}g(x-n-\frac{k}{q}) = e^{2\pi ikm}e^{2\pi ijx}e^{2\pi iqm(x-\frac{k}{q})}g(x-n-\frac{k}{q}) = e^{2\pi ikm}E_jT_{\frac{k}{q}}E_{qm}T_ng$ para todo j, k. Como $\{E_{qm}T_ng\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz, entonces por las Observaciones 1.1.8 y 1.1.11, $\{E_{qm+j}T_{n+\frac{k}{q}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ también lo es para todo j, k. Así, escribimos a $\{E_mT_{\frac{1}{q}n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ como una unión de q^2 sucesiones de Riesz. □

Vale destacar que la demostración del Teorema 3.5.1 muestra que un marco $\{E_mT_{\frac{p}{q}n}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una unión de q^2 sucesiones de Riesz. Esto es, la cantidad de sucesiones necesarias se estima con los parámetros a y b.

Bibliografía

[1] Benedetto, J. J.; L. Shidong. *Subband coding and noise reduction in multiresolution analysis frames.* Proc. of SPIE Conf. on Mathematical Imaging, San Diego, 1994.

[2] Bourgain, J.; L. Tzafriri. *Invertibility of "large" submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis*. Israel J. Math., **57** (2) (1987), 137–224.

[3] Bourgain, J.; L. Tzafriri. *On a problem of Kadison and Singer*. J. Reine Angew. Math. **420**, (1991), 1–43.

[4] Casazza, P.; O. Christensen. *Weyl-Heisenberg frames for subspaces of* $L^2(\mathbb{R})$, Proc. Amer. Math. Soc., **129** (1), (2001), 145–154.

[5] Casazza, P.; O. Christensen; N. Kalton. *Frames of translates*, Collect. Math., **52** (1), (2001), 35–54.

[6] Casazza, P.; O. Christensen; A. Lindner; R. Vershynin. *Frames and the Feichtinger conjecture*. Proc. Amer. Math. Soc., **133** (4), (2005), 1025–1033.

[7] Christensen, O. An introduction to frames and Riesz bases. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003.

[8] Christensen O.; A. Lindner. *Decomposition of Riesz frames and wavelets into a finite union of linearly independent sets*, Linear Algebra Appl. **355**, (2002), 147–159.

[9] Daubechies, I. Ten lectures on wavelets. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[10] Daubechies, I. *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis.* IEEE Trans. Inform. Theory **36** (5), (1990), 961–1005.

[11] Duffin, R.; A. C. Schaeffer. *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc., **72**, (1952), 341–366.

[12] Munch, N. Noise reduction in tight Weyl-Heisenberg frames. IEEE Trans. Inform. Theory 38 (1992), no. 2, part 2, 608–616.

[13] Rieffel, M. *Projective modules over higher-dimensional noncommutative tori*. Canad. J. Math. **40** no. 2, (1988), 257–338.

[14] Ron, A.; Z. Shen. *Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in* $L^2(\mathbb{R}^d)$, Duke Math. J., **89** (2), (1997), 237–282.