UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Conjeturas de Weil y teoría elemental de Motivos

Autor: Federico Quallbrunn
Director: Fernando Cukierman
Marzo 2007

Índice

0. Introducción

El estudio de las soluciones en números enteros de ecuaciones algebraicas (tales como $x^2 + y^2 = z^2$) constituye una de las ramas más antiguas de la Matemática. Algunos de estos problemas motivaron gran parte de las diferentes teorías actuales en Álgebra. Tal es el caso del famoso problema de Fermat: la imposibilidad de resolver $x^n + y^n = z^n$ para $n \geq 3$ y $x, y, z \in \mathbb{Z}$; que motivó el concepto de Ideal, fundamental en la teoría de anillos.

De cualquier manera, en otros casos la no existencia de soluciones enteras para ciertas ecuaciones puede ser demostrada más fácilmente, por ejemplo, la ecuación $y^2 = x^3 - x - 1$ no tiene soluciones enteras simplemente porque no tiene soluciones en el cuerpo finito $\mathbb{F}_3$. Esto hace de los cuerpos finitos objetos de estudio centrales en la Teoría de Números. Una de las cuestiones que tiene sentido preguntarse en cuerpos finitos es cuántas soluciones tiene un cierto sistema de ecuaciones polinomiales sobre el cuerpo $\mathbb{F}_q$. André Weil atacó sistemáticamente este problema considerando lo que se llama la función zeta de una variedad:

$$\zeta_X(s) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(X,n)}{n}.s^n)$$

donde $N(X, n)$ es el número de puntos de la variedad X sobre $\mathbb{F}_{q^n}$.

Weil formuló varias conjeturas para la función $\zeta_X(s)$

Las conjeturas que Weil formuló tienen importantes consecuencias tanto en Teoría de Números como en Geometría Algebraica ya que la función zeta de una variedad provee información acerca de invariantes birracionales de la variedad y es fundamental en el estudio de la cantidad de puntos racionales, como ya se explicó. Sin embargo, históricamente fue la relación entre Teoría de Números y Topología, que las conjeturas de Weil implicaban, lo que atrajo el interés de los matemáticos más notables en las décadas del '50 y '60 . En sus primeros trabajos al respecto (sobre ecuaciones de Fermat generalizadas $a_1 x_1^n + \cdots + a_m x_m^n = 0$) Weil notó que considerar un sistema de ecuaciones X con coeficientes en $\mathbb{Z}$ como variedad compleja y como variedad sobre $\mathbb{F}_q$ relaciona la Topología de $X(\mathbb{C})$ (el conjunto de puntos de X como variedad sobre los números complejos) con la función zeta de $X(\mathbb{F}_q)$

Es a partir de estas analogías que se considera la posibilidad de construir una teoría de cohomología general para variedades algebraicas abstractas en el marco de la cual se pudieran explicar naturalmente las conjeturas de Weil. Estas teorías (llamadas en un principio "cohomologías de Weil") deberían cumplir con ciertos axiomas.La busqueda y el desarrollo de las cohomologías de Weil fue uno de los principales temas de investigación en Geometría Algebraica durante los '60 y sobre todo en la obra de Alexander Grothendieck.

La historia de la demostración de las conjeturas empieza antes del propio Weil. Ya Hasse en la década del '30 define la función zeta de una curva elíptica sobre $\mathbb{F}_q$ y demuestra que es una función racional con dos polos de módulo 1 y $1/q$ y dos ceros de módulo $1/\sqrt{q}$. En 1941 Weil anuncia una generalización del teorema de Hasse, formulando las conjeturas correctas para curvas y dando una heurística de la demostración. Sin embargo, esta demostración requería de una definición de variedad Jacobiana de una curva en $\mathbb{F}_q$ lo que daba a entender la necesidad de una formulación puramente abstracta de los fundamentos de la Geometría Algebraica (hasta ese entonces la construcción de la Jacobiana de una curva usaba muchísimas técnicas analíticas y diferenciales imposibles de reproducir en el caso abstracto). Weil finalmente dedica 6 años a escribir su libro Fundamentos de la Geometría Algebraica empezando así una nueva etapa en la historia de la geometría. Finalmente adaptando un teorema de Castelnuovo y Severi al caso abstracto, demostró las conjeturas para curvas no singulares. Más importante fue la demostración, también de Weil, del caso de variedades abelianas, ya que, basados en este resultado, otros lograron demostrar otros casos , asociando una variedad abeliana a otro tipo de variedades, de la misma manera que clasicamente se asocia a una curva su variedad jacobiana. Este último plan de acción fue el que llevaron a cabo Bombieri y Swinnerton-Dyer en su demostración de la hipótesis Riemann-Weil para hipersuperficies cúbicas de dimensión 3.

En su trabajo de 1968 ([12]), Yuri Manin también utiliza variedades abelianas como clave para el caso de variedades uniracionales de dimensión 3. Lo que hace distinto e importante al escrito de Manin es la técnica con la cual le asocia variedades abelianas a las variedades que él está estudiando, lo hace estudiando una serie de objetos, en ese entonces novedosos en la matemática, denominados "motivos"de las variedades. Manin descompone el motivo de una variedad uniracional de dimensión 3 (algo así como descomponer la cohomología de la variedad) en sumas de motivos más sencillos. Así como el anillo de Chow de una curva compleja C se descompone en $A^*_{\mathbb{Q}}(C) = \mathbb{Q} \oplus J(C) \oplus \mathbb{Q}$ donde $J(C)$ es la jacobiana de la curva, también se puede descomponer al motivo de ciertas variedades de dimensión 3 a partir de "jacobianas".

Los Motivos fueron gestados por Grothendieck quien a partir de la aparición de muchas diferentes cohomologías de Weil (definidas casi todas por él mismo) creyó que era posible definir una teoría de cohomología "universal", que contemplara en esencia todas las posibles teorías de cohomología que pudiera haber sobre la categoría de variedades algebraicas. Grothendieck conjeturó que los motivos proveen tal teoría universal en una serie de problemas que llamó "conjeturas standard", que siguen sin demostración. Manin, sin embargo, evitó enfrentar el difícil problema de las conjeturas standard interpretando teoremas clásicos de la teoría de variedades abelianas, y teoremas en ese entonces recientes que forman parte de la demostración del teorema Riemann-Roch-Grothendieck, en términos de teoría de motivos; así las variedades abelianas son vistas como motivos particulares y aparecen en la descomposición del motivo de la variedad uniracional de dimensión 3. Es por eso que nos vamos a centrar en el trabajo de Manin para exponer la teoría más general y sus propiedades más importantes.

El programa a desarrollar en esta tesis es entonces el siguiente:

1. Primero vamos a explicar con más precisión de qué se tratan las conjeturas de Weil
2. En la segunda sección vamos a desarrollar de manera completamente axiomática las propiedades principales de las teorías de intersección, que va a ser nuestra principal herramienta técnica.
3. A modo principalmente ilustrativo vamos a dar una demostración de la hipótesis de Riemann-Weil para curvas.
4. En la cuarta sección vamos a ver cómo las propiedades de los fibrados lineales de rango 1 implican la hpiótesis de Riemann para variedades abelianas. Esta parte es el núcleo sustancial del trabajo.

5. Definición de la categoría de correspondencias, que es la base concreta de la categoría de motivos. Para cada teoría de intersección se puede definir su categoría de correspondencias. A su vez vamos a estudiar el "principio de identidad"de Manin, herramienta fundamental del cálculo de motivos que establece una ecuación entre ciertas correspondencias siempre que se tenga una ecuación similar en teoría de intersección

6. Presentar la construcción de la *completación pseudo-abeliana* de una categoría aditiva, que se usa para pasar de la categoría de correspondencias a la de motivos. Vamos también a ver la definición y propiedades del motivo fundamental $\mathbb{L}$ que nos da una descomposición del motivo del espacio proyectivo: $\mathfrak{h}(\mathbb{P}^r) = 1 \oplus \mathbb{L} \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}^r$ donde $\mathbb{L}^i = \mathbb{L} \otimes \cdots \otimes \mathbb{L} \quad (i \text{ veces})$

7. Vamos a mostrar, de manera similar a cómo tratamos las teorías de Intersección, las propiedades fundamentales de las clases de Chern y la clase característica de un fibrado vectorial, que vamos a usar fundamentalmente en el cálculo del motivo de un fibrado proyectivo $\mathfrak{h}(\mathbb{P}(E))$ donde E es un haz localmente libre de rango r sobre una variedad X, el resultado es que considerar el motivo "trivializa"el fibrado dando $\mathfrak{h}(\mathbb{P}(E)) = \mathfrak{h}(X) \otimes \mathfrak{h}(\mathbb{P}^r)$. De manera similar vamos a realizar el cálculo del motivo de un blow-up (en el paper de Manin se refieren a esta construcción como "transformación monoidal"). Si $X' \to X$ es una tal construcción con centro en una subvariedad Y de codimensión r entonces tenemos la ecuación: $\mathfrak{h}(X') = \mathfrak{h}(X) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathfrak{h}(Y) \otimes \mathbb{L}^i)$

8. Estudio de la relación entre la categoría de motivos de curvas y la categoría de variedades Jacobianas. El motivo de toda curva X puede descomponerse de la forma $\mathfrak{h}(X) = 1 \oplus \mathfrak{h}^+(X) \oplus \mathbb{L}$ donde hay una equivalencia natural entre el motivo $h'(X)$ y la Jacobiana de X módulo isogenías.

9. Finalmente estamos en condiciones de demostrar la conjetura de Weil para variedades X uniracionales de dimensión 3 estudiando, dado un morfismo de grado finito $f : \mathbb{P}^3 \to X$, el motivo de una variedad X' tal que existen morfismos $g : X' \to X, \quad j : X' \to \mathbb{P}^3$ con $g = f \circ j$, g de grado finito y j una composición de Blow-ups con centros no singulares. El motivo de X es un sumando directo del motivo de X' y se pueden contar los puntos racionales de X mediante el motivo $\mathfrak{h}(X')$ del cual conocemos la estructura por el morfismo j y por los teoremas acerca del motivo de un blow-up y de un fibrado, obteniendo así el resultado que buscábamos.

0.1. Agradecimientos

–Dígame Licenciado
–Licenciado
–Gracias, muchas gracias
–No hay de queso, nomás de papa

Muchas gracias a todos.
Para ser más específicos:
Gracias a Fernando porque todo esto se debe a él (así que yo no me hago responsable). Gracias especialmente a Ariel (Pacetti) y a Jorge por haber accedido a leer este trabajo con muy poco tiempo (culpa de mi irresponsabilidad) y sin embargo haberme ayudado mucho.

Gracias a Ariel y César (lo primero es la familia). A Nicolás, Matías, a Lucio (por ley de reciprocidad), a los que participaron y participan conmigo del seminario de Geometría

Algebraica, a Lucía, Fede Carrá, Mariela, Romina y mucha otra gente que no creo que lea esto.

Finalmente vale la pena mencionar que todo esto fue escrito gracias a la manutención y paciencia de mis viejos y que a ellos corresponde el principal agradecimiento.

1. Las Conjeturas de Weil

La función zeta de un cuerpo de números es una herramienta clásica de la teoría de números desde su concepción por Dirichlet a mediados del siglo XIX, está definida por

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathcal{P}} \frac{1}{1 - N(\mathcal{P})^{-s}}$$

Donde el producto está definido sobre todos los ideales primos del anillo de enteros del cuerpo $K/\mathbb{Q}$ y $N(\mathcal{P})$ es la norma del ideal.

A principios del siglo XX Hasse consideró una función zeta para estudiar las propiedades aritméticas de las curvas elípticas, más tarde (como a la nochecita) Weil generalizó de manera natural estas funciones zeta. En el lenguaje de esquemas se puede describir como

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in X} \frac{1}{1 - N(x)^{-s}}$$

Acá x es un punto cerrado de X, que es un esquema de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$; de modo que el cuerpo residual $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{M}_x$ es finito y $N(x) = \#k(x)$. En particular X puede ser una variedad definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$, con $q = p^n$. En este caso, cada punto cerrado x de X (cada ideal maximal en el anillo de coordenadas) se factoriza como r puntos cerrados definidos sobre la extensión de grado r de $\mathbb{F}_q$ con $N(x) = q^r$. Es razonable entonces que $\zeta_X(s)$ este relacionada con la función generatriz de la sucesión $(N_r)_{r \geq 1}$, donde N_r es la cantidad de puntos de X sobre la extensión de grado r de $\mathbb{F}_q$ de hecho:
Escribiendo $\deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_q]$ y haciendo la sustitución $t = q^{-s}$, $\zeta_X(s)$ se transforma en

$$Z_X(t) = \prod_{x \in X} \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}}$$

Ahora tomamos (formalmente) la derivada logarítmica de $Z(t)$ y se tiene

$$\begin{array}{ll}
\frac{d\log}{dt}(Z(t)) = \sum_{x\in X} \frac{ut^{u-1}}{1-t^u} = & (u = \deg(x)) \\
= \sum_{u=1}^{\infty} \frac{ut^{u-1}}{1-t^u} M_u & (M_u = \#\{x \in X : \deg(x) = u\}) \\
= \sum_{u=1}^{\infty} uM_u \sum_{n=1}^{\infty} t^{nu-1} & \text{agrupando } nu = r \text{ queda:} \\
= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{u|r} uM_u t^{r-1} = \sum_{r=1}^{\infty} N_r t^{r-1} &
\end{array}$$

Siendo M_u la cantidad de puntos cerrados de X de grado u (teniendo en cuenta a X como esquema), uM_u es la cantidad de puntos de X (vista como variedad) definidos propiamente sobre la extensión de grado u de $\mathbb{F}_q$ (es decir los puntos que *aparecen* cuando se considera la extensión de grado u y no en ninguna extensión de menor grado). Luego $N_r := \sum_{u|r} uM_u$ es la cantidad de puntos de X sobre el cuerpo $\mathbb{F}_{q^r}$. Por eso muchas veces, en vez de hablar de $\zeta_X(s)$, en la bibliografía relacionada al tema se habla de la serie $Z_X(t) = \exp(\sum_r \frac{N_r}{r} t^r)$ (frecuentemente se llama *función zeta de X* a esta serie) que, por lo que ya vimos, se relaciona con $\zeta_X(s)$ por la ecuación:

$$\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$$

Teniendo en cuenta esta última interpretación de la función zeta de una variedad sobre un cuerpo finito es más fácil calcular explícitamente la forma de la función zeta de algunas variedades particularmente sencillas. Por ejemplo, la variedad afín $\mathbb{A}^n$ tiene q^{rn} elementos sobre la extensión de grado r de $\mathbb{F}_q$, por lo que su función Z se escribe:

$$Z_{\mathbb{A}^n}(t) = \exp(\sum \frac{q^{nr}}{r} t^r) = \frac{1}{1 - q^n t}$$

Por otra parte, si la variedad X es unión disjunta de subvariedades $X_o, \ldots X_m$ y escribimos $N_{(i)r}$ por la cantidad de puntos racionales de X_i sobre $\mathbb{F}_{q^r}$ entonces

$$Z_X(t) = \exp(\sum_r \tfrac{N_r}{r} t^r) = \exp(\sum_r \tfrac{N_{(0)r} + \cdots + N_{(m)r}}{r} t^r) =$$
$$= \exp(\sum_r \tfrac{N_{(0)r}}{r} t^r + \cdots + \sum_r \tfrac{N_{(m)r}}{r} t^r) = \prod_{i=0}^m \exp(\sum_r \tfrac{N_{(i)r}}{r} t^r) = \prod_{i=0}^m Z_{X_i}(t)$$

Ahora, usando $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^{n-1} \cup \cdots \cup \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$ se tiene que

$$Z_{\mathbb{P}^n}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\cdots(1-q^n t)}$$

Más en general, si una variedad X se puede descomponer como unión disjunta de variedades isomorfas a espacios afines (en ese caso se dice que X tiene una *descomposición celular*) la función zeta de X se escribe:

$$Z_X(t) = \frac{1}{(1-t)^{b_0}(1-qt)^{b_1}\cdots(1-q^n t)^{b_n}}$$

donde b_i es la cantidad de copias de $\mathbb{A}^i$ en la descomposición de X , en particular los b_i son constantes para cualquier descomposición de X. Ejemplos de variedades con descomposición celular son las variedades Grassmanianas.

A partir de estos ejemplos y otros, como curvas elípticas (calculado por Hasse y E.Artin) y variedades de Fermat (de la forma $\sum a_i x_i^n = 0$) A.Weil conjeturó la forma que deberían tener las funciones zeta de una variedad sobre $\mathbb{F}_q$.
Por empezar las funciones zeta conocidas para Weil eran funciones racionales, por lo que era natural asumir que ese podía ser el caso para cualquier variedad proyectiva, además la hipótesis de racionalidad implica que el número de soluciones de un sistema de ecuaciones definidas en $\mathbb{F}_q$ sobre la extensión de grado r de $\mathbb{F}_q$ crece exponencialmente con r, es decir, como por definición $Z_X(0) = 1$ podemos escribir

$Z_X(t) = \frac{\prod(1-a_j t)}{\prod(1-b_i t)}$ aplicando log a ambos lados de la ecuación:
$$\sum_r \tfrac{N_r}{r} t^r = \sum \log(\tfrac{1}{1-b_i t}) - \sum \log(\tfrac{1}{1-a_j t}) =$$
$$= \sum_i \sum_r (b_i t)^r / r - \sum_j \sum_r (a_j t)^r / r = \sum_r \tfrac{\sum (b_i)^r - \sum (a_j)^r}{r} t^r$$

Más específicamente, tomando en cuenta el ejemplo de las variedades con descomposición celular, Weil consideró que, así como en las variedades sobre $\mathbb{C}$ la descomposición celular se refleja en los grupos de cohomología, las variedades sobre cuerpos finitos también tienen una suerte de descomposición cohomológica que se refleja en su función zeta de la misma manera que la descomposición celular,por lo que la función zeta sería una función racional de la forma:

$$Z_X(t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\dots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\dots P_{2n}(t)}$$

donde, en el caso en que X se obtuviera como reducción de una variedad X_a definida sobre $\mathbb{Q}$, $\deg P_i = b_i$ sería el rango del i-ésimo grupo de cohomología singular de la variedad X_a sobre $\mathbb{C}$.

La afirmación de que esta conjetura es válida para todas las variedades proyectivas insinuaba la idea de una teoría de cohomología para variedades *abstractas* (ya no definidas necesariamente sobre $\mathbb{C}$) que, en ese entonces (1949), no existía.

A través de estas conjeturas Weil no solo especulaba con la existencia de algún funtor de cohomología sino que también determinaba la forma que la teoría debía tener; los polinomios P_i ,por ejemplo, que son en total $2n$ donde $n = \dim X$ indicarían que, como la cohomología singular de una variedad definida sobre $\mathbb{C}$, para cualquier variedad proyectiva X sobre $\mathbb{F}_q$ habría una descomposición $H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2n} H^i(X)$ con los $H^i(X)$ siendo Λ-módulos (para algún anillo Λ adecuado) de rango finito $b_i = \deg P_i$

Lo que en ese entonces era una analogía de las propiedades de las funciones zeta de variedades con las propiedades de las teorías de cohomología topológicas se fundamentaban en una analogía principal: la fórmula de punto fijo de Lefschetz.

En efecto, si el resultado del teorema de Lefschetz:

$$\#\{x \in X : f(x) = x\} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i Tr(f^*, H^i(X))$$

sigue siendo válido para endomorfismos f de variedades abstractas proyectivas y suaves que tengan *cruzamiento transversal* con la identidad (i.e.: $d1 - df$ inyectiva en $T_x(X)$ para todo $x \in X$) entonces podemos considerar los puntos de X sobre $\mathbb{F}_{q^r}$ como los puntos fijos del morfismo de Frobenius sobre X iterado r veces:

Para cualquier inclusión $X \to \mathbb{P}^n$ el morfismo de Frobenius tiene la expresión

$$Fr((x_0 : \dots : x_n)) = (x_0^q : \dots : x_n^q)$$

por lo que los puntos de X sobre $\mathbb{F}_q$ son aquellos $x = (x_0 : \dots : x_n)$ tales que $x_i^q = x_i$, $i = 0, \dots, n$, o sea aquellos para los cuales $Fr(x) = x$. Entonces tendríamos otra expresión de la función zeta:

$$Z_X(t) = \exp(\sum_r \frac{N_r}{r} t^r) = \exp(\sum_r \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i Tr(Fr^{r*}, H^i(X)) \frac{t^r}{r})$$

Si invertimos el orden de las sumatorias en el segundo término de la igualdad nos queda

$$Z_X(t) = \prod_{i=0}^{2n} (\exp \sum_r Tr(Fr^{r*}, H^i(X)) \frac{t^r}{r})^{(-1)^i}$$

Lo que nos da la primer conjetura si además usamos el siguiente resultado de álgebra lineal

Lema 1.0.1. *Sea ϕ un endormorfismo de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces tenemos la siguiente igualdad de series formales:*

$$\exp(\sum_r Tr(\phi^r)\frac{t^r}{r}) = \det(1-\phi t)^{-1}$$

Demostración. [8, Apéndice C, Lema 4.1, página 455] □

Entonces la sola existencia de la fórmula de trazas de Lefschetz nos da, a través de un poco de álgebra lineal que

$$Z_X(t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\dots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\dots P_{2n}(t)}$$

Donde $P_i(t)$ es el polinomio característico de Fr_X^* restringido a $H^i(X)$. En particular, el grado de P_i es el i-ésimo número de Betti $b_i = \dim H^i(X)$.

Otra de las propiedades que tienen las teorías de cohomología para variedades regulares (o suaves) y proyectivas es la dualidad de Poincaré que se puede escribir de la siguiente manera:

la multiplicación entre los grupos $H^i(X,\mathbb{C}\,) \times H^{2n-i}(X,\mathbb{C}\,) \to H^{2n}(X,\mathbb{C}\,) \cong \mathbb{C}$

hace de $H^i(X,\mathbb{C}\,)$ el dual de $H^{2n-i}(X,\mathbb{C}\,)$.
Weil observó que, si se tuviera un resultado similar para una teoría de cohomología para variedades sobre $\mathbb{F}_q$, esto explicaría las ecuaciones funcionales de las funciones zeta de estas variedades por lo siguiente:

Lema 1.0.2. *([8, Apéndice C, lema 4.3]) Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, duales uno del otro de dimensión r. Y sean $\phi \in End(V)$, $\psi \in End(W)$ y $\lambda \in K$ tales que*

$$\langle \phi v, \psi w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$$

Para todo $v \in V$, $w \in W$ entonces se tiene que

$$\det(1-\psi t, W) = \frac{(-1)^r\lambda^r t^r}{\det(\phi, V)} \det(1-\frac{\phi}{\lambda t}, V)$$

En particular $\det(\psi) = \lambda^r / \det(\phi)$

Demostración. Los dos términos de la ecuación son multiplicativos en sucesiones exactas cortas así que podríamos probarlo por inducción en la dimensión r si uno toma un subespacio ϕ-invariante (se puede suponer sin pérdida de generalidad que K es algebraicamente cerrado y tomar un autoespacio) y demuestra que el dual de ese subespacio es ψ-invariante, lo que sale de la condición en $\langle \phi v, \psi w\rangle$ □

Por eso sería deseable que haya un isomorfimo entre $H^{2n}(X)$ y el cuerpo de coeficientes de los grupos de cohomología que hiciera a $H^i(X)$ el dual de $H^{2n-i}(X)$ a través de la multiplicación. Así aplicamos el lema anterior a la dualidad de Poincaré y a los endomorfismos $\phi = Fr_X^*|H^i(X)$ y $\psi = Fr_X^*|H^{2n-i}(X)$. Tenemos que observar que (por definición) le pedimos a Fr_X^* que sea un morfismo de anillos y que $f^*|H^{2n}(X)$ actúe como multiplicación por $\deg f$ para todo morfismo finito f. En particular tenemos que, en este caso podemos reemplazar $\lambda = q^n$ y entonces el lema y lo que vimos anteriormente nos dice que

$$P_{2n-i} = (-1)^{b_i} \frac{q^{nb_i} t^{b_i}}{\det(Fr_x^*, H^i)} P_i(\frac{1}{q^n t})$$

y además

$$\det(Fr_x^*, H^{2n-i}) = \frac{q^{nb_i}}{\det(Fr_x^*, H^i)} \tag{1.0.1}$$

En Particular, al actuar Fr_X sobre H^{2n} como multiplicación por q^n tenemos que, si pedimos que $b_{2n} = 1$ entonces:

$$P_{2n} = (1 - q^n t) \quad \text{y} \quad P_0 = (1 - t)$$

Por lo que tenemos la siguiente ecuación funcional:

$$Z(t) = ((-1)(q^n)t)^{\sum((-1)^{i+1} b_i)} Z(\frac{1}{q^n t}) \prod_i \det(Fr_x^*, H^i)^{(-1)^i}$$

Usando 1.0.1 para despejar la productoria de la derecha y notando $\chi = \sum((-1)^i b_i)$ (que es la notación usual para la característica de Euler-Poincaré) nos queda:

$$Z(t) = ((-1)(q^{n/2})t)^{\chi} Z(\frac{1}{q^n t}) \tag{1.0.2}$$

Aparte de las conjeturas inspiradas en las teorías de cohomología Weil propuso una conjetura que está más relacionada con el carácter cuantitativo de los puntos racionales de una variedad:
La conjetura dice que uno puede escribir, para X proyectiva y suave sobre $\mathbb{F}_q$

$$Z_X(t) = \frac{Q_1(t) Q_3(t) \dots Q_{2n-1}(t)}{Q_0(t) Q_2(t) \dots Q_{2n}(t)}$$

donde los polinomios Q_i tienen coeficientes enteros, y si $Q_i = \prod_{j=1}^{b_i}(1 - \alpha_{ij} t)$ entonces vale que $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$ en particular esto da una descomposición $N_r = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i \sum_{j=1}^{b_i} \alpha_{ij}^r$ con $|\sum_{j=1}^{b_i} \alpha_{ij}^r| \leq b_i \sqrt{q^{ri}}$.
Esta conjetura se conoce como la hipótesis de Riemann para variedades o la hipótesis de Riemann-Weil, el nombre se debe a que, si las raíces $1/\alpha_{ij}$ de los polinomios Q_i tienen módulo $q^{-i/2}$, como $\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$, entonces los polos de $\zeta_X(s)$ se encuentran en las rectas $\Re(s) = 1, \dots, d$ y los ceros en $\Re(s) = 1/2, 3/2, \dots, d - 1/2$ donde $d = \dim X$

Observación 1.0.3. Es importante aclarar que *a priori* los polinomios Q_i y los polinomios P_i que vinimos manejando anteriormente no son los mismos, ya que la definición de los Q_i es intrínseca a la función zeta de la variedad, mientras que la de los P_i depende de la teoría de cohomología $H^*(X)$ que uno haya elegido.
Si bien los P_i demuestran la racionalidad y la ecuación funcional de Z_X podrían haber factores que se cancelen para hacer que

$$\frac{Q_1(t) Q_3(t) \dots Q_{2n-1}(t)}{Q_0(t) Q_2(t) \dots Q_{2n}(t)} = \frac{P_1(t) P_3(t) \dots P_{2n-1}(t)}{P_0(t) P_2(t) \dots P_{2n}(t)}$$

siendo, no obstante, distintos los P_i de los Q_i.
Esta posibilidad suena, sin embargo, artificial. O por lo menos le sonó artificial a Grothendieck quien vio en la formulación cohomológica de las conjeturas de Weil el indicio de que existen propiedades que son inherentemente cohomológicas más allá del funtor particular de cohomología que uno esté usando.
Por ejemplo, si los polinomios P_i fueran iguales a los Q_i (en particular no dependerían de la cohomología), uno tendría una definición intrínseca de números de Betti ($= \deg Q_i$) (cosa que suena muy sensata). Por otra parte sabiendo la relación entre $Z_X(t)$ y los $P_i(t)$ se ve que la característica de Euler-Poincaré χ_X es inherente a X ya que $\sum_i \deg P_i$ sólo depende de Z_X.
La creencia de Grothendieck (que hoy es la creencia de muchos matemáticos) era que estas propiedades intrínsecas se deben a la existencia de una teoría de cohomología universal (el significado de la frase *teoría de cohomología universal* va a ir haciéndose más preciso a lo largo de la tesina).
Motivos fue el nombre que Grothendieck les dio a estos anillos de cohomología universal. La categoría de Motivos que definimos acá es (conjeturalmente) la que corresponde al caso de variedades proyectivas no singulares definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Sobre esta categoría estaban trabajando en el IHES en 1966/1967 mientras se dictaba el SGA6[SGA6] al cual asistió Manin, quien fue el primero en definir (oficialmente) lo que era un motivo en su paper de 1968 [12].

2. Teorías de intersección

A lo largo de la sección anterior estuvimos hablando de teorías de cohomología y de cómo estas pueden dar luz a la cuestión del problema de las conjeturas de Weil. En general problemas de geometría enumerativa, consistentes en dar el número de entes geométricos que cumplen ciertas condiciones, como por ejemplo ¿cuántas rectas en el espacio proyectivo tridimensional intersecan 4 rectas dadas? o ¿cuántas cónicas hay tangentes a 5 cónicas dadas? En nuestro caso la pregunta: ¿cuántos puntos fijos tiene el endomorfismo de Frobenius de una variedad sobre $\mathbb{F}_q$? no es el clásico problema de geometría enumerativa que consideraban en el siglo XIX, pero tienen en común el hecho de que son problemas donde la respuesta que se busca no tiene en cuenta más que el valor cuantitativo sin considerar para nada aspectos de ubicación de las soluciones.

En estos problemas es natural considerar el aporte que puedan realizar distintas teorías de intersección, donde típicamente se le asigna al grupo de ciclos de una variedad X (el grupo abeliano libre generado por las subvariedades irreducibles de X) clases de equivalencia que conserven el dato numérico de los problemas (*principio de conservación de las soluciones*). En estas clases de equivalencia la intersección de subvariedades define naturalmente un producto, haciendo del conjunto de clases de equivalencia un anillo.
Durante esta sección vamos a hacer menos burda la definición de teoría de intersección, viendo una descripción axiomática a la manera de Grothendieck en [7] y vamos a ver algunas propiedades importantes que se deducen de estos axiomas.
La existencia y buena definición de tales teorías, sin embargo, es un tema demasiado arduo para una sección y la descripción de una sola de estas teorías podría ser tema para una tesis de licenciatura por sí sola (la de Ariel [15], por ejemplo). Para una exposición detallada sobre teorías de intersección referimos al gran libro de Fulton [5].

2.1. Axiomas y definiciones

Una teoría de intersección consta entonces de los siguientes datos: Como punto de partida, una subcategoría $\mathbb{V}$ de $\mathcal{V}ar_k$ estable por productos fibrados y que contenga la clase de isomorfismo de X para todo $X \in \mathbb{V}$. Nosotros vamos a usar mayormente la categoría de variedades proyectivas, lisas (i.e.:no singulares, suaves).
Además tenemos que fijar un anillo de coeficientes Λ para los anillos de intersección, vamos a usar $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$.

- Un funtor contravariante $X \mapsto I(X)$ de $\mathbb{V}$ a la categoría de Λ-álgebras conmutativas
- Un funtor covariante de la categoría $\underline{\mathbb{V}}$ a la de Λ-módulos, donde $\underline{\mathbb{V}}$ consta de los objetos de $\mathbb{V}$ y tiene como flechas los morfismos propios entre dos objetos de $\mathbb{V}$ (en nuestro caso todos los morfismos son propios porque nuestras variedades son proyectivas)
- Una aumentación de Λ-álgebras $\epsilon : I(X) \to \Lambda$ para todo $X \in \mathbb{V}$ irreducible

Como es estándar, la imagen de un morfismo f por el funtor contravariante vamos a notarla f^* y la imagen de f por el funtor covariante f_*

Notación 2.1.1. Con $x \times y$ vamos a querer decir $p_1^*(x)p_2^*(y) \in I(X \times Y)$, es decir, la imagen del elemento $x \otimes y$ por el morfismo $I(X) \otimes I(Y) \to I(X \times Y)$ que hace conmutar las proyecciones:

$$\begin{tikzcd} I(X) \arrow[r] \arrow[dr, "p_1^*"'] & I(X) \otimes I(Y) \arrow[d, dashed] & I(Y) \arrow[l] \arrow[dl, "p_2^*"] \\ & I(X \times Y) & \end{tikzcd}$$

Estos datos tienen que cumplir ciertos axiomas, a saber:

Axioma 2.1.2. En el caso en que $X = \{x\}$ es la variedad que consta de un punto, el morfismo de aumentación $\epsilon : I(\{x\}) \to \Lambda$ es un isomorfismo

(Este axioma se usa para cerciorarse de que, efectivamente, el anillo Λ cumpla la función de anillo de coeficientes de la teoría)

Axioma 2.1.3.

$$(f \times g)_*(x \times y) = f_*(x) \times g_*(y) \tag{2.1.1}$$

Algunas propiedades importantes pueden deducirse directamente de los axiomas y las propiedades universales del producto tensorial de álgebras, por ejemplo, una propiedad análoga a 2.1.3 se deduce de la funtorialidad de las teorías de intersección:

Proposición 2.1.4. $(f \times g)^*(x \times y) = f^*(x) \times g^*(y)$

Demostración.

$$(f \times g)^*(x \times y) = (f \times g)^*(p_1^*(x)p_2^*(y)) = (f \times g)^*(p_1^*(x))(f \times g)^*(p_2^*(y)) = \tag{2.1.2}$$

$$= (p_1 \circ f \times g)^*(x)(p_2 \circ f \times g)^*(y) = (f \circ \pi_1)^*(x)(g \circ \pi_2)^*(y) = \tag{2.1.3}$$

$$= \pi_1^*(f^*(x))\pi_2^*(g^*(y)) = f^*(x) \times g^*(y) \tag{2.1.4}$$

□

En particular esto implica que, identificando $X \times \{y\}$ con X se tiene

$$1_{\{y\}} \times x = x \times 1_{\{y\}} = x$$

en $I(X)$.

Otra propiedad importante que resulta de la propiedad universal del producto tensorial relaciona la multiplicaión de la teoría de intersección dada con el morfismo diagonal $\Delta : X \to X \times X$, ya que, para $x, y \in I(X)$

$$\Delta^*(x \times y) = \Delta^*(p_1^*(x)p_2^*(y)) = (p_1 \circ \Delta)^*(x)(p_2 \circ \Delta)^*(y) = xy$$

Los siguientes dos axiomas son fundamentales:

Axioma 2.1.5. (Reciprocidad de f^* y f_*) Si $f : X \to Y$ es un isomorfismo de variedades entonces se tiene que

$$f_* = (f^*)^{-1}$$

En particular f_* es, en ese caso, un morfismo de anillos

Axioma 2.1.6. Si se tiene un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

con f propio y g playo (*flat*) entonces vale:

$$g^* f_* = \psi_* \phi^* \tag{2.1.5}$$

De 2.1.6 se desprende una proposición que, de alguna manera, relaciona el funtor $X \mapsto I(X)$ con propiedades de ciertas subvariedades de X: Si Y es una subvariedad de X tal que la inclusión $i : Y \to X$ es propia, podemos considerar $[Y] := i_*(1_Y) \in I(X)$ como "la clase de Y en $I(X)$"

Proposición 2.1.7. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo playo y sea Y' una subvariedad de Y tal que la inclusión es un morfismo propio, entonces $f^*([Y']) = [f^{-1}(Y')]$*

Demostración. La demostración de esta proposición es aplicar el axioma 2.1.6 al producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(Y') \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

□

Vemos entonces que, aunque al principio puede parecer un enfoque demasiado abstracto, esta axiomática empieza a reflejar la situación a la que queremos apuntar, en donde $f^*([Y]) = [f^{-1}(Y)]$

Axioma 2.1.8. (Fórmula de proyección) Si f es un morfismo propio $f : X \to Y, \quad x \in I(X), \quad y \in I(Y)$ entonces se tiene:

$$f_*(f^*(y)x) = y f_*(x) \tag{2.1.6}$$

Este axioma simplemente expresa que, dado $f : X \to Y$ de manera que f^* da estructura de $I(Y)$-álgebra a $I(X)$, f_* es un morfismo de $I(Y)$-módulos.

Estos axiomas le dan forma general al funtor de intersección, pero no son suficientes para establecer el papel de los principales objetos geométricos en la teoría. Los axiomas de exactitud y homotopía cumplen ese rol y vamos a utilizarlos más adelante para calcular anillos de intersección de construcciones geométricas clásicas como fibrados vectoriales y blow-ups.

A partir de ahora vamos tomar como categoría $\mathbb{V}$ a las variedades no singulares o, en general, a cualquier subcategoría de $\mathcal{V}ar$ que contenga a la recta afín $\mathbb{A}^1$ y a todos los abiertos Zariski de cualquier variedad $X \in \mathbb{V}$. En este contexto formulamos:

Axioma 2.1.9. (Axioma de exactitud) Sea $X \in \mathbb{V}$ y $Y \in \mathbb{V}$ una subvariedad cerrada de X, $U = X \backslash Y$, $i : Y \to X$ y $j : U \to X$ las inmersiones. Entonces la sucesión:

$$I(Y) \xrightarrow{i_*} I(X) \xrightarrow{j^*} I(U) \to 0$$

es exacta

Axioma 2.1.10. (Axioma de homotopía) Sea $X \in \mathbb{V}$, entonces la aplicación $x \mapsto x \times 1_{\mathbb{A}^1}$ que va de $I(X)$ a $I(X \times \mathbb{A}^1)$ es un isomorfismo.

Ahora vamos a aplicar estos axiomas, siguiendo los pasos de [7], para estudiar la estructura de ciertos productos.

Proposición 2.1.11. *Sea $X \in \mathbb{V}$ y U una variedad isomorfa a un abierto afín. El morfismo $x \mapsto x \times 1_U$ de $I(X)$ en $I(X \times U)$ es suryectivo.*

Demostración. Sea $j : U \to \mathbb{A}^n$ la inclusión y $p_1 : X \times \mathbb{A}^n \to X$ la proyección en la primer coordenada, entonces la función $x \mapsto x \times 1_U$ corresponde a la composición $j_* \circ p_1^*$, como j^* es suryectivo por 2.1.9 basta ver que p_1^* lo es. Esto se puede ver por inducción ya que el caso $n = 1$ es el axioma de homotopía 2.1.10 para $n > 1$ usamos $X \times \mathbb{A}^n = X \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{n-1}$ □

A partir de esta proposición vamos a poder calcular generadores de los grupos de intersección (los $I(X)$ vistos como Λ-módulos) usando estratificaciones y descomposiciones de una variedad X como unión de variedades más sencillas.

Proposición 2.1.12. *Sea $X \in \mathbb{V}$ y $(X_i)_{0 \le i \le n}$ una sucesión creciente de subvariedades cerradas de X que pertenezcan a $\mathbb{V}$, con $X_n = X$ (lo que a veces se denomina una estratificación de X) . Denotamos $u_i : X_i \to X$ y $v_i : (X_i \backslash X_{i-1}) \to X_i$ las inclusiones cerradas y abiertas respectivamente. Supongamos que tenemos subconjuntos $S_i \subset I(X_i)$ tales que $v_i^*(S_i)$ generan $I(X_i \backslash X_{i-1})$ como Λ-módulo. Entonces*

$$S = \bigcup u_{i*}(S_i) \subset I(X)$$

genera $I(X)$ como Λ-módulo.

Demostración. Vamos a verlo por inducción en n, el número de estratos.
Si $n = 0$ no hay nada que probar. Supongamos que $n > 0$ y que la proposición vale para valores menores que n. Sea para $0 \le i \le n-1$, $u_i' : X_i \to X_{n-1}$ las inclusiones, y $S' = \bigcup u_{i*}'(S_i)$. Por inducción S' genera $I(X_{n-1})$. Ahora aplicamos el axioma de exactitud 2.1.9 a la sucesión:

$$I(X_{n-1}) \xrightarrow{(u_{n-1})_*} I(X) \xrightarrow{v_n^*} I(X_n \backslash X_{n-1}) \to 0$$

Como $v_n^*(S_n)$ genera $I(X_n \backslash X_{n-1})$ entonces $S = (u_{n-1})_*(S') \cup S_n$ genera $I(X)$ como Λ-módulo. □

Ahora podemos aplicar las proposiciones anteriores al caso más sencillo de estratificación y descomposición: el espacio proyectivo:

Corolario 2.1.13. *Sea* $X \in \mathbb{V}$, *y* $(H^i)_{0\leq i\leq n}$ *una sucesión decreciente de subespacios lineales de* $\mathbb{P}^n$ *donde* $\dim H^i = n-i$. *Entonces todo elemento de* $I(X\times\mathbb{P}^n)$ *es suma de elementos de la forma* $x\times[H^i]$ *con* $x\in I(X)$ *y, como antes, notamos* $[H^i]=w_{i*}(1_{H^i})$ *donde* $w_i : H^i \to \mathbb{P}^n$ *es la inmersión*

Demostración. Se tiene que

$$x\times[H^i] = id_{X*}(x)\times w_{i*}(1_{H^i}) = id_{X*}\times w_{i*}(x\times 1_{H^i})$$

Sea $S_i \subset I(X\times H^{n-i})$ el conjunto formado por elementos del tipo $x\times 1_{H^{n-i}}$. Queremos probar que $S=\bigcup id_{X*}\times w_{i*}(S_i)$ genera $I(X\times\mathbb{P}^n)$. Para eso tenemos que verificar que $v_i^*(S_i)$ genera $I(X\times H^{n-i}\backslash H^{n-(i-1)})$. Como las variedades $H^{n-i}\backslash H^{n-(i-1)}$ son espacios afines, $I(X\times H^{n-i}\backslash H^{n-(i-1)})\cong I(X)$ y los $v_i^*(S_i)$ son todos los elementos de $I(X\times H^{n-i}\backslash H^{n-(i-1)})$ de la forma $x\times 1_{H^{n-i}\backslash H^{n-(i-1)}}$. Por lo que, aplicando la proposición anterior se deduce el corolario. □

Observación 2.1.14. La notación de los H^i en forma decreciente es sugestiva de la situación en donde los anillos de intersección $I(\mathbb{P}^n)$ son los clásicos grupos de ciclos módulo una *equivalencia adecuada* (vamos a hablar al respecto a continuación). En tales casos la clase $[H]$ de un hiperplano cumple que, para el producto en $I(X)$, se tiene $[H]^j=[P_j]$ donde P_j es una variedad lineal de codimensión j (la codimensión de una subvariedad Y de X es$=\dim X-\dim Y$). En particular todas las variedades lineales de la misma dimensión están en la misma clase de equivalencia.

Corolario 2.1.15. *El anillo de intersección de* $I(\mathbb{P}^n)$ *es, como* Λ*-módulo, isomorfo a* $\Lambda[x]/(x^{n+1})$. *Si además se cumple que para la clase de un hiperplano* $[H]$ *se tiene* $[H]^j=[P_j]$, *donde* P_j *es una variedad lineal de codimensión* j, *entonces el isomorfismo entre* $I(\mathbb{P}^n)$ *y* $\Lambda[x]/(x^{n+1})$ *es un isomorfismo de anillos*

Demostración. Por inducción, usando que la inmersión de un $\mathbb{P}^{n-1}$ como hiperplano de $\mathbb{P}^n$ induce una sucesión exacta:

$$I(\mathbb{P}^{n-1})\xrightarrow{i_*} I(\mathbb{P}^n)\to I(\mathbb{A}^n)\to 0 \tag{2.1.7}$$

Para el caso $n=1$ la sucesión exacta es:

$$I(\{x\})\xrightarrow{i_*} I(\mathbb{P}^1)\to I(\mathbb{A}^1)\to 0$$

Donde $I(\{x\})\cong\Lambda$ por 2.1.2 y, por el axioma de homotopía 2.1.10 $I(\mathbb{A}^n)\cong\Lambda$.
El segundo morfismo se escinde por tratarse de Λ-módulos, sólo habría que ver que i_* tiene núcleo trivial, lo que es cierto porque se puede factorizar $id_{\{x\}*}=p_*\circ i_*$ donde p es la proyección de $\mathbb{P}^n$ a un punto.
Procediendo con la inducción, si $n>1$ se tiene la sucesión exacta:

$$\Lambda[x]/(x^n)\xrightarrow{i_*} I(\mathbb{P}^n)\xrightarrow{j^*}\Lambda\to 0$$

El segundo morfismo se escinde, como antes por tratarse $I(\mathbb{P}^n)$ de un Λ-módulo y j^* de un morfismo de Λ-álgebras. El morfismo i_* tiene núcleo trivial por poder factorizarse la identidad de $\mathbb{P}^{n-1}$ por una inmersión y una proyección desde $\mathbb{P}^n$. Así vemos que $I(\mathbb{P}^n)\cong$

$\Lambda[x]/(x^{n+1})$. Además, en el proceso de la demostración se puede ver que la descomposición de $I(\mathbb{P}^n)$ es de la forma:

$$\Lambda \oplus i_{1*}(1_{\mathbb{P}^{n-1}}) \oplus i_{2*}(1_{\mathbb{P}^{n-2}}) \oplus \cdots \oplus i_{n*}(1_{\{x\}})$$

Donde las i_k son inclusiones de variedades lineales. Por lo que, si se da la condición sobre el producto de $[H]$, el isomorfismo también preserva productos. $\square$

Observación 2.1.16. De una manera completamente análoga se demuestra la afirmación más general:

$$I(X \times \mathbb{P}^n) \cong I(X)[T]/(T^{n+1})$$

salvo que esta vez el segundo morfismo de la sucesión exacta que corresponde a 2.1.7 se escinde por lo siguiente:

Sea el morfismo j^* la inclusión abierta $j : \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n$. Esa inclusión encaja en el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "id"] & X \times \mathbb{A}^n \arrow[d, "j"] \\ X' \arrow[r, "f"'] & X \times \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

En donde $f(x) = (x, y_o)$ con $y_o = j(y)$ para algún $y \in \mathbb{A}^n$. Tenemos que f es una inclusión cerrada, así que es propio, y que j es una inclusión abierta, así que es playo. Luego, por el axioma 2.1.6, tenemos que

$$j^* f_* = \psi_* \tag{2.1.8}$$

. En la demostración usamos el isomorfismo que existe entre $I(X)$ y $I(X \times \mathbb{A}^n)$ este isomorfismo está dado por p_{1*}, con p_1 la proyección $X \times \mathbb{A}^n \to X$. Entonces lo que queremos ver es que el morfismo $p_{1*}j^*$ se escinde. Entonces usamos 2.1.8 y tenemos:

$$p_{1*}j^* f_* = p_{1*}\psi_* = (p_1 \circ \psi)_* = id_*$$

La razón por la cual presentamos este enfoque axiomático de teorías de intersección es que en adelante vamos a usar varias teorías de intersección distintas para aprovechar la información que cada una de ellas pueda brindarnos. Así es más práctico dejar asentadas primero las propiedades comunes a todas y después explicitar propiedades más particulares de cada una de las teorías en particular.

Ejemplos 2.1.17. Entre las teorías de Intersección más importantes están:

- El anillo de ciclos módulo equivalencia racional $A^*(X)$ de una variedad regular, o *anillo de Chow* de X. En donde una subvariedad Z de X es equivalente a otra Y si (y sólo si) existe un morfismo $f : X \to \mathbb{P}^1$ tal que $f^{-1}(\{(0:1)\}) = Z$ y $f^{-1}(\{(1:0)\}) = Y$
- El anillo de ciclos módulo equivalencia algebraica. En donde una subvariedad Z de X es equivalente a otra Y si (y sólo si) existe otra variedad S, un morfismo $f : X \to S$ y puntos $s, s' \in S$ tales que $f^{-1}(\{s\}) = Z$ y $f^{-1}(\{s'\}) = Y$.

Definición 2.1.18. Para un ciclo Z en X que consta de una combinación lineal de puntos (es decir $Z = \sum a_i[x_i]$ con $x_i \in X$) se define su grado como:

$$\int Z = \sum a_i \in \mathbb{Z}$$

A partir de esta definición podemos dar otro ejemplo:

Ejemplo 2.1.19. El anillo de ciclos módulo equivalencia numérica $N^*(X)$. Donde Z es equivalente a Y si $\dim Z = \dim Y$ y , para todo ciclo W de codimensión $\mathrm{codim}(W) = \dim Z$ se tiene que $\int Z \cdot W = \int Y \cdot W$ en $A^*(X)$. Constituye un ejemplo de teoría de intersección

Observación 2.1.20. Estos ejemplos se pueden entender de la siguiente manera:
Dadas dos subvariedades Z e Y de X, se dice que se intersecan propiamente si $\mathrm{codim}(W_l) = \mathrm{codim}Z + \mathrm{codim}Y$ para toda componente irreducible W_l de $Z \cap Y$. En ese caso se puede definir la multiplicidad de intersección $i(Z, Y, W_l; X)$ de las componentes W_l (ver [8, capítulo I, sección 7]) y la fórmula

$$Z \cdot Y = \sum_l i(Z, Y, W_l; X) W_l$$

define un producto conmutativo y asociativo siempre y cuando las intersecciones sean propias. Pero claro, este producto no está definido para todo par de subvariedades Y, Z por ejemplo, no se puede definir así el cuadrado de un ciclo $Y \cdot Y$.
Por eso se dice que una relación de equivalencia de ciclos es adecuada si, dados $Y, Z \subseteq X$ existe un ciclo W equivalente a Z tal que Y y W se intersequen propiamente, y si, cada vez que $Y \sim W$ y tanto $Z \cdot Y$ como $Z \cdot W$ están definidas $Z \cdot Y \sim Z \cdot W$.
Las equivalencias adecuadas definen teorías de intersección si se toma para un morfismo $f : X \to S$ a $f^*(Y)$ como la clase de equivalencia de $f^{-1}(Y)$ y como $f_*(V)$ como la clase de $d \cdot f(V)$ donde $d = [K(V) : K(f(V))]$ si $\dim V = \dim f(V)$ y 0 si no.
En particular, en los anillos $I(X)$ que vienen de equivalencias adecuadas, la codimensión da a $I(X)$ estructura de anillo graduado.

Los ejemplos vistos son teorías de intersección que vienen de equivalencias adecuadas. Puede demostrarse que la equivalencia racional es más fina que la equivalencia algebraica que a su vez es más fina que la equivalencia numérica. Más aún, vale que la equivalencia racional es la más fina de las equivalencias adecuadas y que la equivalencia numérica es la menos fina de las equivalencias adecuadas no triviales.

En adelante vamos a usar más que nada el anillo de Chow $A^*(X)$ y el de equivalencia numérica $N^*(X)$. El primero, por tener varias propiedades importantes, entre ellas el hecho de que el grupo A^1 es, para las variedades regulares, naturalmente isomorfo al grupo $Pic(X)$ de clases de isomorfismos de fibrados inversibles (i.e.:line bundles). El segundo, por ser el que naturalmente nos interesa, ya que, si queremos saber propiedades enumerativas de las variedades sobre cuerpos finitos, es natural estudiar las subvariedades sólo por la cantidad de puntos que tengan y cómo estas cantidades interactúan con las propiedades geométricas de la variedad; esto es lo que nos permite el anillo $N^*(X)$.

2.2. Cohomologías de Weil

A lo largo de la sección 1 vimos la estrecha relación que guardan las propiedades enumerativas de las variedades sobre cuerpos finitos y la (posible) existencia de una teoría de cohomología cumpliendo el teorema de las trazas de Lefschetz.
En esta sección vamos a ver (guiándonos por [9]) exactamente qué queremos decir con "teoría de cohomología" y vamos a dar los axiomas de una cohomología de Weil y ver cómo estos implican el teorema de las trazas de Lefschetz.

Por empezar, podemos decir que el objetivo primigenio de una cohomología de Weil es el de contar puntos, quiero decir que es la idea que dio inicio al concepto, no que contar puntos sea la única gracia que tenga esta teoría tan extensa. Si lo mínimo que tenemos que hacer es contar, el anillo de coeficientes con el cual tenemos que trabajar tiene que ser de característica cero. Esta restricción marca desde el vamos una diferenciación entre la cohomología de haces y cualquier cohomología de Weil, ya que en la primera los grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{F})$ tienen estructura de k-módulos donde k es el cuerpo de base de X.
Por otra parte, para que la fórmula de las trazas tenga sentido, necesitamos dar sentido al término $tr(f^*, H^i)$ por lo que el dato a pedir puede reducirse a lo siguiente:

Definición 2.2.1. (Cohomología de Weil) Dado un cuerpo de característica cero K, una cohomología de Weil consiste en un funtor contravariante $X \mapsto H^*(X)$ de la categoría de variedades regulares proyectivas a la de K-álgebras graduadas anticonmutativas[1] de dimensión finita que satisfaga los siguentes axiomas:

Axioma 2.2.2. (Dualidad de Poincaré) Sea $n = \dim X$ entonces:

- Los grupos $H^i(X)$ son cero si $i \notin \{0, \dots, 2n\}$.
- Se tiene un isomorfismo de orientación $H^{2n}(X) \cong K$
- La multiplicación
$$H^i(X) \times H^{2n-i}(X) \to H^{2n} \cong K$$
hace que los espacios $H^i(X)$ y $H^{2n}(X)$ duales uno del otro

Sea $f : X \to Y$ un morfismo y $f^* = H^*(f) : H^*(Y) \to H^*(X)$. Entonces podemos definir f_* como la traspuesta de f^*. Al ser f^* un morfismo de anillos tenemos que se cumple la fórmula de proyección:
$$f_*(f^*(a) \cdot b) = a \cdot f_*(b)$$

Axioma 2.2.3. (Fórmula de Künneth) Sean $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ las proyecciones, entonces el morfismo natural $a \otimes b \mapsto p_1^* a p_2^* b$ es un isomorfismo:

$$H^*(X) \otimes_K H^*(Y) \cong H^*(X \times Y)$$

[1] es un álgebra graduada en donde, para dos elementos a y b homogéneos de grado α y β respectivamente, se tiene que $a \cdot b = (-1)^{\alpha\beta} b \cdot a$

Axioma 2.2.4. (Morfismo de ciclos) Sea $C^p(X)$ el grupo de ciclos de codimensión p. Existe un morfismo de grupos

$$\gamma_X : C^p(X) \to H^{2p}(X)$$

que satisface:

funtorialidad. Si $f : X \to Y$ es un morfismo, entonces

$$f^*\gamma_Y = \gamma_X f^*, \qquad f_*\gamma_X = \gamma_Y f_*$$

multiplicatividad. El morfismo de ciclos respeta productos cartesianos:

$$\gamma_{X\times Y}(Z \times W) = \gamma_X(Z) \otimes \gamma_Y(W)$$

no es trivial. Sea P una variedad consistente en un punto, entonces

$$\gamma_P : C^*(P) = \mathbb{Z} \to H^*(P) = K$$

es la inclusión canónica

Definición 2.2.5. Dos ciclos V y W se dicen homológicamente equivalentes para el funtor H^* si $\gamma_X(V) = \gamma_X(W)$

Observación 2.2.6. Puede probarse que la equivalencia homológica de ciclos es una equivalencia adecuada (ver [9]) menos fina que la equivalencia algebraica.

Es claro que el morfismo de ciclos es lo que necesitamos para contar puntos mediante el funtor H y no tener una teoría completamente vacía. Por otra parte si necesitamos contar los puntos fijos de un endomorfismo f podemos tomar $\Gamma_f \subset X \times X$, el gráfico de f, y fijarnos cuántos puntos tiene en común con Δ, el gráfico de la identidad, o, en otras palabras, calcular el grado del ciclo 0-dimensional dado por $\Gamma_f \cdot \Delta$. Gracias al último axioma, podemos hacer esto a través del funtor H^*.

Correspondencias homológicas Si $X \mapsto H^*(X)$ es una cohomología de Weil podemos escribir al dual de $H^i(X)$ como $H_i(X)$, que es canónicamente isomorfo a $H^{2n-i}(X)$ por dualidad de Poincaré, y escribir $H_*(X)$ por el dual de H^* . Usando esta notación tenemos morfismos canónicos de K-espacios vectoriales que podemos expresar así:

$$\begin{aligned} &H^*(X \times Y) \cong H^*(X) \otimes H^*(Y) && \text{Por la fórmula de Künneth} \\ &\cong H_*(X) \otimes H^*(Y) && \text{Por dualidad de Poincaré} \\ &\cong \hom_K(H^*(X), H^*(Y)) \end{aligned}$$

explícitamente, a un elemento de la forma $u = a\otimes b \in H^*(X\times Y)$ le corresponde la transformación lineal u^* dada por $c \mapsto \langle c \cdot a\rangle b$ donde $\langle \quad \rangle$ es cero en $H^i(X)$ para $i < 2n = 2\dim X$ y es el morfismo de orientación en $H^{2n}(X)$.
Los elementos $H^*(X \times Y)$ son denominados correspondencias homológicas.
Por la forma de estos morfismos vemos que los elementos $u \in H^{2n+d}(X\times Y)$ corresponden a morfismos homogéneos de grado d. Más aún, como la fórmula de Künneth implica que $p_1^*(a) = a \otimes 1_Y$ entonces $p_{1*}(a \otimes b) = a$ y el morfismo u^* también puede ser descripto como

$c \mapsto p_{2*}(p_1^*(c) \cdot u)$.

La descripción de $\hom_K(H^*(X), H^*(Y))$ como elementos de $H^*(X \times Y)$ nos da el marco adecuado para formular y probar el teorema de las trazas, ya que nos va a permitir calcular el grado de intersección entre morfismos en general, vengan o no de funciones entre Y y X. Pero para formular el teorema de Lefschetz necesitamos primero una proposición más:

Notemos que, en la ecuación por la cual dedujimos que $H^*(X \times Y) \cong \hom_K(H^*(X), H^*(Y))$ podríamos haber razonado también que

$$H_*(X) \otimes H^*(Y) \cong \hom_K(H_*(X), H_*(Y))$$

Notación 2.2.7. Para cada $v \in H_*(X) \otimes H^*(Y)$ notamos con v_* el morfismo de $\hom_K(H_*(X), H_*(Y))$ que le corresponde

En este caso, si $v = b \otimes a \in H^\beta(X) \otimes H^\alpha(Y)$ y $d \in H_\delta(X) = H^{2n-\delta}(X)$ la transformación lineal v_* viene dada por:

$$d \mapsto (b \otimes a) \otimes (d \otimes 1_Y) = p_1^*(b) p_2^*(a) p_1^*(d) p_2^*(1_Y) = (-1)^{\alpha\delta}(b \cdot d) \otimes a \mapsto (-1)^{\alpha\delta}\langle b \cdot d \rangle a$$

Los morfismos u^* y u_* se relacionan de la siguiente manera:

Proposición 2.2.8. *Sea $u \in H^*(X \times Y)$ y ${}^t u \in H^*(Y \times X)$ la imagen de u por τ^* donde $\tau : X \times Y \to Y \times X$ es la trasposición $\tau((x, y)) = (y, x)$. Entonces $({}^t u)_* : H_*(Y) \to H_*(X)$ es la traspuesta de u^* vista como transformación lineal.*

Demostración. Primero observemos que, si p_1, p_2 son las proyecciones de $X \times Y$ en X e Y respectivamente y, q_1, q_2 son las proyecciones desde $Y \times X$ entonces vale:

$$\begin{aligned} &\tau^*(a \otimes b) = \tau^*(p_1^*(a) p_2^*(b)) = \tau^* p_1^* a \cdot \tau^* p_2^* b = \\ &(p_1 \circ \tau)^* a \cdot (p_2 \circ \tau^*) b = q_2^* a q_1^* b = (-1)^{\deg a \deg b} b \otimes a \in H^*(Y \times X) \end{aligned}$$

entonces, para $a \in H^\alpha(X)$, $b \in H^\beta(X)$, $d \in H_\delta(Y)$ tenemos ${}^t u_*(d) = (-1)^{\alpha\beta}(-1)^{\alpha\delta}\langle b \cdot d \rangle a$ donde $\langle b \cdot d \rangle = 0$ si $\beta \neq \delta$. Entonces, para $c \in H^*(X)$:

$${}^t u_*(d)(c) = (-1)^{\alpha\gamma}\langle c \cdot a \rangle \langle b \cdot d \rangle = \langle u^* c \cdot d \rangle$$

Luego la proposición vale para elementos homogéneos de bi-grado (α, β) y, por linealidad se extiende a todo $H^*(X \times Y)$ □

Ahora podemos enunciar y demostrar el caso general de la fórmula de trazas:

Proposición 2.2.9. *(Fórmula de las trazas de Lefschtez. Versión general) Sean X e Y variedades de dimensión n y m respectivamente, y $v \in H^*(X \times Y)$, $w \in H^*(Y \times X)$ correspondencias de grados d y $-d$ respectivamente. Denotemos con $tr_i(\phi)$ la traza de la transformación lineal $\phi : H^i(X) \to H^i(X)$ Entonces vale:*

$$\langle v \cdot^t w \rangle = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i tr_i(w^* \circ v^*) \tag{2.2.1}$$

Demostración. Por linealidad, podemos probarlo sólo para elementos homogéneos $v \in H^{2n-i}(X) \otimes H^j(Y)$ y $w \in H^{2m-j}(Y) \otimes H^i(X)$ donde $j - i = d$.
Vamos a calcular las trazas $tr_i(w^* \circ v^*)$ explícitamente. Para eso vamos a tomar una base $(a_l)_{0 \leq l \leq b_{2n-i}}$ de H^{2n-i} y su base dual $(\alpha_l)_{0 \leq l \leq b_{2n-i}} \subset H_{2n-i} = H^i(X)$ de manera que $\langle a_l \cdot \alpha_l \rangle = 1$. Así podemos escribir $v = \sum a_l \otimes b_l$ y $w = \sum c_l \otimes \alpha_l$ y entonces

$$\langle v \cdot \ {}^t w \rangle = \sum_l (a_l \otimes b_l) \cdot (-1)^{2m-j+i} (\alpha_l \otimes c_l) = \sum_l (a_l \cdot \alpha_l) \cdot (b_l \cdot c_l)$$

Por otra parte calculamos

$$(w^* \circ v^*)(a_l) = (-1)^i w^*(b_l) = (-1)^i \sum_j \langle b_l \cdot c_j \rangle a_j$$

Entonces, $tr_i(w^* \circ v^*) = (-1)^i \langle v \cdot \ {}^t w \rangle$. Cuando consideramos correspondencias no homogéneas tenemos la fórmula $tr_i(w^* \circ v^*) = \sum_i (-1)^i \langle v \cdot^t w \rangle$ □

Si bien esta no es exactamente la fórmula de los puntos fijos de Lefschetz, vamos a ver que podemos deducirla directamente de acá.

Observación 2.2.10. Vamos a abusar notación a lo bruto y escribir con la misma letra, Δ, al morfismo diagonal $x \mapsto (x, x) \in X \times X$, a la subvariedad $\{(x, x) \in X \times X \ : x \in X\}$ y a su ciclo en $H^n(X \times X)$

Proposición 2.2.11. *Sea $\Delta : X \to X \times X$ el morfismo diagonal, entonces la transformación lineal definida por la correspondencia $\Delta_*(1_X) \in H^n(X \times X)$ es la identidad.*

Demostración. Por la fórmula de proyección:

$$p_{2*}(\Delta_*(1_X) b \otimes 1_X) = p_{2*}\Delta_*(\Delta^*(b \otimes 1_X) 1_X) = (p_2 \circ \Delta)_*(\Delta^*(b \otimes 1_X)) = b$$

□

Como $\tau \circ \Delta = \Delta$ vale ${}^t\Delta_*(1_X) = \Delta_*(1_X)$, en particular la ecuación 2.2.1 se lee:

$$\langle u \cdot \Delta \rangle = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i tr_i(u^*)$$

Por último la fórmula de la sección 1 va a deducirse de lo siguiente.

Proposición 2.2.12. *Sea $f : Y \to X$ un morfismo y $u = \in H^*(X \times Y)$ la clase de la traspuesta del gráfico de f (i.e.: la clase del ciclo $\{(f(y), y) : y \in Y\}$). Entonces $f^* = u^* : H^*(X) \to H^*(Y)$*

Para demostrarlo vamos a usar el siguiente

Lema 2.2.13. *Dado un diagrama de correspondencias:*

$$\begin{tikzcd}
H^*(X) \arrow[r, "u^*"] & H^*(Y) \arrow[d, "y^*"] \\
H^*(W) \arrow[u, "{}^t x^*"] \arrow[r, "v^*"'] & H^*(Z)
\end{tikzcd}$$

donde $x \in \bigoplus_i H^{2i}(X \times W)$. Si $v = (x \otimes y)^* u$, entonces $v = y \circ u \circ \ {}^t x$

Demostración. Podemos asumir, por linealidad, que $u = a \otimes b$. Entonces, si $c \in H^*(W)$ tenemos:

$$v^*(c) = (x^*a \otimes y^*b)^*c = \langle c \cdot x^*a \rangle y^*b = y^*(\langle\, {}^t x^*c \cdot a\rangle b) = y^*(u^*({}^t x^*c))$$

□

Ahora demostramos la proposición:

Demostración. Sea $\Delta \subset X \times X$ la variedad diagonal, por definición

$$u = \gamma_{X \times Y}(f \times id_Y)^*(\Delta_X) = f^* \otimes id_Y(\Delta_X)$$

entonces $u^* = f^*$ por aplicación del lema al diagrama

$$\begin{tikzcd} H^*(Y) \arrow[r, "id"] & H^*(Y) \arrow[d, "id"] \\ H^*(X) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "u^*"'] & H^*(Y) \end{tikzcd}$$

□

En particular tenemos el siguiente

Corolario 2.2.14. *(Fórmula de las trazas de Lefschetz) Sea $f : X \to X$ un endomorfismo, Γ_f la traspuesta de su gráfico y Δ el ciclo de la diagonal, entonces:*

$$\langle \Gamma_f \cdot \Delta \rangle = \sum_{i=0}^{2n} tr_i(f^*)$$

Observación 2.2.15. Weil formuló sus conjeturas en 1956 en su trabajo [19]. En ese paper la formulación de las conjeturas aparece sin hacer mención alguna al enfoque cohomológico. Aparentemente Weil tenía, sin embargo, ese enfoque en mente desde aquel entonces pero no lo hizo público; tal vez por parecerle demasiado prematuro o por no condicionar la resolución de las conjeturas a las ideas que él tenía (de hecho la primera demostración de la racionalidad de la función zeta, por Dwork, se basa exclusivamente en análisis p-ádico y no usa la formulación cohomológica para nada, se puede ver por ejemplo en el libro [10]). Puede decirse entonces que la búsqueda de Cohomologías de Weil empezó alrededor de 1949. El primer escrito que contiene una explicación cohomológica de las conjeturas como vimos acá es una carta de Serré. A mediados de la década del '50 Serré había definido una teoría de cohomologías para variedades sobre cuerpos finitos (ver [8, Apéndice C, sección 2]). A partir del año 1958 el grupo de Serré y Grothendieck empieza a trabajar activamente en las cohomologías l-ádicas y cohomología cristalina, culminando en el trabajo de 1974 [3] en el que Deligne demuestra la hipótesis Riemann-Weil con la generalidad formulada en 1 usando propiedades de las cohomologías l-ádicas.

Teoría universal de cohomología . Lo que queda de esta sección está escrito a modo ilustrativo sin pretender mayores presiciones o completitud en la exposición.
Ya fueron mencionadas las cohomologías l-ádicas (son definidas como $\varinjlim_r H^*_{et}(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ donde $\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}$ es el haz constante y el límite es sobre los grupos de cohomología etal) y la cohomología cristalina (no tengo ni puta idea de cómo se define) como ejemplos de cohomologías definidas para variedades sobre cuerpos finitos que cumplen con los axiomas de cohomología de Weil.
Sin embargo estas teorías adolecen de falta de cohesión. Por empezar, formalmente uno tiene, para cada primo l distinto de la característica del cuerpo un funtor de cohomología distinto, aunque las propiedades son siempre las mismas para todo $l \neq p = char(k)$. No existe un enfoque unificado y universal. Ya mencionamos la idea de Grothendieck de que un enfoque universal a la teoría de cohomologías de Weil existía. Con esto quería decir más o menos lo siguiente:

Para todo cuerpo k debería existir una categoría $\mathcal{M}(k)$ abeliana y semisimple, con un producto conmutativo, unitario y exacto a derecha (que denotamos con $\otimes$) y munida de un funtor contravariante

$$h : \mathcal{V}ar_k \to \mathcal{M}(k)$$

que cumpla los axiomas de cohomolgía de Weil entendidos en el siguiente sentido:

Axioma 2.2.16. Isomorfismo de Künneth Para todos $X,\ Y \in \mathcal{V}ar_k$ hay un isomorfismo canónico $h(X \times Y) \cong h(X) \otimes h(Y)$

Axioma 2.2.17. Dualidad de Poincaré. Tiene que existir en $\mathcal{M}(k)$ un funtor de dualidad $\curlyvee : \mathcal{M}(k) \to \mathcal{M}(k)$ que es una involución y respeta productos tensoriales. Y para todo $X \in \mathcal{V}ar_S$ una descomposición $h(X) = \oplus_{r=0}^{2\dim X} h^r(X)$ tales que

$$\curlyvee(h^r(X)) = h^{2\dim X - r}(X)$$

Además el funtor h tiene que cumplir con la siguiente propiedad universal:

Axioma 2.2.18. Para todo funtor de cohomología de Weil H^* tiene que existir un único funtor ψ que haga conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}ar_S \arrow[r, "H^*"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{V} \\ \mathcal{M}(k) \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Se le piden a $\mathcal{M}(k)$ otras propiedades, que se explican en [1]. Las que nombro acá son simplemente para ilustrar el carácter universal que tiene que tener la categoría.
En definitiva se le pide al funtor h que resuma perfectamente todas las propiedades de una Cohomología de Weil.
De existir tal funtor, todas las propiedades categóricas (explicables en términos del funtor H^* y sus propiedades) de las cohomologías de Weil serían válidas si y sólo si son validas en $\mathcal{M}(k)$. Se podrían definir, por ejemplo, números de Betti b_i que no dependieran de la teoría

en particular. Más en general, se podrían definir invariantes cohomológicos universales a través de h.
La categoría $\mathcal{M}(k)$ fue denominada por Grothendieck la categoría de Motivos de variedades sobre k, los funtores ψ son comúnmente llamados *funtores de realización*. El nombre de la categoría proviene de un término de musicología en donde comúnmente se denomina motivo a una línea melódica que, a lo largo de una composición, es interpretada por varios instrumentos distintos, en tonalidades o modos distintos. Así, el motivo $\mathfrak{h}(X)$ de una variedad es un objeto "interpretado"por varias teorías de cohomología diferentes, o también, un motivo puede ser pensado como la esencia de un anillo $H^*(X)$ más allá de las particularidades de la definición del funtor H^*.

Como ya dijimos antes, en este trabajo va a ser definida una categoría que vamos a llamar categoría de motivos. Conjeturalmente, esta categoría correspondería a la categoría de motivos de variedades algebraicas proyectivas y regulares sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Aunque se cree ampliamente que esta conjetura es cierta, no parece que se esté muy cerca de demostrarla. En general se sabe mucho menos sobre la existencia de la categoría de motivos para variedades no proyectivas o singulares.

3. Puntos en curvas

En esta Sección vamos a ver cómo podemos deducir la conjetura de Riemann-Weil en el caso de que la variedad sea una curva. Para esto vamos a usar propieddades de las correspondencias entre dos curvas C y C', es decir propiedades de los ciclos $D \in A(C \times C')$.

Como ya vimos, el problema de la conjetura Riemann-Weil puede reducirse a un problema enumerativo de la cantidad de puntos en el ciclo $\Gamma_{Fr_C} \cdot \Delta$, donde Γ_{Fr_C} es el gráfico del morfismo de Frobenius de C y Δ el gráfico de la identidad. Como estos dos son ciclos sobre la superficie $C \times C$ vamos a usar principalmente el siguiente teorema:

Teorema 3.0.19. *(Teorema del índice de Hodge) Sea X una superficie suave y H un divisor amplio de X, supongamos que se tiene un divisor $D \in A^1(X)$ tal que $D \neq 0$ y que $\int D \cdot H = 0$ entonces $\int D^2 < 0$*

Demostración. [8, página 364] □

Primero vamos a introducir, para una correspondencia $T \in A^1(C \times C')$, $T : C \vdash C'$ entre dos curvas irreducibles, sus índices $a(T)$ y $b(T)$ definidos como los números tales que $b(T)[C] = p^{CC'}_{C*}(T)$ y $a(T)[C'] = p^{CC'}_{C'*}(T)$ o, lo que es lo mismo, $b(T) = \int T \cdot (P \times C')$ para la clase de cualquier punto racional P.
Intuitivamente, el índice $a(T)$ es la cantidad de veces que la correspondencia T cubre a la curva C y $b(T)$ la cantidad de veces que T cubre a C'. En el sentido en que, si $T = \Gamma_f$ donde f es un cubrimiento finito de grado d, entonces eligiendo un $P \in C'$ genérico tenemos que $a(T) = \int T \cdot (C \times P) = \sharp\{Q \in C\ tq :\ f^{-1}(Q) = P\} = d$.
Se puede considerar entonces a las correspondencias entre dos curvas, en cierto sentido, como funciones multivaluadas en donde el índice a vendría a ser el grado y el índice b la cantidad de valores que toma la *función* en cada punto.

A continuación vamos a estimar qué perdemos cuando estudiamos los índices a y b de una correspondencia en vez de la correspondencia misma.
Para eso tomamos un divisor canónico que tenga los mismos índices que la correspondencia y vemos algunas propiedades de la diferencia:
Sea entonces T una correspondencia de tipo (a, b) $\quad T : C \to C'$ vista como un divisor en $C \times C'$ y sean $l = C \times P'$, $m = P \times C' \in Div(C \times C')$. Tomemos $D = T - bl - am$ y $H = l + m$. Ahora veamos cómo se relacionan los divisores D y H.

$$\begin{aligned} &D \cdot H = (T - bl - am)(l + m) = T \cdot l + T \cdot m - bl^2 - b(l \cdot m) - a(m \cdot l) - am^2 = \\ &= T \cdot l + T \cdot m - b(l \cdot m) - a(m \cdot l)(\text{porque } l^2 = p^{CC'}_{C'}{}^*(P'^2) = 0 = m^2) \\ &\text{entonces} \int D \cdot H = a + b - a - b = 0 \end{aligned}$$

Lema 3.0.20. *H es un divisor amplio*

Demostración. Como consecuencia del teorema Riemann-Roch, la clase de cualquier punto $P \in C$ es un divisor amplio para cualquier curva C (si g es el género de C, $(2g + 1)P$ es muy amplio). Luego existen múltiplos de P y P' que inducen fibrados lineales muy amplios L y L' e inmersiones φ_L y $\varphi_{L'}$ de las Curvas $C, \quad C'$ en espacios proyectivos $\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{P}^{n'}$ respectivamente. Consideremos el morfismo de Segre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n'} \xrightarrow{s} \mathbb{P}^N$ y la composición

$$\varphi = s \circ \varphi_L \times \varphi_{L'} : C \times C' \to \mathbb{P}^N$$

Siendo φ una inmersión, define un fibrado lineal muy amplio M. Veamos que M esta inducido por un Múltiplo de H: si notamos con π_i la proyección de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n'}$ al i-ésimo factor

$$\begin{aligned}
&M = \varphi^*(O_{\mathbb{P}^N}(1)) = (\varphi_L \times \varphi_{L'})^* s^* O_{\mathbb{P}^N}(1) = \\
&= (\varphi_L \times \varphi_{L'})^*(\pi_1^* O_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \pi_2^* O_{\mathbb{P}^{n'}}(1)) = \\
&= (\varphi_L \times \varphi_{L'})^*(\pi_1^* O_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes (\varphi_L \times \varphi_{L'})^*(\pi_2^* O_{\mathbb{P}^{n'}}(1)) = \\
&= (\pi_1 \circ \varphi_L \times \varphi_{L'})^* O_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes (\pi_2 \circ \varphi_L \times \varphi_{L'})^* O_{\mathbb{P}^{n'}}(1) = \\
&= (\varphi_L \circ p_C^{CC'})^* O_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes (\varphi'_L \circ p_{C'}^{CC'})^* O_{\mathbb{P}^{n'}}(1) = \\
&= p_C^{CC'*} \varphi_L^* O_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes p_{C'}^{CC'*} \varphi_{L'}^* O_{\mathbb{P}^{n'}}(1) = p_C^{CC'*} L \otimes p_{C'}^{CC'*} L'
\end{aligned}$$

Podemos suponer que L y L' están inducidos por mP y mP' con un mismo número $m >> 0$, entonces $M = p_C^{CC'*} L \otimes p_{C'}^{CC'*} L'$ está inducido por mH $\square$

Luego podemos aplicar el teorema del índice de Hodge 3.0.19 que nos dice $\int D^2 \leq 0$, teniendo en cuenta que $\int l \cdot m = 1$, que $l^2 = m^2 = 0$ y que $T \cdot l = a, \quad T \cdot m = b$

$$\begin{aligned}
&D^2 = T^2 - 2b(T \cdot l) - 2a(T \cdot m) + 2ba(l \cdot m) = \\
&= \int T^2 - 2ba - 2ab + 2ba \leq 0 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \int T^2 \leq 2ab
\end{aligned}$$

La última inecuación se conoce como desigualdad de Castelnuovo-Severi, gracias a la cual sabemos que si consideramos la función

$$Q : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, \quad Q(m,n) = a(mT + nS)b(mT + nS) - \frac{1}{2}\int (mT + nS)^2$$

resulta no negativa. De hecho Q es una forma cuadrática, como los índices a, b y el grado $\int$ separan sumas y multiplicación por escalares ($a(nT + S) = na(T) + a(S)$) podemos directamente fijarnos en los coeficientes de Q:

$$\begin{aligned}
&Q(m,n) = a(mT + nS)b(mT + nS) - \int (mT + nS)^2 = \\
&= m^2(a(T)b(T)) + mn(a(T)b(S) + b(T)a(S)) + n^2(a(S)b(S)) - \tfrac{1}{2}\int m^2T^2 + 2mn(T \cdot S) + n^2S^2 = \\
&= m^2(a(T)b(T) - \tfrac{1}{2}\int T^2) + mn(a(T)b(S) + b(T)a(S) - \int T \cdot S) + n^2(a(S)b(S) - \tfrac{1}{2}\int S^2)
\end{aligned}$$

como Q es una forma cuadrática no negativa, su discriminante es no positivo, por lo tanto se tiene:

$$(a(T)b(S) + b(T)a(S) - \int T \cdot S)^2 \leq 4(a(T)b(T) - \frac{1}{2}\int T^2)(a(S)b(S) - \frac{1}{2}\int S^2) \qquad (3.0.2)$$

En particular, si $C = C'$ y $S = \Delta$, tenemos $a(\Delta) = b(\Delta) = 1$ porque $p_{C*}^{CC}(\Delta) = [C]$. Luego la inecuación 3.0.2 se lee:

$$(a(T) + b(T) - \int T \cdot \Delta)^2 \leq 4(a(T)b(T) - \frac{1}{2}\int T^2)(1 - \frac{1}{2}\int \Delta^2)$$

Por el Teorema Riemann-Roch, $\int \Delta^2 = \chi_C = 2 - 2g$, donde g es el género de la curva C. Por otra parte, si T es el gráfico de un endomorfismo $f : C \to C$

$$\begin{aligned}
&\int T^2 = \int \Gamma_f^2 = \int ((f \times id_C)^*(\Delta))^2 = \\
&= \int (f \times id_C)^*(\Delta^2) = \\
&= \deg f \int \Delta^2 = \deg f\,(2 - 2g)
\end{aligned}$$

En particular, si C es una curva definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ y consideramos $f = Fr_C$ el endomorfismo de Frobenius de la curva, para alguna inmersión de C en un $\mathbb{P}^n$, si $x = (a_0 : \ldots : a_n) \in C$, $Fr_C(x) = (a_0^q : \ldots : a_n^q)$ por lo que $\forall x \in C, \quad D(Fr_C)(x) = 0$ y entonces Γ_{Fr_C} y Δ se cruzan transversalmente. Luego $\int \Gamma_{Fr_C} \cdot \Delta$ es exactamente el número de puntos fijos de Fr_C que es, a su vez, el número de puntos de C sobre $\mathbb{F}_q$, que podemos estimar con las inecuaciones que calculamos previamente, teniendo en cuenta que $a(\Gamma_{Fr_C}) = 1$, $b(\Gamma_{Fr_C}) = q$ y $\deg Fr_C = q$

$$\begin{aligned}
&(\textstyle\int \Gamma_{Fr_C} \cdot \Delta - q - 1)^2 \leq 4g(q - \frac{1}{2} \int \Gamma^2_{Fr_C}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\textstyle\int \Gamma_{Fr_C} \cdot \Delta \; - q - 1)^2 \leq 4g(q - \frac{1}{2} \deg Fr_C(2 - 2g)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\textstyle\int \Gamma_{Fr_C} \cdot \Delta \; - q - 1)^2 \leq 4g^2 q \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow |\textstyle\int \Gamma_{Fr_C} \cdot \Delta \; - q - 1| \leq 2g\sqrt{q}
\end{aligned}$$

Ahora veamos que esta última inecuación implica la hipótesis de Riemann.
Por empezar notemos $a_r = \int \Gamma_{Fr_C^r} \cdot \Delta \; - q - 1$. Por lo visto en la sección 1 la función zeta de una curva definida sobre $\mathbb{F}_q$ tiene la forma:

$$Z_C(t) = \frac{P_1(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

con $P_i(t) = \prod_{i=0}^{s} (\alpha_i - t)$ por lo que

$$\sum_r a_r t^r = \sum_{i=0}^{s} \frac{\alpha_i t}{1 - \alpha_i t}$$

ahora bien, como $|a_r| \leq s\sqrt{q^r}$ entonces la serie de la derecha converge para $|t| < 1/\sqrt{q}$, en particular la función de la izquierda no tiene ningún polo en esa región de $\mathbb{C}$, es decir $|\alpha_i| \leq \sqrt{q}$.
Por otra parte la ecuación funcional 1.0.2 implica que si $Z_C(t)$ se anula en $t = \frac{1}{\alpha_i}$ entonces también se anula en $t = \frac{\alpha_i}{q}$ por lo que, si $|\alpha_i| \leq \sqrt{q}$ para todo $0 \leq i \leq s$, entonces $|\alpha_i| = \sqrt{q}$. Lo que prueba la hipótesis de Riemann.

4. Variedades Abelianas

Recordamos algunas definiciones:

Definición 4.0.21. (Variedades Abelianas) Una variedad abeliana V es una variedad completa con estructura de grupo tal que las operaciones de producto $m : V \times V \to V$ y de tomar inverso $-id : V \to V$ están dadas por morfismos de variedades

Definición 4.0.22. (Isogenías) Una isogenía es un morfismo de grado finito entre variedades abelianas

La teoría de intersección de las variedades abelianas está particularmente bien entendida por el hecho de que se tiene una manera canónica de deformar (o mejor dicho de mover) los ciclos, esta es la traslación de un ciclo por un elemento.

Por otra parte las variedades abelianas son importantes en teoría de intersección porque, como es usual en geometría algebraica, uno quisiera dar a los invariantes importantes de la teoría la estructura de una variedad algebraica o estructuras lo más parecidas posibles a la de una variedad algebraica. A veces esto es posible, como es el caso de algunos espacios de Moduli, otras veces hay que expandir la noción de variedad algebraica y pasar a considerar estructuras más generales como esquemas o stacks.
Cuando uno, en vez de espacios de moduli, está estudiando anillos de intersección (en particular el anillo de Chow) es posible muchas veces parametrizar ciertos grupos de Chow $A^n(X)$ por variedades abelianas, esto provee la información fundamental acerca dichos grupos.
Sin embargo no siempre es posible dar estructura de variedad abeliana a estos grupos (ver [17]). Por eso vale la pena preguntarse (así como los esquemas o los stacks son generalizaciones útiles de las variedades algebraicas) cuál es la generalización correcta de la categoría de Variedades Abelianas al caso de teoría de intersección. Vamos a ver más adelante hasta qué punto podría considerarse que la categoría de Motivos es una buena generalización de las Variedades Abelianas.

El principal objetivo de esta sección (además de mostrar algunos hechos importantes de la geometría de las variedades abelianas) es demostrar la hipótesis de Riemann-Weil para variedades abelianas. Para esto va a ser muy importante entender la estructura del grupo de divisores módulo equivalencia racional de una variedad abeliana X, que notamos $Pic(X)$. O al menos la estructura de algunos subgrupos importantes de $Pic(X)$.

4.1. Divisores en variedades abelianas

Entonces tenemos que empezar por enunciar dos teoremas fundamentales acerca de familias de fibrados en rectas (*line bundles*) sobre variedades completas:

Teorema 4.1.1. *(de semicontinuidad para familias de line bundles) Sea X una variedad completa , Y un esquema cualquiera y L un fibrado en rectas sobre $X \times Y$. Existe un único subesquema cerrado $Y_1 \hookrightarrow Y$ tal que:*

> *si L_1 es la restricción de L a $X \times Y_1$, existe un line bundle M_1 sobre Y_1 y un isomorfismo $p_2^* M_1 \cong L_1$ sobre $X \times Y_1$*

si $f : Z \to Y$ es un morfismo tal que existe un line bundle K sobre Z y un isomorfismo $p_2^*(K) \cong (1_X \times f)^*$ sobre $X \times Z$ entonces f se puede factorizar como $Z \to Y_1 \to Y$.

Demostración. Ver [16, páginas 89-91] □

Observación 4.1.2. La razón por la cual este teorema se llama de semicontinuidad para FAMILIAS de line bundles es que, como es habitual en Geometría , uno puede considerar un fibrado L definido sobre un producto $X \times Y$ como una familia de fibrados L_y sobre X parametrizados por los puntos de Y definidos por $L_y = L|_{X\times\{y\}}$ (en realidad esto define un fibrado sobre $X \otimes k(y)$ que es isomorfo a X si, por ejemplo, tanto X como Y son esquemas de tipo finito sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado e.g.: variedades).
Interpretándolo de esta manera lo que el teorema está diciendo es que hay un sub-esquema de Y maximal con la propiedad de que sus puntos parametrizan fibrados triviales sobre X. Más aún, si en el segundo ítem del enunciado reemplazamos Z por $Spec(A)$, con A un anillo cualquiera, el teorema nos dice que esta propiedad de Y_1 no depende del anillo de definición de los puntos de Y.

Tenemos también este teorema que es, en parte, una consecuencia no trivial del anterior:

Teorema 4.1.3. *Sean X e Y variedades completas ,Z un esquema conexo y L un fibrado en rectas (line bundle) sobre $X \times Y \times Z$ cuya restricción a $\{x_0\} \times Y \times Z$, $X \times \{y_0\} \times Z$ y $X \times Y \times \{z_0\}$ es trivial para ciertos $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ y $z_0 \in Z$. Entonces L es trivial.*

Demostración. Ver [16, páginas 91-93] □

Estos teoremas van a permitirnos estudiar el comportamiento los fibrados en rectas sobre variedades abelianas cuando los trasladamos por la suma de elementos. O, equivalentemente, estudiar cómo cambia la clase de equivalencia racional entre un divisor D de X y su trasladado T_x^*D donde $T_x(y) = y + x$. Fijamos entonces esta notación:

Notación 4.1.4. Si X es una variedad abeliana y $x \in X$ notamos con T_x al morfismo $X \to X$ tal que $T_x(y) = y + x$, $\forall\, y \in X$

Tenemos, entonces este corolario de 4.1.3:

Corolario 4.1.5. *Sea X una variedad Y una variedad abeliana y $f, g, h : X \to Y$ morfismos. Entonces para todo $L \in Pic(Y)$ se tiene:*

$$(f + g + h)^*L \cong (f + g)^*L \otimes (f + h)^*L \otimes (g + h)^*L \otimes f^*L^{-1} \otimes g^*L^{-1} \otimes h^*L^{-1}$$

Demostración. Sean $p_i : Y \times Y \times Y \to Y$ las proyecciones a la i-ésima componente $m_{ij} = p_i + p_j$ y $m = p_1 + p_2 + p_3$. Entonces $(f + g + h)^* = (f, g, h)^*m^*$ y $(f + g)^* = (f, g, h)^*m_{12}^*$ donde $(f, g, h) : X \to Y \times Y \times Y$ es $(f, g, h)(x) = (f(x), g(x), h(x))$.
Luego para demostrar el teorema basta ver que si se considera el fibrado:

$$M = m^*L \otimes m_{12}^*L^{-1} \otimes m_{13}^*L^{-1} \otimes m_{23}^*L^{-1} \otimes p_1^*L \otimes p_2^*L \otimes p_3^*L$$

se tiene que M es trivial ya que seguiría que $(f, g, h)^*M$ es trivial, que es lo que queremos probar. Sea entonces $q : Y \times Y \to Y \times Y \times Y$ el morfismo $q(y, y') = (0, y, y')$, 0 el morfismo constante 0, q_i las proyecciones y n la suma, todos desde $Y \times Y$ a Y. Luego tenemos:

$$q^*M = n^*L \otimes q_1^*L^{-1} \otimes q_2^*L^{-1} \otimes n^*L^{-1} \otimes 0^*L \otimes q_2^*L \otimes q_3^*L$$

Por lo tanto q^*M es trivial, o sea M es trivial en $\{0\} \times Y \times Y$. Análogamente M es trivial en $Y \times \{0\} \times Y$ y en $Y \times Y \times \{0\}$. Entonces, por el teorema, M es trivial. $\square$

En particular, si consideramos endomorfismos de Y, con f y g tomando valores constantes x e y, y con h como la identidad, tenemos que $(f + h) = T_x$ y similarmente $(g + h)$ y $(f + g + h)$ son traslaciones; mientras que, al ser constantes f^* , g^* y $(f + g)^*$ son triviales como morfismos de anillos de Chow, por lo que el corolario toma esta forma más sencilla:

Corolario 4.1.6. *(Teorema del cuadrado) Para todos los fibrados en rectas L sobre una variedad abeliana y todo $x, y \in X$,*

$$T^*_{x+y}L \otimes L^{-1} \cong T^*_x L \otimes T^*_y L$$

Por lo tanto podemos definir un homomorfismo de grupos $\phi_L : X \to Pic(X)$ donde a cada $x \in X$ le asignamos la clase de $T^*_x L \otimes L^{-1}$. Para cada L, el morfismo ϕ_L describe cómo se transforma el fibrado L (o su correspondiente divisor de ceros y polos) al ser trasladado por la acción de grupo de Y.
Los morfismos del tipo ϕ_L son centrales en el estudio de las propiedades de los divisores, y, en una última instancia, permiten entender la estructura del anillo $End(X)$ lo suficientemente bien como para demostrar la hipótesis de Riemmann para variedades abelianas. Va a ser importante entonces saber cómo es $K(L) =_{Def} \ker(\phi_L) = \{x \in X \ tq : \ T^*_x L \cong L\}$

Proposición 4.1.7. *Si L es un line bundle, entonces $K(L)$,es un conjunto cerrado con la topología Zariski. Y, si además L es amplio, entonces $K(L)$ es un conjunto finito de puntos.*

Demostración. ([16, pág.:60]) Por el teorema de semicontinuidad (4.1.1) aplicado a $m^*L \otimes p_2^*L^{-1}$ sobre $X \times X$ (donde $m : X \times X \to X$ es la suma y p_2 la segunda proyección) se tiene que el conjunto de los $x \in X$ tales que $m^*L \otimes p_2^*L^{-1}$ es trivial cuando se lo restringe a $\{x\} \times X$ es un cerrado Zariski. Pero $m^*L \otimes p_2^*L^{-1}|_{\{x\}\times X} \cong T^*_x L \otimes L^{-1}$, luego este conjunto es $K(L)$.
Si L es amplio, supongamos que $K(L)$ no es finito, sea Y la componente conexa de $K(L)$ que contiene al 0, entonces Y es una variedad abeliana de dimensión dim ≥ 1 y la restricción L_Y de L a Y es amplia en Y. Además $T^*_y L_Y \cong L_Y$ para todo $y \in Y$. Luego, como $T^*_y L_Y \cong L_Y$ es (isomorfo a) la restricción de $M = m^*L_Y \otimes p_1^*L_Y^{-1} \otimes p_2^*L_Y^{-1}$ a $\{y\} \times Y$, y $M|_{Y\times\{0\}}$ es siempre trivial, entonces M es trivial sobre $Y \times Y$. Haciendo pullback por el morfismo $Y \to Y \times Y$ que a cada y le asigna $(y, -y)$, se tiene que $L_Y \otimes (-1_Y)L_Y$ es trivial en Y, como -1_Y es un automorfismo de Y entonces $(-1_Y)L_Y$ es amplio, y por lo tanto $L_Y \otimes (-1_Y)L_Y$ es amplio y trivial, lo que es un absurdo si $\dim Y \geq 1$ $\square$

Habiendo aclarado un poco la situación acerca del núcleo de ϕ_L pasemos a ver qué pasa con la imagen:
Por empezar observemos que si un fibrado M es de la forma $T^*_x L \otimes L^{-1}$ entonces

$$\phi_M(y) = T^*_y T^*_x L \otimes T^*_y L^{-1} \otimes M^{-1} \tag{4.1.1}$$

$$\cong T^*_{x+y}L \otimes T^*_y L^{-1} \otimes T^*_x L^{-1} \otimes L \tag{4.1.2}$$

$$\cong T^*_x L \otimes T^*_y L \otimes L^{-1} \otimes T^*_y L^{-1} \otimes T^*_x L^{-1} \otimes L \cong \mathcal{O}_X \tag{4.1.3}$$

Donde en el último renglón usamos el teorema del cuadrado para expandir $T^*_{x+y}L$.
Entonces sabemos que la imagen de ϕ_L está incluida en el siguiente subgrupo de $Pic(X)$:

Definición 4.1.8. $Pic^0(X)$ es el subgrupo de $Pic(X)$ consistente en (la clase de isomorfismo de) los line bundles L tales que ϕ_L es idénticamente nulo.

El siguiente teorema que está enunciado sin demostración es fundamental en lo que sigue ya que va a ser es el ingrediente esencial en la construcción del dual de una variedad abeliana que va a ser explicada un poco mejor más adelante. Por ahora basta con saber:

Teorema 4.1.9. *Sea L un line bundle amplio sobre una variedad abeliana X y $M \in Pic^0(X)$. Entonces para algún $x \in X$,*

$$M \cong T_x^* L \otimes L^{-1}$$

es decir, el morfismo:$\phi_L : X \to Pic^0(X)$ es suryectivo.

Demostración. Ver [16, Cap. II, §8, p.:77] o también [11, IV, §2, p.:99].
La demostración de Mumford se basa en lo siguiente:
Dado que lo que uno quiere demostrar es que para algún $x \in X$, $M^{-1} \otimes T_x^* L \otimes L^{-1}$ es trivial. Entonces se considera el fibrado

$$K = m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1} \otimes p_2^* M^{-1}$$

Definido sobre $X \times X$. La razón para considerar K es que es la familia de fibrados de la forma $M^{-1} \otimes T_x^* L \otimes L^{-1}$, es decir

$$K|_{\{x\}\times X} \cong M^{-1} \otimes T_x^* L \otimes L^{-1} \ \forall x \in X$$

El *quid* de la demostración consiste en ver que esta familia tiene que incluir un line bundle trivial. Mumford prueba esto con argumentos que relacionan la cohomología de una familia de haces con la cohomología de cada una de las fibras de la familia.
Más precisamente, primero Mumford muestra que para todo $M \in Pic^0(X)$ no trivial se tiene que $H^i(X, L) = 0$ para todo i (acá usamos L para denotar indistintamente el fibrado en rectas y su haz localmente libre asociado).
Razonando por el absurdo uno supone que $M^{-1} \otimes T_x^* L \otimes L^{-1}$ es siempre no trivial, lo que por lo anterior querría decir que las fibras de K por p_1, es decir $K|_{\{x\}\times X}$, tienen grupos de cohomología de dimensión cero.
Es a partir de este punto que Mumford usa argumentos de continuidad de familias de haces para demostrar que, entonces, K tiene que engendrar grupos de cohomología triviales y que esto a su vez implica que los grupo $H^i(X, K|_{X\times\{x\}})$ son triviales. Pero $K|_{X\times\{0\}} \cong \mathcal{O}_X$ lo que daría la contradicción que buscamos. □

Observemos que si D es un divisor de X entonces $T_x^* D$ es numéricamente equivalente a D ya que, si C es una curva que se interseca propiamente con D entonces $T_x^* C$ se interseca propiamente con $T_x^* D$ y su intersección es igual a $T_x^*(D \cdot C)$ que, por ser T_x un isomorfismo, tiene el mismo grado que $D \cdot C$.
De esto se desprende que el teorema anterior implica que si D es un divisor tal que $\mathcal{O}_X(D) \in Pic^0(X)$ entonces D es numéricamente equivalente a 0.

Notemos también que si $T_x^* L \otimes L^{-1}$ es trivial para todo x entonces podemos considerar, como en la demostración de 4.1.7, el fibrado $M = m^* L_X \otimes p_1^* L_X^{-1} \otimes p_2^* L_X^{-1}$ y notar que tiene que ser trivial, con lo cual se tiene la siguiente

Proposición 4.1.10.

$$L \in Pic^0(X) \Leftrightarrow m^*L_X \cong p_1^*L_X \otimes p_2^*L_X$$

Asimismo, si Z es un esquema cualquiera y $f, g : Z \to X$ podemos hacer pullback de L por $(f, g) : Z \to X \times X$ y tenemos que $(f + g)^*L \cong f^*L + g^*L$

Observación 4.1.11. Lo que acabamos de ver puede expresarse de la siguiente manera:
Puede demostrarse (aunque no vamos a hacerlo ahora) que $Pic^0(X)$ es exactamente el grupo de divisores numéricamente equivalente a cero, por lo que para todo $Z \in \mathcal{V}ar$ podemos definir $Pic^0(Z)$ como el grupo de divisores numéricamente equivalente a cero y vamos a tener que:
Cada variedad abeliana X define un funtor $\hom(-, X) : \mathcal{V}ar \to \mathcal{G}r$.
Existe también otro funtor $\mathcal{V}ar \to \mathcal{G}r$ dado por $Z \mapsto \hom_{\mathcal{G}r}(Pic^0(X), Pic^0(Z))$, que es la composición del funtor anterior con el que asigna $f \mapsto f^*$.
Por la proposición anterior Pic^0 se caracteriza como el único subfuntor de Pic que hace de la asignación $f \mapsto f^*$ un morfismo de grupos para cada variedad abeliana X.

Ahora que entendemos cómo se relacionan $(f + g)^*L$ con f^*L y g^*L en Pic^0 podemos ver cómo es la relación entre la suma de morfismos y la de divisores en el grupo cociente $NS(X) =_{Def} \frac{Pic(X)}{Pic^0(X)}$.

Proposición 4.1.12. *[11][IV, §1] Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_d : Y \to X$ morfismos entre varidades abelianas (que son morfismos de grupos) $m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{Z}$, y sea $L \in NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ entonces*

$$(m_1\alpha_1 + \cdots + m_d\alpha_d)^*L = \bigotimes_{0=i,j=d} D_L(\alpha_i, \alpha_j)^{\otimes \frac{m_i m_j}{2}}$$

en $NS(Y) \otimes \mathbb{Q}$. Donde $D_L(\alpha, \beta)$ denota a $(\alpha + \beta)^*L \otimes \alpha^*L^{-1} \otimes \beta^*L^{-1}$

Demostración. Consideremos primero $L \in Pic(X)\otimes\mathbb{Q}$ y notemos $\lambda = (m_1\alpha_1+\cdots+m_d\alpha_d)$, por ser λ un morfismo de grupos tenemos que, para todo $y \in Y$:

$$T_y^*\lambda^*(L) = (\lambda \circ T_y)^*L = (T_{\lambda(y)} \circ \lambda)^*L = \lambda^*T_{\lambda(y)}^*L$$

Por lo tanto tenemos que $T_y^*\lambda^*(L) \otimes \lambda^*L^{-1} = \lambda^*(T_{\lambda(y)}^*L \otimes L^{-1})$.
Como $T_{\lambda(y)}^*L \otimes L^{-1} \in Pic^0(X)$ podemos aplicar la proposición anterior y desarrollar λ y tenemos que

$$\lambda^*(T_{\lambda(y)}^*L \otimes L^{-1}) = \bigotimes_i (\alpha_i^*(T_{\lambda(y)}^*L \otimes L^{-1}))^{\otimes m_i}$$

Ahora bien, $T_{\lambda(y)}^*L \otimes L^{-1} = \phi_L(\lambda(y))$, entonces por el teorema 4.1.6 tenemos que $T_{\lambda(y)}^*L \otimes L^{-1} = \bigotimes_j (T_{\alpha y}^*L \otimes L^{-1})^{\otimes m_j}$. En definitiva tenemos la siguiente igualdad en $Pic(Y)$:

$$T_y^*\lambda^*(L) \otimes \lambda^*L^{-1} = \bigotimes_{i,j} \alpha_i^*(T_{\alpha_j(y)}L \otimes L^{-1})^{\otimes m_i m_j} \tag{4.1.4}$$

Los mismos desarrollos que estamos haciendo para λ^* podemos hacerlos para $D_L(\alpha_i, \alpha_j)$ y obtener así:

$$T_y^*D_L(\alpha_i, \alpha_j) \otimes D_L(\alpha_i, \alpha_j)^{-1} = \alpha_i^*(T_{\alpha_j(y)}L \otimes L^{-1}) \otimes \alpha_j^*(T_{\alpha_i(y)}L \otimes L^{-1})$$

Entonces si hacemos $\bigotimes_{i,j}(T_y^*D_L(\alpha_i,\alpha_j)\otimes D_L(\alpha_i,\alpha_j)^{-1})^{\otimes m_im_j}$ obtenemos dos veces cada término del lado derecho de 4.1.4.
Si notamos: $\eta(L)=\bigotimes_{i,j}D_L(\alpha_i,\alpha_j)^{\otimes\frac{m_im_j}{2}}$ Por todo lo anterior tenemos que, para todo $L\in Pic(X)\otimes\mathbb{Q}$, y todo $y\in Y$:

$$\lambda^*(L)\otimes\eta(L)^{-1}=T_y^*(\lambda^*(L)\otimes\eta(L)^{-1})$$

Por lo que $\lambda^*(L)\otimes\eta(L)^{-1}\in Pic^0(Y)\otimes\mathbb{Q}$ es decir $\lambda^*(L)=\eta(L)$ en $NS(Y)\otimes\mathbb{Q}$ $\square$

Observación 4.1.13. Si en la ecuación 4.1.4 ponemos $m_1=\cdots=m_d=1$ y $\alpha_1=\cdots=\alpha_d=1_X$ obtenemos en particular que, en $NS(X)$, $(n\cdot 1_X)^*L=L^{\otimes n^2}$.
Por esto mismo, podemos ver que tensorizar $NS(Y)$ con $\mathbb{Q}$ en la proposición es innecesario, ya que en el único paso en el que usamos exponentes fraccionarios es porque llegamos a que

$$(\lambda^*L)^{\otimes 2}=\bigotimes_{i,j}D_L(\alpha_i,\alpha_j)^{\otimes m_im_j}$$

Pero podemos llegar a una fórmula para $T_y^*\lambda^*(L)\otimes\lambda^*L^{-1}$ sin necesidad de elevar al cuadrado.
Por empezar notemos que si $i\neq j$ no hay necesidad de dividir por 2 los exponentes m_im_j en la fórmula de 4.1.12 ya que de cualquier manera el término $D_L(\alpha_i,\alpha_j)$ aparece dos veces en la expresión (dado que $D_L(\alpha_i,\alpha_j)$ es lo mismo que $D_L(\alpha_j,\alpha_i)$).
Lo único que resta verificar entonces es que podemos expresar $D_L(\alpha,\alpha)$ con exponentes enteros:

$$D_L(\alpha,\alpha)=(2\alpha)^*L\otimes\alpha^*L^{-2}=(2\cdot 1_Y)^*\alpha^*L\otimes\alpha^*L^{-2}=\alpha^*L^{\otimes 4}\otimes\alpha^*L^{-2}=\alpha^*L^2$$

Con lo que la ecuación de la prop 4.1.12 puede escribirse en $NS(Y)$ como:

$$(m_1\alpha_1+\cdots+m_d\alpha_d)^*L=\bigotimes_{0=i\lneqq j=d}D_L(\alpha_i,\alpha_j)^{\otimes m_im_j}\bigotimes_{k=0}^{d}\alpha_k^*L^2$$

Sin necesidad de tensorizar por $\mathbb{Q}$

Siendo que $Pic^0(X)$ consiste en divisores numéricamente equivalentes a 0, la ecuación de la proposición 4.1.12 también es válida en el anillo de equivalencia numérica $N^*(X)$ (en realidad es cierto que $NS(X)=N^1(X)$ pero no vamos a probarlo ahora). Usando esto podemos tener una expresión del grado de la suma de morfismos que va a sernos útil.
En efecto, si calculamos el pullback de un divisor D por la suma de morfismos $\alpha_1\dots\alpha_d$ (aplicando 4.1.12) y elevamos a la g donde $g=\dim X$ vamos a tener la siguiente expresión en $N^*(X)$:

$$(m_1\alpha_1+\cdots+m_d\alpha_d)^*(D)^g=(m_1\alpha_1+\cdots+m_d\alpha_d)^*(D^g)=\deg(m_1\alpha_1+\cdots+m_d\alpha_d)\int D^g=$$
$$=\text{polinomio homogéneo de grado }2g\text{ en los }m_i$$

este polinomio, que puede ser calculado[2] en términos de $(\alpha_i+\alpha_j)^*T-\alpha_i^*T-\alpha_j^*T$ va a ser muy útil para permitirnos estimar $\deg(1_X-Fr_X)$ que es, en definitiva, lo que va

[2]notar que la suma en $\alpha_i+\alpha_j$ está dada por la estructura de grupo de X mientras que los signos de resta son restas de ciclos, es el mismo signo D_L de 4.1.12 escrito en notación aditiva

a permitirnos demostrar la hipótesis de Riemann. El solo hecho de poder escribir una expresión tan directa como $\deg(1_X - Fr_X)$ es una de las razones por la cual el caso de variedades abelianas es más sencillo de demostrar que el caso general.

Aplicando entonces lo anterior a $n1_X + \alpha$ con $\alpha \in \mathrm{End}(X)$tenemos que en este caso 4.1.12 nos dice:

$$(n1_X + \alpha)^*(T) = n^2T + n\Delta_T(\alpha) + \alpha^*D$$

(donde $\Delta_T(\alpha) = (\alpha + 1_X)^*(T) - \alpha^*T - T$) Elevando esta expresión a la g tenemos una expresión en $N^g(X) \cong \mathbb{Z}$:

$$\deg(n1_X + \alpha) \textstyle\int T^g = c_{2g}n^{2g} + c_{2g-1}n^{2g-1} + \cdots + c_0$$

siendo los c_i expresiones en $\alpha^*(T)$, $\Delta_T(\alpha)$ y T, en particular tenemos:

$$c_{2g} = \textstyle\int T^g, \quad c_{2g-1} = g \int T^{g-1} \cdot \Delta_T(\alpha), \quad c_0 = \deg(\alpha) \int T^g$$

Por lo tanto el grado de $n1_X + \alpha$ puede ser visto como un polinomio en n, con coeficientes en términos de un divisor T tal que $T^g \neq 0$ en $N^*(X)$.

Vamos a llamar al polinomio $P(n) = \deg(\alpha - n1_X)$ el *polinomio característico* de α y al coeficiente de grado $2g-1$ de $P(n)$ vamos a llamarlo *traza* de α, tenemos para un divisor T tal que $\int T^g \neq 0$ la fórmula:

$$tr(\alpha) = \frac{g}{\int T^g} \textstyle\int T^{g-1}\Delta_T(\alpha) \tag{4.1.5}$$

Las Raíces $\omega_1, \ldots, \omega_{2g}$ de $\deg(\alpha - n1_X)$, que vamos a llamar raíces características de α también van a ser fundamentales en la demostración de la hipótesis de Riemann. Como es usual tenemos:

$$\deg \alpha = \prod_{i=0}^{2g} \omega_i, \quad tr(\alpha) = \textstyle\sum_{i=0}^{2g} \omega_i \tag{4.1.6}$$

Más en general podemos observar que si tensorizamos $\mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}$ y también $N^*(X) \otimes \mathbb{Q}$, estamos en la situación siguiente:

Proposición 4.1.14. *([11, IV, §3, pág.:113]) Sea R un álgebra (central, unital) sobre los racionales y una función $\delta(\alpha)$ con valores en $\mathbb{Q}$ tal que*

- $\delta(\alpha\beta) = \delta(\alpha)\delta(\beta)$
- *para cualesquiera $m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{Q}$ y dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in R$ la función*

  $$\delta(m_1\alpha_1 + \cdots + m_d\alpha_d)$$

  es un polinomio homogéneo de grado s en las m_i

Entonces, para cualquier polinomio $F(T)$ con coeficientes racionales, las raíces características de $F(\alpha)$ son $F(\omega_1), \ldots, F(\omega_s)$ donde ω_i son las raíces características de α

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $F(T)$ es un polinomio mónico.

$$F(T) = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \cdots + a_0$$

Entonces existe un polinomio $P(a_0, \ldots, a_{d-1})$ de grado s tal que $\delta(F(\alpha)) = P(a_0, \ldots, a_{d-1})$. Sea

$$Q(a_0, \ldots, a_{d-1}) = \prod_{i=1}^{s} F(\omega_i)$$

Entonces $Q(a_0, \ldots, a_{d-1})$ también es un polinomio de grado s con coeficientes racionales. Supongamos que tenemos un polinomio $G(T)$ de la forma:

$$G(T) = \prod_{j=1}^{d}(T + x_j) = T^d + b_{d-1}T^{d-1} + \cdots + b_0$$

donde los x_j son números racionales. Entonces

$$\delta(G(\alpha)) = \prod_{j=1}^{d} \delta(\alpha + x_j)$$

Y, por la definición del polinomio Q y de raíces características, tenemos

$$\delta(G(\alpha)) = \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{d} \delta(\omega_i + x_j) = \prod_{i=1}^{s} G(\omega_i) = Q(b_0, \ldots, b_{d-1})$$

Como, por otra parte, tenemos $\delta(G(\alpha)) = P(b_0, \ldots, b_{d-1})$ por definición de P tenemos que $P(b_0, \ldots, b_{d-1}) = Q(b_0, \ldots, b_{d-1})$ si sustituimos en el polinomio $P(b_0, \ldots, b_{d-1}) - Q(b_0, \ldots, b_{d-1})$ las expresiones en términos de los números x_i tenemos un polinomio que se anula en todos los valores racionales de sus variables. Por lo tanto $Q = P$ y la proposición sigue de esto. □

4.2. La variedad dual

La construcción de la variedad de Picard de una variedad algebraica X (es la variedad que parametriza la clase de isomorfismos de line bundles sobre X) fue uno de los principales alicientes de la reformulación de la geometría algebraica en los términos que conocemos hoy (fundamentados en álgebra conumtativa más que en análisis o teoría de cuerpos).
En términos actuales, definimos el esquema $Pic(X)$ de la siguiente manera:

Definición 4.2.1. El esquema de Picard $Pic(X)$ de una variedad X está definido por la existencia de un line bundle P denominado *Fibrado de Poincaré* definido sobre $X \times Pic(X)$ con la siguiente propiedad universal:
Para todo esquema S y todo fibrado M sobre $X \times S$ existe un único morfismo $f : S \to Pic(X)$ tal que $M = (1_X \times f)^*(P)$

El esquema de Picard tiene una estructura natural de esquema en grupos abelianos (un esquema S tal que el funtor de Yoneda $\hom(-, S)$ toma valores en la categoría $\mathcal{A}b$).

En el caso de variedades abelianas $Pic(X)$ tiene un subesquema que es un subgrupo y que parametriza los line bundles en $Pic^0(X)$, más precisamente tenemos el siguiente:

Teorema 4.2.2. *[16, III, 14, pág:125] Existe una variedad abeliana $\hat{X}$ y un line bundle P sobre $X \times \hat{X}$ con la siguiente propiedad universal:*
Sea S un esquema cualquiera, y L un line bundle sobre $S \times X$ tal que $L|_{S\times\{0\}}$ es trivial y $L|_{\{s\}\times X} \in Pic^0(X)$ para todo $s \in S$.
Entonces existe un único morfismo $\phi : S \to \hat{X}$ tal que $L \cong (\phi \times 1_X)^*(P)$.

La demostración de este teorema no vamos a verla pero podemos decir que se basa en la posibilidad de tomar la variedad cociente X por el subgrupo finito $K(H)$ donde H es un line bundle amplio (recordar 4.1.7). La variedad $X/K(H)$ va a hacer las veces de $\hat{X}$. Mientras que el fibrado de Poincaré P va a estar formado por el cociente del line bundle $m^*H \otimes p_1^*H^{-1} \otimes p_2^*H^{-1}$ sobre $X \times X$ por la acción de $K(H)$ dada por la traslación por elementos de $K(H)$ en la segunda coordenada.

La demostración de que este par $(\hat{X}, P)$ cumple la propiedad universal se basa en el hecho de que, por 4.1.1 existe, para cada S como en el teorema, un subesquema maximal $\Gamma_S \subset S \times \hat{X} \times X$ tal que la restricción de $M = p_{23}^*(P) \otimes p_{13}^*(L)^{-1}$ es trivial.
La importancia de 4.1.1 en la demostración si uno razona de la siguiente manera:
De existir una $\phi : S \to \hat{X}$ entonces el morfismo

$$\varphi = (s, x) \overset{\varphi}{\mapsto} (s, \phi(s), x)$$

sería una sección de $p_{13} : S \times \hat{X} \times X \to S \times X$ y, en la imagen de esa sección:

$$\begin{aligned} &p_{23}^*(P) \cong p_{13}^*\varphi^* p_{23}^*(P) \cong \\ &\cong p_{13}^*(p_{23} \circ \varphi)^*(P) \cong p_{13}^*(\phi \times 1_x)^*(P) \cong p_{13}^*(L) \end{aligned}$$

Recíprocamente, si uno puede demostrar que existe una sección $\varphi_1 : S \to S \times \hat{X} \times X$ de p_1 esta va a tener que factorizarse por Γ_S y ϕ va a estar dado por la composición $\phi = p_3 \circ \varphi_1$. Por eso la demostración consiste en probar que $p_1|_{\Gamma_S}$ es un isomorfismo entre Γ_S y S.

Observación 4.2.3. Por la propiedad universal vale que tomar $\hat{X}$ define un funtor contravariante, es decir, para cada $f : X \to Y$ existe un $\hat{f} : \hat{Y} \to \hat{X}$ dado por aplicar el teorema al line bundle $(f \times 1_{\hat{Y}})^* P_Y$ definido sobre $X \times \hat{Y}$.

Ahora vamos a ver (sin demostración) una definición de $\hat{X}$ que es simétrica en el sentido que el papel de $\hat{X}$ y el de X son intercambiables:

Proposición 4.2.4. *Sean X e Y dos variedades abelianas y Q un line bundle sobre $X \times Y$ tal que las restricciones de Q a $\{0\} \times Y$ y a $X \times \{0\}$ son triviales. Entonces son equivalentes:*

1. *No hay ningún subesquema Z diferente a (0) tal que la restricción de Q a $Z \times Y$ sea trivial*
2. *No hay ningún subesquema Z' diferente a (0) tal que la restricción de Q a $X \times Z'$ sea trivial*
3. $\sum_i (-1)^i \dim H^i(X \times Y, Q) = \chi(Q) = \pm 1$

Cuando se cumplen estas condiciones, Y es canónicamente equivalente al dual de X, y X es canónicamente equivalente al dual de Y.

Demostración. ([16, 13, págs.:131-132]) □

Corolario 4.2.5. *(hipótesis de reflexividad) Para cualquier variedad abeliana X, el homomorfismo $i : X \to \hat{\hat{X}}$ definidido por el fibrado de Poincaré P en $X \times \hat{X}$ (interpretado como una familia de line bundle en $\hat{X}$ parametrizados por X) es un isomorfismo.*

Demostración. El fibrado de Poincaré P cumple con la hipótesis del teorema y con la condición (2) □

Observación 4.2.6. (Observación histórica) Para una demostración de la reflexividad de las variedades abelianas ver [16, 13, págs.:131-132] es de notar que en [11] no hay ninguna referencia a este teorema y que destaca a las variedades que lo cumplen como *variedades abelianas reflexivas*, lo que nos da el indicio que el teorema era una conjetura en la época en que se escribió el libro de Lang (apenas 11 años antes que el de Mumford).

Observación 4.2.7. Además por cómo se construye la variedad dual $\hat{X}$ como cociente de X por un grupo, sigue inmediatamente que X y $\hat{X}$ son isógenas ya que tenemos el morfismo cociente $\pi : X \to \hat{X}$ cuyo núcleo es $K(H)$, que es finito para H amplio.

Estas observación van a servirnos para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.2.8. *(Teorema de Reducibilidad completa de Poincaré) Sea X una variedad abeliana y sea Y una subvariedad abeliana de X. Existe una subvariedad abeliana Z tal que $Y \cap Z$ es finita y $Z + Y = X$, es decir, X es isógena a $Y \times Z$.*

Demostración. Sea $i : Y \to X$ la inclusión, y sea $\hat{i} : \hat{X} \to \hat{Y}$ su morfismo dual. Sea L un line bundle amplio sobre X, de manera tal que $\phi_L : X \to \hat{X}$ es una isogenías. Tomamos como Z a la componente conexa de 0 de $\phi_L^{-1}(\ker \hat{i})$. Entonces tenemos que $\dim Z = \dim(\ker \hat{i}) \geq \dim \hat{X} - \dim \hat{Y} = \dim X - \dim Y$. Además, por definición de ϕ_L y de i, si $z \in Y$, entonces:

$$z \in \phi_L^{-1}(\ker \hat{i}) \cap Y \Longleftrightarrow T_z^* L \otimes L^{-1}|_Y \cong \mathcal{O}_Y \Longleftrightarrow z \in K(L|_Y)$$

Como $L|_Y$ es amplio, $K(L|_Y)$ y, por lo tanto $Y \cap Z$ es finito. Esto significa que el homomorfismo natural $Z \times Y \to X$ tiene núcleo finito, y como $\dim(Z \times Y) = \dim Z + \dim Y \geq \dim X$, también es suryectivo. □

El Teorema anterior es un típico teorema de semisimplicidad, más aún, usando inducción en la dimensión se demuestra sin mayor esfuerzo:

Corolario 4.2.9. *Toda variedad abeliana es isógena a un producto $X_1^{n_1} \times \cdots \times X_k^{n_k}$ donde los X_i no son isógenos entre sí y el tipo de isogenías de los X_i y los n_i están unívocamente determinados.*

Lo que vendría a querer decir que la categoría de Variedades Abelianas módulo isogenías (donde tensorizamos $\hom(X, Y) \otimes \mathbb{Q}$) es una variedad abeliana y semisimple.

Considerar la categoría de variedades abelianas módulo isogenías nos va a permitir dar más estructura al anillo $\mathrm{End}(X)$.

Vamos a definir, sobre el anillo $\mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}$ una involución.

Observación 4.2.10. Por empezar notemos que para un line bundle amplio L se tiene una isogenía $\phi_L : X \to \hat{X}$, como $K(L)$ es un grupo finito, podemos tomar el anulador $n = An(K(L))$, como $\hat{X} \cong X/K(L)$ entonces

$$n_{\hat{X}} = \overbrace{1_{\hat{X}} + \cdots + 1_{\hat{X}}}^{n \text{ veces}}$$

se factoriza como $n_X = g \circ \phi_L$ para algún $g : \hat{X} \to X$. Pero entonces $\phi_L \circ g = n_{\hat{X}}$ ya que, para todo $x \in \hat{X}$, $x = \phi_L(y)$ para algún $y \in Y$, entonces

$$\phi_L \circ g(x) = \phi_L(g(\phi_L(y))) = \phi_L(ny) = n\phi_L(y) = nx$$

Por lo tanto, en la categoría de variedades abelianas módulo isogenías, existe una inversa de ϕ_L.

Definición 4.2.11. (Involución de Rosati) Para una variedad abeliana X, L un divisor amplio y $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}$ se define la involución de Rosati respecto de L como

$$\alpha' = \phi_L^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \phi_L$$

Proposición 4.2.12. *Las siguientes son propiedades inmediatas de la involución de Rosati:*

- $\alpha' + \beta' = (\alpha + \beta)'$
- $(\alpha\beta)' = \beta'\alpha'$

Y también vale, por la hipótesis de reflexividad 4.2.5, que $\hat{\phi_L} = \phi_L$ *Lo que implica que* $(\alpha')' = \alpha$, *por lo que el nombre involución está bien puesto.*

Al final de 4.1 definimos el polinomio característico de un endomorfismo a partir de la fórmula que se deduce de 4.1.12 en términos de un divisor T y del signo Δ_T. En este caso vamos a tomar como divisor T al divisor D_L correspondiente al line bundle L respecto del cual tomamos la involución. Esto nos va a permitir describir mejor la siguiente forma bilineal:

$$(\alpha, \beta) = tr(\alpha'\beta)$$

Teorema 4.2.13. *Sean* $\alpha, \beta \in End_{\mathbb{Q}}(X)$, *y* $H \in N^1(X)$ *una clase que contenga un divisor amplio.*
Denotemos con α' *la involución de Rosati respecto de* H. *Entonces* $(\alpha, \beta) = tr(\alpha'\beta)$ *es una forma bilineal definida positiva, es decir* $(\alpha, \alpha) > 0$ *si* $\alpha \neq 0$ *y se tiene:*

$$tr(\alpha'\beta) = \frac{g}{\int H^g} \int H^{g-1} \Delta_H(\alpha, \beta)$$

Para demostrar este teorema vamos a necesitar el siguiente

Lema 4.2.14. *Sean* $\alpha, \beta \in End(X)$ *y* L *un line bundle sobre* X *entonces tenemos que*

$$\phi_{D_L(\alpha,\beta)} = \hat{\alpha}\phi_L\beta + \hat{\beta}\phi_L\alpha$$

O, lo que es equivalente, en $NS(X)$ *vale:*

$$D_L(\alpha'\beta) = D_L(\alpha, \beta)$$

donde $D_L(\gamma) = D_L(1_X, \gamma)$

Demostración. Si calculamos $\phi_{D_L(\alpha,\beta)}(u) = T_u^*(D_L(\alpha,\beta)) \otimes D_L(\alpha,\beta)^{-1}$ tenemos, aplicando el teorema del cuadrado (4.1.6) como en la demostración de 4.1.12, que nos da:

$$\alpha^* T^*_{\beta(u)} L \otimes \beta^* T^*_{\alpha(u)} L \otimes \alpha^* L^{-1} \otimes \beta^* L{-1}$$

que es, por definición, $\hat{\alpha}\phi_L\beta + \hat{\beta}\phi_L\alpha$. Entonces si aplicamos esta igualdad a $\phi_{D_L(1_X,\alpha'\beta)}$, vemos que nos da:

$$\phi_{D_L(1_X,\alpha'\beta)} = \hat{\alpha}\phi_L\beta + \hat{\beta}\phi_L\alpha = \phi_{D_L(\alpha,\beta)}$$

Es decir que $D_L(\alpha'\beta) = D_L(\alpha,\beta)$ en $NS(X)$ □

Demostración. (del teorema) Tenemos, por 4.1.5, que

$$(\alpha,\beta) = \frac{g}{\int H^g} \int H^{g-1} \Delta_H(1_X, \alpha'\beta)$$

Donde $g = \dim X$.
Por el lema anterior podemos cambiar $\Delta_H(1_X,\alpha'\beta)$ en la fórmula por $\Delta_H(\alpha,\beta)$.
Entonces la expresión para (α,α) se vuelve:

$$\frac{g}{\int H^g} \int H^{g-1} \Delta_H(\alpha,\alpha)$$

Como H es amplio, $\int H^g > 0$. Y, por lo que vimos al final de 4.1, $\Delta_H(\alpha,\alpha) = 2(\alpha^* H)$ que tiene que ser la clase de un divisor efectivo por ser H amplio. Por lo tanto $\int H^{g-1}\Delta_H(1_X,\alpha'\beta)$ es el grado del divisor $2(\alpha^*H)$ en la inmersión definida por H.
Entonces (α,α) es producto de números positivos y el teorema queda probado. □

Y ahora, la demostración de un teorema que estábamos esperando desde hace mucho:

Corolario 4.2.15. *Sea V un divisor numéricamente equivalente a 0, entonces $V \in Pic^0(X)$*

Demostración. Si V es numéricamente equivalente a 0, en particular $\lambda^*(V) = 0$ en $N^1(X)$. Entonces $\Delta_V(\alpha,\beta)\cdot Z = 0$ para todo ciclo $Z \in A^{g-1}$. En particular $\Delta_V(\alpha,\beta)\cdot H^{g-1} = 0$ para cualquier H amplio. Entonces

$$tr(\phi_H^{-1}\hat{\alpha}\phi_V\beta) = 0$$

Tomando $\alpha = 1_X$ y $\beta = (\phi_H^{-1}\phi_V)'$ tenemos que la traza puede ser 0 sólo si $\phi_H^{-1}\phi_V = 0$ en $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ como H es amplio y, por lo tanto, ϕ_H es una unidad en $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ debemos tener que $\phi_V = 0$, es decir $V \in Pic^0(X)$ □

Ahora podemos definir una norma $||\alpha|| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$ asociada a la forma cuadrática.

Para la identidad, tenemos que

$$||1_X|| = \sqrt{(1_X,1_X)} = \sqrt{tr(1'_X 1_X)} = \sqrt{tr(1_X)} = \sqrt{2g}$$

Ahora sí, vamos, con todas estas herramientas, a estudiar el morfismo de Frobenius.
Para calcular $||Fr_X||$ necesitamos saber cómo calcular $Fr'_X Fr_X$.
Por empezar notemos que si X es una variedad proyectiva definida sobre $\mathbb{F}_q$ (con esto

queremos decir que las operaciones de suma e inverso también están definidas como morfismos sobre $\mathbb{F}_q$) existe un line bundle L amplio definido sobre $\mathbb{F}_q$.
Entonces Frobenius actúa sobre $\mathcal{O}_X$ por $f \mapsto f^q$, por lo que $Fr^*L \cong L^q$ y tenemos

$$Fr_X^*(T^*_{Fr_X u} L \otimes L^{-1}) \cong T_u^* Fr_X^* L \otimes Fr_X^* L^{-1} \cong (T_u^* L \otimes L^{-1})^q$$

El fibrado de la izquierda representa $\hat{F}r_X(\phi_L(Fr(u)))$ y el de la derecha a $q \cdot \phi_L(u)$. Por lo que tenemos la igualdad

$$Fr'_X Fr_X = q 1_X$$

Por la cual $||Fr_X|| = \sqrt{2gq}$ y, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|tr(Fr_X)| \leq ||Fr_X|| \cdot ||1_X|| = 2g\sqrt{q}$$

En el siguiente lema vamos a calcular $\deg Fr_X$:

Lema 4.2.16. *Sea k un cuerpo perfecto, K una extensión separable de grado de trascendencia g y $q = char(k)^r$. Entonces $[K : K^q] = q^g$.*

Demostración. ([11, V, §3, p.: 137]) Sean $x_1, \dots, x_g$ una base de trascendencia separable, y sea $K_0 = k(x_1, \dots, x_g)$, entonces $[K_0 : K_0^q] = q^g$.
La extensión K^q de K_0^q es separable pues lo es K/K_0. Luego K_0 y K^q son linealmente disjuntas sobre K_0^q. Entonces $K = K_0 K^q$ y $[K : K^q] = [K_0 : K_0^q] = q^g$ □

En particular tenemos que el grado $\deg Fr_X = q^g$ Por la proposición 4.1.14 sabemos que si ω_j son las raíces características de Fr_X, entonces ω_j^n son las raíces de Fr_X^n y que:

$$tr(Fr_X^n) = \textstyle\sum_{j=1}^{2g} \omega_j^n, \quad ||tr(Fr_X^n)|| \leq 2gq^{n/2}, \quad \deg Fr_X = \prod_{j=1}^{2g} \omega_j = q^g$$

La hipótesis de Riemann dice entonces que $|\omega_j| = \sqrt{q}$. Para ver esto vamos a usar este lema sobre números complejos:

Lema 4.2.17. *Sean $\omega_1, \dots, \omega_s$ números complejos y z un número real tales que*

$$|\sum_{j=1}^{s} \omega_j^n| \leq sz^n$$

para todo número $n \in \mathbb{N}$. Entonces $|\omega_j| \leq z$

Demostración. Agrupando juntos los ω_j que tengan el mismo valor absoluto vemos que basta con probar el lema para cada uno de estos subconjuntos, supongamos entonces que todos los ω_j tienen el mismo valor absoluto, es decir que tratamos con una suma trigonométrica. Escribimos entonces $\omega_j = we^{i\theta_j}$, donde θ_j es un número real. Luego

$$\sum_{j=1}^{s} \omega_j^n = w^n \sum_{j=1}^{s} e^{i\theta_j n}$$

Entonces alcanza con probar que $\sum_{j=1}^{s} e^{i\theta_j n}$ se acerca arbitrariamente a s para infinitos valores de n, o lo que es lo mismo, probar que el vector $(n\theta_1, \dots, n\theta_s)$ se acerca a $(0, \dots, 0)$ módulo 2π para infinitos $n \in \mathbb{N}$.
En el toro $\mathbb{R}^s/(2\pi, \dots, 2\pi)$ los vectores $(n\theta_1, \dots, n\theta_s)$ representan infinitos puntos diferentes por ser π trascendente. Luego sus diferencias van a ser arbitrariamente cercanas a 0 □

Como las raíces características de Fr_X cumplen $|\omega_j| \leq \sqrt{q}$ y además $\prod_{j=1}^{2g} = q^g$, entonces necesariamente se tiene:

$$|\omega_j| = \sqrt{q}$$

Escribiendo $N_r = \deg(Fr_X^r - 1_X) = \sharp\{\text{elementos racionales sobre } \mathbb{F}_{q^r}\}$, por 4.1.14, tenemos que

$$N_r = \prod_{j=1}^{2g} (\omega_j^r - 1) = \tag{4.2.1}$$

$$= \sum_{j=0}^{2g} \sum_{k_1,\ldots,k_j} (-1)^{2g-j} \prod_i \omega_{k_i}^r \quad (\text{agrupando } \alpha_i = \textstyle\prod_i \omega_{k_i}^r) \tag{4.2.2}$$

$$= \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \sum_{i=0}^{b_j} \alpha_{ij}^r \tag{4.2.3}$$

Donde $|\alpha_{ij}| = q^{j/2}$. O sea que se cumple la hipótesis de Riemann-Weil.

Observación 4.2.18. La demostración que aparece acá sigue las líneas de Lang en [11]. Es ligeramente más elemental que la que da Mumford en [16] y por eso fue elegida.
Sin embargo es bastante más oscura que la otra. Por empezar no se termina de entender el papel clave que cumple la positividad de la forma bilineal definida a partir de la involución de Rosati. Por otra parte las definiciones de traza y norma son muy sugestivas pero no queda claro hasta dónde llega analogía con las de extensiones de cuerpo.

La cuestión es que se puede probar que $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ es un álgebra de dimensión finita sobre $\mathbb{Q}$. La involución de Rosati, entonces, hace de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ un álgebra de dimensión finita munida de una involución positiva, lo que restringe grandemente las posibles estructuras que pueda tener.
En particular si tomamos el álgebra conmutativa $\mathbb{Q}\,[Fr_X]$ va a resultar producto de cuerpos de números $K_1 \times \cdots \times K_t$. Además se puede probar que la involución de Rosati deja estable a los K_i. Por lo que estos cuerpos con una involución positiva son, o bien totalmente reales con la identidad como composición, o bien extensiones cuadráticas imaginarias con la conjugación como involución. En todos estos casos las raíces del polinomio característico de un elemento tienen todas la misma norma.
Por último también se puede demostrar que lo que se definió acá como polinomio característico, traza y norma corresponde exactamente a sus análogos en una extensión finita de cuerpos.

5. Correspondencias

En la sección 2.2 vimos cómo, para una cohomología de Weil, el K-espacio vectorial $H^*(X \times Y)$ es canónicamente isomorfo a $\hom_K(H^*(X), H^*(Y))$. Este resultado es en realidad muy útil, ya que permite controlar la información que se tiene de los morfismos entre grupos de cohomología mediante el conocimiento de otros grupos de cohomología.

En general, para una teoría de intersección cualquiera, se puede saber mucho acerca de los anillos $I(X)$ e $I(Y)$ pero nada nos asegura que todos los morfismos de Λ-módulos que existan entre $I(X)$ e $I(Y)$ tengan algún significado geométrico. Podríamos considerar sólo los morfismos de módulos del tipo f^* o f_*, es decir, provenientes de morfismos de variedades. Pero, como nos muestra el ejemplo de las cohomologías de Weil, de esa manera estaríamos ignorando muchos morfismos válidos, con significado geométrico interesante. El gráfico de un morfismo Γ_f es un caso muy particular de ciclo en $X \times Y$, por empezar es siempre un ciclo que tiene la dimensión de X y donde la intersección $\Gamma_f \cdot [x \times Y]$ está bien definida para todo $x \in X$ y es un ciclo de dimensión 0 y grado 1 (más específicamente el ciclo $[x \times f(x)]$).

Ejemplos 5.0.19. Dos ejemplos de ciclos homológicos muy importantes que no son gráficos de morfismos (por cuestiones de dimensión).

- En $H^*(\mathbb{P}^n \times \breve{\mathbb{P}}^n)$ ($\breve{\mathbb{P}}^n$= espacio dual de $\mathbb{P}^n$) la clase de la correspondencia de incidencia $\{(x, H) \in \mathbb{P}^n \times \breve{\mathbb{P}}^n :\ x \in H\}$
- Sea X una variedad abeliana de dimensión g. La clase del divisor P de ceros y polos del fibrado de Poincaré $[P] \in H^{4g-2}(X \times \hat{X})$

Vemos así que, si bien considerar todos los morfismos de Λ-módulos en $\hom_\Lambda(I(X), I(Y))$ podría ser irrelevante, perderíamos información valiosa si sólo consideráramos morfismos de la forma f^* o f_*.

Dada una teoría de intersección $X \mapsto I(X)$. Vamos a definir entonces una nueva categoría, la categoría de correspondencias, donde los objetos son variedades proyectivas regulares y los morfismos son elementos de $I(X \times Y)$. Para eso vamos a definir primero una regla de composición y demostrar que cumple los axiomas de los morfismos en una categoría, siguiendo [5, Capítulo 16]

Definición 5.0.20. (Correspondencias) Como en el caso cohomológico, dada I un funtor de teoría de intersección una (I-)correspondencia entre una variedad (proyectiva y regular) X y una variedad Y es un elemento del anillo $I(X \times Y)$

Notación 5.0.21. Vamos a usar la notación $T : X \vdash Y$ para querer decir " T es una correspondencia entre X e Y"

A lo largo de esta sección vamos a usar (y mucho) la convención que usa Fulton para escribir proyecciones:

Notación 5.0.22. Para dos variedades X e Y cualesquiera vamos a notar p^{XY}_X a la proyección $(x, y) \mapsto x$. En general $p^{X_1 \dots X_n}_{X_{i_1} \dots X_{i_k}}$ va a ser la notación para la proyección de $X_1 \times \cdots \times X_n$ en $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_k}$

Definición 5.0.23. Sean X, Yy Z variedades proyectivas regulares, y sean $\alpha : X \vdash Y$, $\beta : Y \vdash Z$ correspondencias, definimos la composición de α y β como:

$$\beta \circ \alpha = p_{XZ*}(p^*_{XY}\alpha \cdot p^*_{YZ}\beta)$$

(en esta fórmula omitimos el superíndice XYZ que correspondería por notación, o sea p_{XZ*} quiere decir p^{XYZ}_{XZ*}). El producto $p^*_{XY}\alpha \cdot p^*_{YZ}\beta$ es el producto en el anillo $I(X \times Y \times Z)$

Definición 5.0.24. Para una correspondencia $\alpha : X \vdash Y$ se define la traspuesta α' de α por $\alpha' = \tau_*\alpha$, donde $\tau : X \times Y \to Y \times X$ es la trasposición $\tau(x, y) = (y, x)$

La traspuesta de una correspondencia va a jugar el papel que f_* juega respecto de f^*. Además, al estar definida a través de morfismos de Λ-módulos la composición cumple que

$$\beta\circ(\lambda\alpha_1+\alpha_2) = \lambda\beta\circ\alpha_1+\beta\circ\alpha_2 \qquad (\mu\beta_1+\beta_2)\circ\alpha = \mu(\beta_1\circ\alpha)+\beta_2\circ\alpha \quad (\alpha_1+\alpha_2)' = \alpha'_1+\alpha'_2$$

para todos $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Ahora vamos a probar que, efectivamente, la composición de correspondencias define una categoría, que la trasposición de correspondencias es una involución en esa categoría, y que existen un funtor contravariante y uno covariante $\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k \to \mathcal{C}_I(\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k)$ de la categoría $\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k$ de variedades proyectivas regulares a la categoría de I-correspondencias:

Proposición 5.0.25. *Sean $\alpha : X \vdash Y$ y $\beta : Y \vdash Z$ entonces:*

1. *Si $\gamma : Z \vdash W$, entonces $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$*
2. *Sea $\delta : X \to X \times X$ el morfismo diagonal y $\Delta = \delta_*(1_X)$ la clase de la diagonal en $I(X \times X)$ entonces se tiene que $\alpha \circ \Delta = \alpha$, $\Delta \circ \gamma = \gamma$ para toda $\alpha : X \vdash Y$ y toda $\gamma : Z \vdash X$*
3. *$(\beta \circ \alpha)' = \alpha' \circ \beta'$ y $(\alpha')' = \alpha$*
4. *Dado un morfismo $f : X \to Y$ sea $\gamma_f : X \to X \times Y$, con $\gamma_f(x) = (x, f(x))$ y $\Gamma_f = \gamma_{f*}(1_X)$ la clase del gráfico de f en $I(X \times Y)$. Entonces $\Gamma_g \circ \Gamma_f = \Gamma_{g\circ f}$*

Demostración. Primero probemos 1. (En la demostración vamos a omitir el superíndice $XYZW$ de las proyecciones, los otros índices van a aparecer como fijamos arriba) Notemos que tenemos el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times Z \times W \arrow[r, "p_{XYZ}"] \arrow[d, "p_{XZW}"'] & X \times Y \times Z \arrow[d, "p^{XYZ}_{XZ}"] \\ X \times Z \times W \arrow[r, "p^{XZW}_{XZ}"'] & X \times Z \end{tikzcd}$$

Como estamos trabajando con variedades proyectivas, todos los morfismos son propios, y siempre las proyecciones de los productos cartesianos son morfismos playos. Por lo que podemos aplicar el axioma 2.1.6 que nos dice: $(p^{XZW}_{XZ})^* \circ (p^{XZW}_{XZ})_* = (p_{XZW})_*(p_{XYZ})^*$ Podemos aplicar esta ecuación a la fórmula para $\gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ y tener:

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = p^{XZW}_{XW*}(p^{XYZ*}_{XZ}(p^{XYZ}_{XZ*}(p^{XYZ*}_{XY}\alpha \cdot p^{XYZ*}_{YZ}\beta)) \cdot p^{XZW*}_{ZW}\gamma) =$$

$$= p^{XZW}_{XW*}(p_{XZW*}(p^*_{XYZ}(p^{XYZ*}_{XY}\alpha \cdot p^{XYZ*}_{YZ}\beta)) \cdot p^{XZW*}_{ZW}\gamma)$$

Por ser p^*_{XYZ} un morfismo de anillos tenemos

$$p^*_{XYZ}(p^{XYZ*}_{XY}\alpha \cdot p^{XYZ*}_{YZ}\beta) = p^*_{XYZ}(p^{XYZ*}_{XY}\alpha) \cdot p^*_{XYZ}(p^{XYZ*}_{YZ}\beta)$$

Y por funtorialidad $p^*_{XYZ}p^{XYZ*}_{XY} = p^*_{XY}$, entonces:

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = p^{XZW}_{XW*}(p_{XZW*}(p^*_{XY}\alpha \cdot p^*_{YZ}\beta) \cdot p^{XZW*}_{ZW}\gamma)$$

Ahora aplicamos la fórmula de proyección 2.1.8 para ver que

$$p_{XZW*}(p^*_{XY}\alpha \cdot p^*_{YZ}\beta) \cdot p^{XZW*}_{ZW}\gamma = p_{XZW*}((p^*_{XY}\alpha \cdot p^*_{YZ}\beta \cdot p^*_{XZW})p^{XZW*}_{ZW}\gamma)$$

Tenemos así, por esta ecuación y por funtorialidad que

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = p_{ZW*}((p^*_{XY}\alpha \cdot p^*_{YZ}\beta) \cdot p^*_{ZW}\gamma) = p_{ZW*}(p^*_{XY}\alpha \cdot (p^*_{YZ}\beta \cdot p^*_{ZW}\gamma))$$

Ahora podemos hacer las mismas operaciones en el orden inverso notando que en todos los razonamientos que hicimos podemos reemplazar Y, por Z y X por W y obtener $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ Es decir, podemos recorrer el diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& X \times Y \times Z \arrow[dl] \arrow[dr] & & Y \times Z \times W \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \times Y & & Y \times Z & & Z \times W
\end{tikzcd}$$

de derecha a izquierda o de izquierda a derecha.

Ahora vamos a probar 3. Sea $\sigma : X \times Y \times Z \to Z \times Y \times X$ dado por $\sigma(x, y, z) = (z, y, x)$. Y denotemos con τ^{ST} el morfismo de $S \times T$ a $T \times S$ que invierte los factores. Entonces, por 2.1.6 tenemos:

$$(p^{ZYX}_{ZY})^*(\tau^{YZ})_* = \sigma_*(p^{XYZ}_{YZ})^*, \qquad (p^{ZYX}_{YX})^*(\tau^{YX})_* = \sigma_*(p^{XYZ}_{XY})^*$$

Notemos también que, al ser σ un isomorfismo, también lo es σ^* cuya inversa es σ_* por el axioma de reciprocidad 2.1.5. En particular σ_* es un morfismo de anillos. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha' \circ \beta' &= p^{ZYX}_{ZX*}(p^{ZYX*}_{ZY}(\tau^{YZ}_*\beta) \cdot p^{ZYX*}_{YX}(\tau^{XY}_*\beta)) = &(5.0.4)\\
&= p^{ZYX}_{ZX*}(\sigma_* p^{XYZ*}_{YZ}\alpha \cdot \sigma_* p^{XYZ*}_{XY}\beta) = &(5.0.5)\\
&= p^{ZYX}_{ZX*}(\sigma_*(p^{XYZ*}_{YZ}\alpha \cdot p^{XYZ*}_{XY}\beta)) = &(5.0.6)\\
&= \tau^{XZ}_* p^{XYZ}_{XZ*}(p^{XYZ*}_{YZ}\alpha \cdot p^{XYZ*}_{XY}\beta) = (\beta \circ \alpha)' &(5.0.7)
\end{aligned}$$

Donde el último renglón sale de que $\tau^{XZ}p_{XZ} = p^{ZYX}_{ZX}\sigma$. Por otra parte, como $\tau^{XY}\tau^{YX} = id_{X\times Y}$ entonces $(\alpha')' = \alpha$.

Veamos la prueba de 2. Recordemos que δ denota al morfismo diagonal, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta \circ \gamma &= p^{ZXX}_{ZX*}(p^{ZXX*}_{XX}(\delta_*(1_X)) \cdot p^{ZXX*}_{ZX}\gamma) &(5.0.8)\\
&= p^{ZXX}_{ZX*}((id_X \times \delta)_*(p^{ZX*}_{X}(1_X)) \cdot p^{ZXX*}_{ZX}\gamma) &(5.0.9)\\
&= p^{ZXX}_{ZX*}((id_X \times \delta)_*((id_X \times \delta)^* p^{ZXX*}_{ZX}\gamma)) &(5.0.10)\\
&= \gamma &(5.0.11)
\end{aligned}$$

Donde la primera ecuación es la definición, segunda ecuación sale de 2.1.6, la tercera sale de la fórmula de proyección 2.1.8 y, finalmente, se usa que $p^{ZXX}_{ZX}(id_Z \times \delta) = id_{Z\times X}$.
Por otra parte, si vale $\Delta \circ \gamma = \gamma$ usamos la trasposición y el hecho de que $\Delta' = \Delta$ para concluir que también vale

$$\alpha \circ \Delta = (\Delta' \circ \alpha')' = (\Delta \circ \alpha')' = (\alpha')' = \alpha$$

Por último veamos 4. De manera similar a lo anterior tenemos que:

$$\Gamma_g \circ \Gamma_f = p^{XYZ}_{XZ*}(p^{XYZ*}_{XY}(\gamma_{f*}(1_X)) \cdot p^{XYZ*}_{YZ}(\gamma_{g*}(1_Y))) = \tag{5.0.12}$$
$$= p^{XYZ}_{XZ*}(p^{XYZ*}_{XY}(\gamma_{f*}(1_X)) \cdot (id_X \times \gamma_g)_*(1_{X\times Y})) = \tag{5.0.13}$$
$$= p^{XYZ}_{XZ*}(id_X \times \gamma_g)_*((id_X \times \gamma_g)^* p^{XYZ*}_{XY}(\gamma_{f*}(1_X))) = \tag{5.0.14}$$
$$= (id_X \times g)_*(\gamma_{f*}(1_X)) = (id_X \times g \circ f)_*(1_X) = \Gamma_{g\circ f} \tag{5.0.15}$$

□

Observemos que 1 y 2 están diciendo que las correspondencias con la ley de composición como la definimos forman una categoría donde el papel de la identidad lo juega Δ, la clase de la identidad. El punto 3 de la proposición está diciendo que la trasposición define una involución en la categoría de correspondencias. Y, por último, el punto 4 dice que la asignación $f \mapsto \Gamma_f$ es un funtor covariante de $\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k$ a la categoría de I-correspondencias. Además, podemos observar que la trasposición hace de $f \mapsto \Gamma'_f$ un funtor contravariante entre esas categorías.

Adicionalmente podemos definir un producto en la categoría de correspondencias:

Definición 5.0.26. Notamos con $\overline{X}$ a la variedad X considerada como objeto en $\mathcal{C}_I\mathbb{P}\mathcal{V}ar$, la categoría de I-correspondencias. Definimos el producto $\otimes$ en $\mathcal{C}_I\mathbb{P}\mathcal{V}ar$ de la siguiente manera:

$$\overline{X} \otimes \overline{Y} =_{Def} \overline{X \times Y}$$

Y para dos correspondencias $\alpha_1 : X_1 \vdash Y_1$ y $\alpha_2 : X_2 \vdash Y_2$ definimos:

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 : \overline{X}_1 \otimes \overline{X}_2 \vdash \overline{Y}_1 \otimes \overline{Y}_2, \qquad \alpha_1 \otimes \alpha_2 = p^*_{X_1Y_1}\alpha_1 \cdot p^*_{X_2Y_2}\alpha_2$$

(Notar que cuando escribimos $p_{X_1Y_1}$ obviamos el superíndice $X_1Y_1X_2Y_2$)

Proposición 5.0.27. *Dadas correspondencias* $\alpha_1 : X_1 \vdash Y_1$, $\alpha_2 : X_2 \vdash Y_2$, $\beta_1 : Y_1 \vdash Z_1$ *y* $\beta_2 : Y_2 \vdash Z_2$ *se tiene:*

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 \circ \beta_1 \otimes \beta_2 = (\alpha_1 \circ \beta_1) \otimes (\alpha_2 \circ \beta_2)$$

Demostración. La demostración se hace de manera similar a la de 5.0.25, siempre usando 2.1.6, 2.1.8. □

Este producto también tiene la propiedad de que $(\alpha \otimes \beta)' = \alpha' \otimes \beta'$ que sale del hecho que

$$\tau^{(X_1\times X_2)(Y_1\times Y_2)} \circ p_{X_1Y_1} = p^{Y_1Y_2X_1X_2}_{Y_1X_1}$$

Además tenemos que este producto respeta el funtor $f \mapsto \Gamma_f$ en el siguiente sentido:

Proposición 5.0.28. *Sean $f : X_1 \to Y_1$, $g : X_2 \to Y_2$ morfismos de variedades proyectivas regulares, entonces se tiene:*

$$\Gamma_{f\times g} = \Gamma_f \otimes \Gamma_g$$

Demostración. Recordamos que $\Gamma_f = \gamma_{f*}(1_{X_1})$ entonces calculamos:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_f \otimes \Gamma_g = p^*_{X_1Y_1}(\gamma_{f*}(1_{X_1})) \cdot p^*_{X_2Y_2}(\gamma_{g*}(1_{X_1})) = \\
&= (\gamma_f \times id_{X_2\times Y_2})_*(1_{X_1\times X_2\times Y_2})(id_{X_1\times Y_1} \times \gamma_g)_*(1_{X_1\times Y_1\times X_2}) = \\
&= (\Gamma_f \times 1_{X_2\times Y_2})(1_{X_1\times Y_1} \times \Gamma_g) = \\
&= \Gamma_f \times \Gamma_g = (\gamma_f \times \gamma_g)_*(1_{X_1\times X_2}) = \Gamma_{f\times g}
\end{aligned}$$

Donde en la segunda ecuación usamos 2.1.6, en la tercera 2.1.3 (junto con el hecho de que $1_{X\times Y} = 1_X \times 1_Y$) y en la penúltima de vuelta 2.1.3. □

Observación 5.0.29. Además de todas las propiedades que estuvimos viendo, se puede sin esfuerzo que, si e es la variedad que consta en un punto, entonces la identificación natural de $X \times e$ con X hace de $\overline{X} \times \_e$ objetos naturalmente isomorfos en la categoría de correspondencias. También puede demostrarse de manera similar a como demostramos TODAS las proposiciones de esta sección, que existen identidades $\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma) = (\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma$ para correspondencias α, β y γ cualesquiera.
Estas propiedades suelen resumirse con la frase: La categoría de correspondencias es una categoría tensorial con involución o una $\otimes$-categoría rígida (ver [1, capítulo 2.2])

Ya sabemos que tenemos en $\mathcal{C}_I\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k$ una categoría tensorial con un funtor $f \mapsto \Gamma_f$ desde $\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k$. Vamos a ver que este funtor factoriza al de I. Es decir que existe F de $\mathcal{C}_I\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k$ a $\mathcal{A}\updownarrow\}_\Lambda$ tal que $F(\Gamma_f) = f_*$ y $F(\Gamma'_f) = f^*$.

Definición 5.0.30. Dada una correspondencia $\alpha : X \vdash Y$ definimos un homomorfismo $\alpha_* : I(X) \to I(Y)$ por:

$$\alpha_*(x) = p^{XY}_{Y*}(\alpha \cdot p^{XY*}_X(x))$$

Y un homomorfismo $\alpha^* : I(Y) \to I(X)$ por:

$$\alpha_*(y) = p^{XY}_{X*}(\alpha \cdot p^{XY*}_Y(y))$$

Proposición 5.0.31. *Si se tienen correspondencias $\alpha : X \vdash Y$ y $\beta : Y \vdash Z$ entonces vale:*

$$(\beta\circ\alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_* \quad y \quad (\beta\circ\alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^* \tag{5.0.16}$$

$$(\alpha')_* = \alpha^* \tag{5.0.17}$$

$$\text{Si } f : X \to Y \text{ es un morfismo entonces} \quad (\Gamma_f)_* = f_*, \quad (\Gamma_f)^* = f^* \tag{5.0.18}$$

$$(\alpha\otimes\beta)_* = \alpha_* \times \beta_* \quad (\alpha\otimes\beta)^* = \alpha^* \times \beta^* \tag{5.0.19}$$

Demostración. Sea $e = Spec(k)$ la variedad consistente en un punto, entonces podemos ver a $x \in I(X) = I(e \times X)$ como una correspondencia $\overline{x} : e \vdash X$ y

$$\alpha_*(x) = p^{XY}_{Y*}(\alpha \cdot p^{XY*}_X(x)) = \alpha \circ \overline{x} \in I(e \times Y) = I(Y)$$

Por lo que la proposición sale de aplicar 5.0.25 □

Más simplemente sale que, si $x \in I(X)$ y $\delta : X \to X \times X$ es el morfismo diagonal, entonces viendo a $m_x = \delta_* x \in I(X \times X)$ como correspondencia sale:

$$(m_x)_*(a) = p_{2*}(p_1^*(a)\delta_* x) = p_{2*}\delta_*(x \cdot \delta^* p_1^* a) = x \cdot a \tag{5.0.20}$$

Observación 5.0.32. La definición de α^* para una I-correspondencia es exactamente análoga a la forma en la que una correspondencia homológica $v \in H^*(X \times Y)$ determina un morfismo K-lineal $v^* : H^*(X) \to H^*(Y)$. Sin embargo, a diferencia del caso homológico, no tenemos, en general, suficientes hipótesis en $I(X \times Y)$ para asegurar que la aplicación $\alpha \mapsto \alpha_*$ entre $I(X \times Y)$ y $\hom_\Lambda(X, Y)$ sea biyectiva. Por empezar ya habíamos dicho no hay una forma evidente de caracterizar geométricamente todos los morfismos Λ-lineales entre $I(X)$ y $I(Y)$ pero, más importante aún, en general no existe el isomorfismo de Künneth entre $I(X) \otimes I(Y)$ y $I(X \times Y)$ que es un paso clave en probar la biyectividad de la aplicación $\alpha \mapsto \alpha^*$. Como resultado de esto vamos a tener que, en casos muy importantes, tomar la categoría de correspondencias $\mathcal{C}_I\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k$ difiere de considerar la teoría de intersección $X \mapsto I(X)$ asociada a ella.

Ejemplo 5.0.33. Este ejemplo sencillo nos va a servir para ilustrar un poco las diferencias que puede haber entre una teoría de intersección y su categoría de correspondencias asociada:

Tomemos como teoría de intersección $I(X) = A^*(X)$ la teoría de Chow de ciclos módulo equivalencia racional ([5, 15]). Y sea C una curva (proyectiva y regular, como venimos tomando todas las variedades) de género $g \geq 1$. Sean $x, y \in C$ dos puntos tales que sus clases $[x], [y]$ en $A^1(C)$ son distintas. Tomemos como correspondencia $\alpha : C \vdash \mathbb{P}^1$ al ciclo

$$\alpha = ([x] - [y]) \times [\mathbb{P}^1] = ([x] - [y]) \times 1_{\mathbb{P}^1} = p_C^{C\mathbb{P}^1 *}([x] - [y])$$

Como $[x] \neq [y]$ en $A^1(C)$ entonces $\alpha \neq 0$ en $A^*(C \times \mathbb{P}^1)$ (puede verse esto ya que,si t es un punto de $\mathbb{P}^1$ y $j : C \to C \times \mathbb{P}^1$ es la inclusión $z \mapsto (z, t)$ entonces $j^*(\alpha) = [j^{-1}(\alpha)] = [x] - [y] \neq 0$).
Sin embargo es cierto que $\alpha_* = 0$ ya que, si $[z] \in A^1(C)$

$$\begin{aligned} &\alpha_*(z) = p_{\mathbb{P}^1 *}^{C\mathbb{P}^1}(p_C^{C\mathbb{P}^1 *}(z)\alpha) = \\ &p_{\mathbb{P}^1 *}^{C\mathbb{P}^1}(p_C^{C\mathbb{P}^1 *}(z)p_C^{C\mathbb{P}^1 *}([x] - [y])) = \\ &p_{\mathbb{P}^1 *}^{C\mathbb{P}^1}(p_C^{C\mathbb{P}^1 *}([z] \cdot ([x] - [y]))) = p_{\mathbb{P}^1 *}^{C\mathbb{P}^1}(0) = 0 \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se debe al hecho de que, al tener $A^*(X)$ estructura de anillo graduado por la codmensión de los ciclos, $[z] \cdot ([x] - [y]) \in A^2(\mathbb{P}^1) = 0$. Entonces $\alpha_* = 0$ sobre $A^1(C)$ falta ver que $\alpha_* = 0$ en $A^0(C) = \mathbb{Z} \cdot [C]$ y, en efecto:

$$\begin{aligned} &\alpha_*([C]) = \alpha_*(1_C) = p_{\mathbb{P}^1 *}^{C\mathbb{P}^1}(p_C^{C\mathbb{P}^1 *}([C])\alpha) = \\ &p_{\mathbb{P}^1 *}^{C\mathbb{P}^1}(1_{C \times \mathbb{P}^1 *}\alpha) = p_{\mathbb{P}^1 *}^{C\mathbb{P}^1}(([x] - [y]) \times [\mathbb{P}^1]) = \\ &\mathbb{P}^1 - \mathbb{P}^1 = 0 \end{aligned}$$

El principio de identidad de Manin. El principal problema con hacer cálculos con correspondencias es el hecho de que, en general, tenemos muy pocos elementos con los cuales identificar la composición $\beta \circ \alpha$ de dos correspondencias con ciclos en $I(X \times Y)$.

El principio de identidad de Manin es la herramienta más general para establecer ecuaciones entre correspondencias (de hecho creo que es la única herramienta general para esto). Se basa en una observación muy sencilla y en el Lema de Yoneda, que es una tautología[3]. Sin embargo el principio de identidad va a constituir la técnica principal que vamos a usar para establecer igualdades entre motivos con el objetivo de probar la hipótesis Riemann-Weil en nuestro caso (recordemos que vamos a tratar de probar la para variedades uniracionales de dimension 3). Además, más allá de lo que nos concierne a nosotros acá, tiene consecuencias muy interesante que vamos a explicar luego.

La pregunta que queremos responder es, simplemente, si dadas $\alpha, \beta : X \vdash Y$ es cierto que $\alpha = \beta$ o no. Una observación trivial es que, siendo α y β flechas en un categoría, $\alpha = \beta$ si y sólo si las dos correspondencias determinan el mismo funtor de Yoneda. Es decir, si para todo $\gamma : Z \vdash X$ $\alpha \circ \gamma = \beta \circ \gamma$.
Hasta acá es la parte trivial, ahora veamos este lema que va a completar esencialmente el principio de Manin:

Lema 5.0.34. *Sean $\alpha : X \vdash Y$, $\beta : Y \vdash Z$ correspondencias y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ morfismos de variedades, entonces vale:*

$$\Gamma_g \circ \alpha = (id_X \times g)_*(\alpha) \qquad \beta \circ \Gamma_f = (f \times id_Z)^*(\beta)$$

Demostración. La demostración de este lema esencialmente ya la escribimos cuando fue probada 5.0.25, pero vamos a verla bien explícitamente para que quede claro:
Como siempre vamos a usar 2.1.6 y 2.1.8 para ver que:

$$\Gamma_g \circ \alpha = p^{XYZ}_{XZ*}(p^{XYZ*}_{YZ}(\gamma_{g*}(1_Y))p^{XYZ*}_{XY}\alpha) =$$

$$= p^{XYZ}_{XZ*}((id_X \times \gamma_g)_*(p^{XY*}_{Y}(1_Y))p^{XYZ*}_{XY}\alpha) =$$

$$= p^{XYZ}_{XZ*}((id_X \times \gamma_g)_*(id_X \times \gamma_g)^* p^{XYZ*}_{XY}\alpha) =$$

$$= (id_X \times g)_*(\alpha)$$

Observar que usamos que $p^{XYZ}_{XZ}(id_X \times \gamma_g) = (id_X \times g)$ y que $p^{XYZ}_{XZ}(id_X \times \gamma_g) = id_{X \times Y}$
Similarmente tenemos:

$$\beta \circ \Gamma_f = p^{XYZ}_{XZ*}(p^{XYZ*}_{YZ}\beta p^{XYZ*}_{XY}(\gamma_{f*}(1_Y))) =$$

$$= p^{XYZ}_{XZ*}((\gamma_f \times id_Z)_*(1_{X \times Z})p^{XYZ*}_{YZ}\beta) =$$

$$= p^{XYZ}_{XZ*}((\gamma_f \times id_Z)_*(\gamma_f \times id_Z)^* p^{XYZ*}_{YZ}\beta) =$$

$$= (\gamma_f \times id_Z)^*(\beta)$$

□

[3] ©Eduardo Dubuc.

Por la definición de trasposición de correspondencias sale también que

$$(\beta \circ \Gamma_f') = (\Gamma_f \circ \beta')' = ((id \times f)_* \beta')' = (f \times id)_* \beta \tag{5.0.21}$$

Combinando el último lema con el lema de Yoneda vemos que, dada una correspondencia α de la forma Γ_f se tiene:

$$\alpha = 0 \Longleftrightarrow \beta \circ \alpha = 0 \quad \forall \beta : Y \vdash Z \Longleftrightarrow (f \times id_Z)^*(\beta) = 0 \quad \forall \beta : Z \vdash X$$

o, si α es de la forma Γ_f', se tiene:

$$\alpha = 0 \Longleftrightarrow (f \times id_X)_*(\beta) = 0 \quad \forall \beta : Z \vdash X$$

Como ya habíamos visto, también tenemos que $(m_x)_*(v) = x \cdot v$ entonces, como vale que $(\alpha \circ \beta)_* = \alpha_* \circ \beta_*$ y las composiciones y trasposiciones son lineales, podemos resumir lo anterior en la siguiente

Proposición 5.0.35. *(Principio de identidad de Manin ([12, §3])) Dada una combinación lineal de correspondencias $\sum l_i \alpha_i$ tales que cada α_i es composición de correspondencias de la forma Γ_f, Γ_f' y m_x. Denotamos con $a_i(Z)$ al morfismo de Λ-módulos que se obtiene reemplazando en la escritura de α_i a todos los Γ_f por $(f \times id_Z)^*$, todos los Γ_f' por $(f \times id_Z)_*$ y todos los m_x por multiplicación por el elemnto $x \times 1_Z$.*
Entonces vale que $\sum l_i \alpha_i = 0$ si y sólo si, para todo $Z \in \mathbb{P}\mathcal{V}ar$, se tiene que $\sum l_i a_i(Z) = 0$ como identidad de morfismos de Λ-módulos.

Vamos a ilustrar un poco el funcionamiento del principio de identidad, para que se pueda entender mejor y porque van a sernos útiles, después con dos ejemplos

Ejemplos 5.0.36. [12, §3] *1.* Sea $I(X) = A^*(X)$ la teoría de Chow. Sea $\phi : X \to Y$ un morfismo de grado finito igual a d. Por definición de ϕ_* tenemos que $\phi_*(1_X) = d1_Y$, de donde, por 2.1.8 tenemos que

$$\phi_* \phi^*(y) = \phi_*(1_X)(y) = dy$$

Como para todas las variedades Z se tiene que $\phi \times id_z : X \times Z \to Y \times Z$ es un morfismo finito de grado d, entonces hay una identidad a nivel correspondencias:

$$\Gamma_\phi \circ \Gamma_\phi' = d\Delta$$

Si tensorizamos el anillo $A^*(X)$ por $\mathbb{Q}$ de manera que d sea inversible y escribimos $p = (1/d)\Gamma_\phi \circ \Gamma_\phi' : X \vdash X$ entonces tenemos:

$$p^2 = (1/d^2)\Gamma_\phi \circ \Gamma_\phi' \circ \Gamma_\phi \circ \Gamma_\phi' = (1/d^2)(\Gamma_\phi \circ d \cdot id_Y \circ \Gamma_\phi') = p$$

Es decir que p es un *proyector*, más adelante esto va a ser un hecho básico en la identificación de motivos

2. Sea el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\psi"] & X' \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "\iota"'] & X \end{tikzcd}$$

Donde ι es una inclusión cerrada Y es una subvariedad de codimensión r, ϕ es el Blow-up de X a lo largo de Y y $Y' = \phi^{-1}(Y)$. En la demostración del teorema Riemann-Roch-Grothendieck [SGA6], [2], [5] se usan las siguientes identidades en el anillo de Chow:([2, Lema 19], [5, Capítulos 6.3 y 6.7])

$$\iota^*\iota_*(y) = yc_r(N) \qquad \phi^*\iota_*(y) = \epsilon_*(\psi^*(y)c_{r-1}(\mathcal{F}))$$

(Donde N es el fibrado dual al fibrado normal de Y en X, $\mathcal{F}$ es el haz que es núcleo del morfismo canónico: $\psi^*(N) \to \mathcal{O}_Y(1)$ y c_i denota la i-ésima clase de Chern).
Como, al multiplicar todos los objetos por una variedad Z y todas las flechas del diagrama por id_Z se obtiene otro diagrama similar con (esto no vamos a probarlo ahora) los elementos $c_r(N)$ y $c_{r-1}(\mathcal{F})$ reemplazados por $1_Z \times c_r(N)$ y $1_Z \times c_{r-1}(\mathcal{F})$ respectivamente, entonces se tienen ecuaciones de correspondencias:

$$\Gamma_\iota \circ \Gamma'_\iota = m_{c_r(N)} \qquad \Gamma_\phi \circ \Gamma'_\iota = \Gamma'_\epsilon \circ m_{c_{r-1}(\mathcal{F})} \circ \Gamma_\psi$$

Estas son identidades de elementos en $A^*(Y \times Y)$ y $A^*(Y \times X')$ respectivamente, en particular estas ecuaciones valen en cualquier relación de equivalencia menos fina, por ejemplo la equivalencia homológica. Entonces vemos así que las mismas igualdades valen para correspondencias homológicas y, luego, valen como morfismos entre grupos de cohomología.

Observación 5.0.37. El segundo de los ejemplos no tuvo una expicación muy completa, (por empezar no demostramos las ecuaciones de morfismos de anillos de Chow) pero está ahí para ilustrar un fenómeno muy importante:
Como ya vimos, a diferencia de las correspondencias homológicas, las correspondencias de Chow no determinan unívocamente morfismos. Y, si bien tenemos que la equivalencia racional es más fina que la equivalencia homológica, no podemos deducir igualdades de morfismos de anillos de cohomología a partir de igualdades de morfismos de anillos de Chow.
Es decir, dado un morfismo $f : Y \to X$ notemos esta vez con $\phi : A^*(X) \to A^*(Y)$ el morfismo de anillos de Chow inducido por f. **No** es cierto que se pueda decir que, en general, el morfismo $f^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ haga conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^*(X) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & A^*(Y) \arrow[d] \\ H^*(X) \arrow[r, "f^*"'] & H^*(Y) \end{tikzcd}$$

Donde las flechas verticales vendrían a ser el cociente de $A^*(X)$ por la equivalencia homológica.
Es decir que, en general, no tenemos una transformación natural $T : A^* \to H^*$ de teorías de intersección que haga que todas las identidades entre flechas de anillos de Chow valgan para flechas de anillos de cohomología.
Sin embargo sería muy beneficioso poder sacar conclusiones de ese estilo ya que usualmente en teoría de intersección o cohomología hay proposiciones que se demuestran más fácil (mejor dicho: más naturalmente) utilizando algunos funtores antes que otros. Un caso paradigmático de esto es la demostración del teorema Riemann-Roch-Grothendieck en donde

se prueban propiedades de las clases de Chow de una variedad usando, la mayor parte del tiempo, propiedades del anillo $K(X)$ (la K-teoría de la variedad X) que se traducen bien a propiedades de $A^*(X)$.

En [SGA6, Exposeé XIV, parte 4] Grothendieck esquematiza la situación que describimos y remarca la potencial utilidad que podrían tener fórmulas como las del segundo ejemplo aplicadas a grupos de cohomología.

Es notable que de una manera tan sencilla Manin haya dado respuesta a una pregunta que es en realidad bastante importante.

Lo que se usó Manin para demostrar este caso en particular es básicamente que, si bien no tenemos un funtor $T : A^* \to H^*$, sí podemos definir un funtor

$$\mathcal{C}_{A^*}(\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k) \to H^*$$

Donde, a cada correspondencia $\alpha \in A^*(X \times Y)$ le asignamos su clase de cohomología en $H^*(X \times Y)$ y, a su vez a esta clase de cohomología le asignamos su morfismo $H^*(X) \to H^*(Y)$ asociado. En este marco teórico, el principio de identidad no es más que un tecnicismo, lo sustancial es el carácter universal que tiene la categoría de correspondencias de Chow.

El problema que tiene la categoría $\mathcal{C}_I(\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k)$ de correspondencias es que, si bien tiene propiedades interesantes, no tiene una estructura lo suficientemente algebraica como para poder sacar algunas conclusiones profundas, es decir: hay muchas cosas acerca de teoría de intersección y cohomología que ni siquiera podemos decir con el lenguaje de las correspondencias, por ejemplo no sabemos todavía que significa el núcleo o la imagen de una correspondencia, tampoco tenemos idea del formalismo de descomposiciones en sumas directas en la categoría de correspondencias. Por eso va a ser útil enriquecer a $\mathcal{C}_I(\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k)$ formalmente sin quitarle las propiedades interesantes, en esto va a consistir la construcción de la categoría de motivos que vamos a definir a continuación:

6. Motivos

A partir de esta sección vamos a trabajar exclusivamente con teorías de intersección graduadas, es decir teorías de intersección que, además de cumplir con los axiomas de la sección 2 cumplan con que los funtores de la teoría tomen valores en la categoría de anillos graduados y que se verifiquen los siguientes axiomas:

Axioma 6.0.38. Si X es una variedad de dimensión n Los Grupos $I^p(X)$ son triviales para $p > n$ y $p < 0$

Axioma 6.0.39. Para todo morfismo $f : X \to Y$ el morfismo f^* de anillos es homogéneo de grado cero

Axioma 6.0.40. Si X e Y son variedades irreducibles de dimensión n y m respectivamente, entonces para cualquier morfismo $f : X \to Y$ el morfismo f_* es homogéneo de grado $m - n$

En particular si $\iota : Y \to X$ es la inmersión cerrada de una variedad de codimensión d, ι_* es un morfismo de grado d y $[Y] = \iota_*(1_y) \in I^d(X)$

Axioma 6.0.41. El morfismo $I(X) \otimes_\Lambda I(X) \to I(X \times X)$ es homogéneo de grado cero

Axioma 6.0.42. Para cualquier variedad irreducible X, el morfismo de aumentación $\epsilon : I(X) \to \Lambda$ es cero en todo $I^i(X)$ si $i \geq 1$ y es un isomorfismo entre $I^0(X)$ y Λ

Como dijimos vamos a construir la categoría de motivos a partir de la de correspondencias, para esto primero vamos a definir el grado de una correspondencia.

Definición 6.0.43. Sean X e Y variedades, con X irreducible de dimensión n una correspondencia $\alpha : X \vdash Y$ es homogénea de grado i si $\alpha \in I^{i+n}(X \times Y)$

Notemos que el grado de una correspondencia bien puede ser negativo.
Veamos que esta definición de grado es compatible con la composición:

Lema 6.0.44. *El grado de la composición de dos correspondencias homogéneas α, β es la suma de los grados de α y β*

Demostración. Sea $n = \dim X$, $m = \dim Y$, $\alpha \in I^{i+n}(X \times Y)$ y $\beta \in I^{j+m}(Y \times Z)$ entonces por 6.0.39 tenemos que $p_{XY}^{XYZ*}(\alpha)p^*XYZ*_{YZ}(\beta) \in I^{i+j+m+n}(X \times Y \times Z)$ y, por 6.0.40

$$\beta \circ \alpha = p_{XZ*}^{XYZ}(p_{XY}^{XYZ*}(\alpha)p^*XYZ*_{YZ}(\beta)) \in I^{i+j+n}(X \times Y \times Z)$$

Lo que prueba el lema. $\square$

En particular, con la notación de la demostración del lema, si $\alpha = \Gamma_f$ su grado es cero y el grado de Γ'_f es $n - m$

6.1. Definición de la categoría de motivos

En esta parte vamos a trabajar de manera (aún) más formal que en las anteriores debido a que la modificación que vamos a hacerle a la categoría de correspondencias tiene que ser más bien superficial de manera de no alterar las propiedades fundamentales, particularmente queremos definir una categoría $\mathcal{M}$ con un funtor $h : \mathbb{P}\mathcal{V}ar \to \mathcal{M}$ y, que al igual que $\mathcal{C}_I(\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k)$, tenga una realización, es decir un funtor $\mathcal{M} \to \Lambda - alg$ que factorice al de la teoría de intersección I.
El objetivo ideal sería convertir a la categoría de I correspondencias en una categoría abeliana. Sin embargo no se conoce un procedimiento para hacer esto de manera que no se modifiquen las buenas propiedades de $\mathcal{C}_I(\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k)$. Por eso vamos a acercarnos lo más posible a esto y transformar a $\mathcal{C}_I(\mathbb{P}\mathcal{V}ar_k)$ en lo que se denomina una *categoría pseudo-abeliana.*

Sea $\mathcal{D}$ una categoría (Λ-)aditiva, es decir, una categoría con sumas directas finitas donde, para cualquier par de objetos X e Y, $\hom_{\mathcal{D}}(X, Y)$ tiene estructura de grupo abeliano (Λ-módulo) tal que la composición de morfismos es lineal. Entonces definimos:

Definición 6.1.1. (Categoría Pseudo-Abeliana) $\mathcal{D}$ se dice *pseudo-abeliana* si para todo objeto $X \in \mathcal{OBD}$ y para todo $p \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(X)$ tal que $p \circ p = p$ (es decir para todo proyector p) existe $\ker p$, el núcleo de p y el morfismo canónico $\ker p \oplus \ker(id - p) \to X$ es un isomorfismo

Recordemos que en una categoría aditiva abeliana **Todos** los morfismos, por definición, tienen núcleo y conucleo y todo morfismo puede ser factorizado como un epimorfismo seguido por un monomorfismo. Las categorías pseudo-abelianas están, a priori, bastante lejos de ser abelianas, sin embargo este concepto tiene la ventaja de que se puede definir la *clausura pseudo-abeliana* de una categoría aditiva que tiene las propiedades esperables de una clausura y se define de una manera muy sencilla:

Definición 6.1.2. (Clausura pseudo-abeliana) Sea $\mathcal{D}$ una categoría aditiva. Su *clausura pseudo-abeliana* (o *completación pseudo-abeliana*) es la categoría $\widetilde{\mathcal{D}}$ definida por los siguientes datos:
Los objetos de $\widetilde{\mathcal{D}}$ son pares (X, p) donde X es un objeto de $\mathcal{D}$ y $p \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(X)$ es un proyector (i.e.: tal que $p^2 = p$) y se definen morfismos:

$$\hom_{\widetilde{\mathcal{D}}}((X,p),(Y,q)) = \{f \in \hom_{\mathcal{D}}(X,Y)\ tq:\ f \circ p = q \circ f\}/\{f\ tq:\ f \circ p = q \circ f = 0\}$$

Notación 6.1.3. Los objetos de $\widetilde{\mathcal{D}}$, además de escribirlos como (X, p) también vamos a notarlos como pX ó $p(X)$, sugiriendo así que el papel de (X, p) es el de imagen del proyector p.

Observación 6.1.4. El grupo $\hom_{\widetilde{\mathcal{D}}}((X, p), (Y, q))$ es isomorfo al subgrupo de $\hom_{\widetilde{\mathcal{D}}}((X, p), (Y, q))$ constituido por elementos de la forma $q \circ f \circ p$. Esto se ve porque la proyección al cociente

$$\pi : \{f \in \hom_{\mathcal{D}}(X,Y)\ tq:\ f \circ p = q \circ f\} \longrightarrow \hom_{\widetilde{\mathcal{D}}}((X,p),(Y,q))$$

Es biyectiva si se la restringe al subrgupo de los $\{g = q \circ f \circ p\ tq:\ f \in \hom_{\mathcal{D}}(X, Y)\}$.
Esta observación va a ahorrarnos muchos renglones de cuentas.
Hay que observar que en (X, p) el papel de identidad lo juega la misma proyección p.

El nombre de $\widetilde{\mathcal{D}}$ se justifica por lo siguiente:

Proposición 6.1.5. *1. La categoría $\tilde{\mathcal{D}}$ es pseudo-abeliana*

2. El funtor (plenamente fiel) $\mathfrak{h}$ definido por $X \mapsto (X, id_x)$, $f \mapsto f$ tiene la siguiente propiedad universal:
Dado un funtor aditivo $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es una categoría pseudo-abeliana, existe un único funtor aditivo $\tilde{F}$ tal que F y $\tilde{F}\mathfrak{h}$ son equivalentes

Demostración. Primero tenemos que probar que dada una proyección $pX \xrightarrow{pfp} pX$ existe un objeto $(\ker(pfp))$ y una flecha $\ker(pfp) \to pX$ tal que para cualquier morfismo $qZ \xrightarrow{pgq} pX$ tal que $pfpgq = 0$ existe un morfismo $\phi : qZ \to \ker(pfp)$ que factoriza a pgq a través de $\ker(pfp)$. Para esto definimos $\ker(pfp) = (X, p - pfp)$ y vemos que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & (X, p-pfp) \arrow[d, "p-pfp"] & \\
qZ \arrow[ur, "pgq"] \arrow[r, "pgq"'] & pX \arrow[r, "pfp"'] & pX
\end{tikzcd}$$

Como $pfp \circ pgq = 0$ vemos que el diagrama conmuta y es universal.
Por otra parte vale que el morfismo $(pfp, p - pfp) : pX \to (X, p) \oplus (X, p - pfp)$ es inversa del morfismo natural $(X, p) \oplus (X, p - pfp) \to pX$ con lo que $\widetilde{D}$ es una categoría pseudo-abeliana.

Por otra parte, si se tiene un funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ con $\mathcal{E}$ pseudo-abeliana Se puede extender a $\widetilde{F} : \widetilde{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}$ de la manera obvia:

$$\widetilde{F}((X, p)) = \ker(id_{F(X)} - F(p))$$

Donde a las flechas en el subgrupo $\hom_{\widetilde{\mathcal{D}}}((X, p), (Y, q))$ de $\hom_{\mathcal{D}}(X, Y)$ se les asigna la imagen que tienen por F (es decir a un $qfp \in \hom_{\widetilde{\mathcal{D}}}((X, p), (Y, q))$ se le asigna $F(qfp)$ visto como morfismo en $\hom_{\mathcal{E}}(\ker(id_{F(X)} - F(p)), \ker(id_{F(Y)} - F(q)))$. Por definición $\widetilde{F}$ factoriza a F. $\square$

En el siguiente lema vamos a ver que la categoría $\widetilde{\mathcal{D}}$ no tiene "objetos de más":

Lema 6.1.6. *Sean X, Y objetos en $\mathcal{D}$ tales que se tienen flechas $Y \xrightarrow{a} X \xrightarrow{a'} Y$ que cumplen $a' \circ a = id_Y$ (Es decir que a' tiene una sección). Entonces el morfismo $aa' : X \to X$ es un proyector y a, a' inducen isomorfismos recíprocos entre (Y, id_Y) y (X, aa') en $\widetilde{\mathcal{D}}$*

Demostración. La demostración consiste en verificar formalmente que aa' es un proyector y observar que aa' es la identidad de (X, aa') $\square$

Proposición 6.1.7. *Sea*

$$Y \xrightarrow{a} X \xrightarrow{b} Z \tag{6.1.1}$$

una sucesión de flechas de $\mathcal{D}$ tales que a tiene un inverso a derecha a' y para todo objeto T la sucesión

$$0 \to \hom_{\widetilde{\mathcal{D}}}(T, Y) \xrightarrow{a\circ-} \hom_{\widetilde{\mathcal{D}}}(T, X) \xrightarrow{b\circ-} \hom_{\widetilde{\mathcal{D}}}(T, Z) \to 0 \tag{6.1.2}$$

es exacta. Entonces la sucesión 6.1.1 es exacta en $\widetilde{\mathcal{D}}$ y se escinde, es decir que es isomorfa a una sucesión del tipo:

$$Y \xrightarrow{(id_Y,0)} Y \otimes Z \xrightarrow{p_2} Z$$

Demostración. Por el lema anterior $X = (X, aa') \oplus (X, id_X - aa')$ y $Y \cong (X, aa')$ en $\widetilde{\mathcal{D}}$. Entonces basta probar que b induce un isomorfismo $b : (X, id_X - aa') \to Z$.
Por empezar, como $ba = 0$ entonces b induce un morfismo entre $(X, id_X - aa')$ y Z. Como 6.1.2 es exacta, si reemplazamos T por Z tenemos que, en $\hom(Z, X)$ existe alguna preimagen c' del morfismo identidad $id_Z \in \hom(Z, Z)$. Entonces escribimos $c = (id_X - aa')c'$.
Como $ba = 0$ y $bc' = id_Z$ entonces $bc = id_Z$ y $(id_X - aa')c = c$. Por lo tanto c puede verse como un morfismo entre Z y $(X, id_X - aa')$.
Ya vimos que $bc = id_Z$, nos resta ver que $cb = id_{(X, id_X - aa')}$. Esto es equivalente a ver que $(id_X - aa')cb = cb = (id_X - aa')$. Por la exactitud de la sucesión 6.1.2 tenemos, para $T = X$ que $(id_X - cb) = ad$ para algún $d \in \hom(X, Y)$. Componiendo a la izquierda por a' obtenemos $d = a'(id_X - cb)$, y por lo tanto $id_X - cb = aa'(id_X - cb) = aa'$ dado que $aa' = c$. Lo que termina la demostración □

Por último damos la definición de lo que vamos a llamar "categoría de motivos":

Definición 6.1.8. Sea I una teoría de intersección graduada, $\mathcal{C}_I(\mathbb{P}\mathcal{V}ar)$ su categoría de correspondencias y sea $\mathcal{C}_I^0(\mathbb{P}\mathcal{V}ar)$ la subcategoría de $\mathcal{C}_I(\mathbb{P}\mathcal{V}ar)$ cuyos morfismos consisten solamente de las correspondencias de grado 0. Entonces llamamos *Categoría de (I-)Motivos Efectivos* a la clausura pseudo-abeliana de $\mathcal{C}_I^0(\mathbb{P}\mathcal{V}ar)$. Sus objetos van a ser llamados *motivos* y vamos a notar a esta categoría como $\mathcal{M}_I^{eff}$.

Notación 6.1.9. Además de (X, p) y pX vamos a notar,$\mathfrak{h}(X) =_D ef(X, \Delta_X)$ y $p\mathfrak{h}(X) = (X, p)$ para que no haya dudas respecto de si nos referimos a una variedad o a su motivo

Observación 6.1.10. Al respetar composiciones, la operación de producto de correspondencias $\alpha_1 \otimes \alpha_2 = p^*_{X_1Y_1}\alpha_1 \cdot p^*_{X_2Y_2}\alpha_2$ determina en $\mathcal{M}_I^{eff}$ una operación de producto dado por

$$pX \otimes qY = (p \otimes q)(X \times Y)$$

Observación 6.1.11. Notemos también que, al ser la categoría de Λ-álgebras abeliana y, luego, pseudo-abeliana, sigue existiendo un funtor $\mathfrak{r} : \mathcal{M}_I^{eff} \to \Lambda - Mod$ que factoriza al funtor de I (es la extensión del funtor que a cada correspondencia α le asignaba el morfismo de Λ-módulos α_*). En particular hay funtores de la categoría $\mathcal{M}_{A^*}^{eff}$ de motivos de Chow que factorizan los funtores A^* y H^*.

La proposición 6.1.7 (cuya demostración es un ejemplo típico de álgebra homológica elemental) va a servirnos para aplicar el principio de identidad de Manin a la categoría de motivos de la siguiente manera:
Dada una sucesión $Y \xrightarrow{a} X \xrightarrow{b} Z$ en la categoría de correspondencias que cumpla lo pedido en 6.1.7, podemos utilizar el principio de identidad para verificar que la sucesión de funtores de Yoneda como la de 6.1.2 sea exacta. Entonces 6.1.7 nos va a dar la descomposición del motivo de X en suma de motivos que (esperamos) sean más sencillos de entender.

6.2. El motivo $\mathbb{L}$

Vamos a pasar a definir un motivo en particular que va a pasar a jugar el rol de *motivo de la racta afín* $\mathbb{A}^1$ que va a estar definido aún cuando estamos trabajando con variedades proyectivas y no tenemos a disposición, por razones técnicas, a la recta afín entre nuestras variedades.

Sea I una teoría de intersección graduada. Una variedad X definida sobre el cuerpo k se llama I-especial si es conexa, el conjunto de k puntos es no vacío[4] y para todo morfismo $\phi : e = Spec\ k \to X$ la clase de $\phi_*(e)$ no depende de ϕ, es decir si $[x] = [y] \in I(X)$ para cualesquiera dos puntos x e y que sean k-racionales en X.

Por ejemplo: si $I = A^*$ es la teoría de Chow las variedades $\mathbb{P}^n$ son A^*-especiales. Si $I = N^*$ el anillo de ciclos módulo equivalencia numérica entonces todas las variedades conexas son N^*-especiales.

Definición 6.2.1. Sea X una variedad I-especial, y sea entonces $e_X = [x]$ la clase de cualquier punto de X (es única porque X es I-especial) definimos los proyectores p_0^X, p_n^X como:

$$p_0^X = e_X \times 1_X \qquad p_n^X = 1_X \times e_X$$

El hecho de que estas correspondencias son efectivamente proyectores sale de que, si π_i es la proyección en el i-ésimo factor, $p_0^X = \pi_1^*(e_X) = \pi_1^*(\phi_*(1_x))$ y entonces uno puede aplicar 2.1.6 a la fórmula de la composición de correspondencias. La demostración de que p_n^X también es un proyector es completamente análoga.

Proposición 6.2.2. *El motivo (X, p_0^X) es isomorfo al motivo de e (el punto).*

El motivo (X, p_n^X) depende sólo de la dimensión de la variedad X. Más aún, en $\mathcal{M}_I^{eff}$ se tiene

$$\hom((X, p_n^X), (Y, p_n^Y)) = \begin{cases} \Lambda & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}$$

(donde el signo = quiere decir "canónicamente isomorfa a")

Demostración. Sean $\phi : e \to X$ un k-punto y $\psi : X \to e$ el morfismo estructural. Entonces, por 5.0.34

$$\Gamma'_\phi \circ p_0^X = (id_X \times \phi)^*(p_0^X) = (id_X \times \phi)^*(\pi_1^*(e_X)) = \phi^*(e_X) = \Gamma'_\phi$$

Y similarmente $p_0^X \circ \Gamma'_\psi = \Gamma'_\psi$. Entonces Γ'_ϕ y Γ'_ψ definen morfismos de motivos entre e y (X, p_0^X). Más aún, por la funtorialidad de la aplicación $f \mapsto \Gamma_f$ se tiene $\Gamma'_\phi \circ \Gamma'_\psi = \Gamma_i d'_e$ y $\Gamma'_\psi \circ \Gamma'_\phi = \Gamma'_{\phi\circ\psi} = p_0^X$.
Es decir que Γ'_ϕ y Γ'_ψ son isomorfismos inversos el uno del otro.

Por otra parte, para calcular $\hom((X, p_n^X), (Y, p_n^Y))$ vamos a tomar una correspondencia cualquiera que induzca un morfismo en $\hom((X, p_n^X), (Y, p_n^Y))$, es decir una correspondencia

[4] en nuestro caso podemos considerar variedades definidas sobre la clausura algebraica de $\mathbb{F}_q$ con lo que esta condición se cumple siempre

$f \in I^n(X \times Y)$ tal que $p_m^Y \circ f = f \circ p_n^X$ entonces tenemos:(notando $\pi_i j$ a la proyección en el producto cartesiano de los factores i y j)

$$\begin{gathered}p_m^Y \circ f = \pi_{13*}((f \times 1_Y) \cdot (1_X \times 1_Y \times e_Y)) = \\ \pi_{13*}(\pi_{12}^{XYY*}(f) \cdot (1_X \times 1_Y \times e_Y)) = \\ \pi_{13*}(\pi_{12}^*(f) \cdot \pi_{13}^*(1_X \times 1_e)) = \\ 1_X \times 1_e \cdot \pi_{13*}(\pi_{12}^*(f)) = \\ 1_X \times 1_e \cdot \pi_{12}^*(\pi_{1*}(f)) = \pi_{1*}(f) \times e_Y\end{gathered}$$

Y, por otra parte,

$$f \circ p_n^X = \pi_{13*}((1_X \times e_X \times 1_Y) \cdot (1_X \times f)) = \pi_{13*}(1_X \times ((e_X \times 1_Y) \cdot f))$$

Por el axioma 6.0.40, $p_{1*}(f) \in I^{n-m}(X)$ y $(e_x \times 1_Y) \cdot f \in I^{2n}(X \times Y)$ Luego, si $m > n$ tenemos que $p_m^Y \circ f = 0$ para toda f, y si $n > m$ $f \circ p_n^X = 0$ para todo f.
Si $n = m$ definimos $\deg f = \epsilon(\pi_{1*}(f)) \in \Lambda$. Como $\pi_{1*}(f) \in I^0(X \times Y)$ y $p_m^Y \circ f = \pi_{1*} \times e_Y$ entonces $\deg f$ es un monomorfismo de $\hom((X, p_n^X), (Y, p_n^Y))$ a Λ. Más aún deg es también un epimorfismo ya que $f = 1_X \times e_Y$ induce un morfismo de motivos tal que $\deg 1_X \times e_Y = 1$. Finalmente $f = e_X \times 1_Y$ y $g = e_Y \times 1_X$ inducen isomorfismos recíprocos porque $f = \Gamma'_\chi$ donde $\chi(y) = x_\chi \ \forall\ y \in Y$ es un morfismo constante de Y en X lo mismo pasa con g, entonces, por la funtorialidad de $f \mapsto \Gamma'_f$, $g \circ f = e_X \times 1_X$ y $f \circ g = e_Y \times 1_Y$. Lo que prueba la proposición. □

Ahora podemos hacer la siguiente definición:

Proposición 6.2.3. *Llamamos Motivo de Lefschetz a* $\mathbb{L} = (\mathbb{P}^1, p_1^{\mathbb{P}^1})$

Notemos que, como observamos en la sección 2,el anillo $I(\mathbb{P}^1)$ tiene que ser igual, por los axiomas 2.1.9 y 2.1.10 a $\Lambda[x] \big/ (x^2)$ siempre y cuando cumpla que la clase de un hiperplano $[H]$ elevado a la i-ésima potencia sea $[H]^i = [P_i]$ la clase de una variedad lineal de codimensión i. Luego, dadas estas condiciones, el anillo $I(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ tiene que ser igual a $I(\mathbb{P}^1)[x] \big/ (x^2) \cong \Lambda[x, y] \big/ (x^2) + (y^2)$, donde $x = e \times 1_{\mathbb{P}^1}$ e $y = 1_{\mathbb{P}^1} \times e$. La clase de la diagonal Δ tiene que ser el único elemento de $I(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ que tiene $\epsilon(x \cdot \Delta) = \epsilon(\Delta \cdot y) = 1$, o sea $x + y$. Por lo tanto $\mathfrak{h}(\mathbb{P}^1)$,el motivo de $\mathbb{P}^1$, es isomorfo a $(\mathbb{P}^1, x) \oplus (\mathbb{P}^1, y) = \mathbb{L} \oplus e$

Lema 6.2.4. *Si vale que* $\mathfrak{h}(\mathbb{P}^1) = (\mathbb{P}^1, \Delta) = \mathbb{L} \oplus e$ *entonces* $(X, p_n^X) = \mathbb{L}^n (= (L)^{\oplus n})$

Demostración. Sea $Y = \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ (n veces). Entonces, por la proposición anterior $(X, p_n^X) = (Y, p_n^Y)$. Por otra parte, $\mathfrak{h}(Y) = (\mathbb{P}^1)^{\otimes n} = \oplus_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbb{L}^{\otimes i}$ (Donde notamos $\mathbb{L}^0 = e$). Como $p_n^Y = (p_1^{\mathbb{P}^1})^{\otimes n}$ entonces $p_n^Y Y = \mathbb{L}^n$ □

Proposición 6.2.5. *Sea I una teoría de intersección determinada por una equivalencia adecuada de ciclos, en particular vale* $I(\mathbb{P}^n) = \Lambda[x] \big/ (x^{n+1})$*. Más aún, vale que*

$$\mathbb{P}^\mathfrak{n} = (\mathbb{P}^n, \Delta) = e \oplus \mathbb{L} \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}^n$$

Demostración. sean las correspondencias $p_i = x^{n-i} \times x^i$ entonces

$$p_i \circ p_i = \pi_{13*}((x^{n-i} \times x^i \times 1_{\mathbb{P}^1}) \cdot (1_{\mathbb{P}^1} \times x^{n-i} \times x^i)) = \pi_{13*}(x^{n-i} \times x^n \times x^i) = x^{n-i} \times x^i$$

Por otra parte, como la proyección π_{13*} es de grado $(-n)$ tenemos que $p_i \circ p_j = \pi_{13*}(x^{n-i} \times x^{n+i-j} \times x^j) = 0$ si $i \neq j$ así que los p_i son proyectores ortogonales, por el principio de identidad 5.0.35 vemos que como $(\sum_{i=0}^{n} p_i)_* = id_{\mathbb{P}^n}$ y, como $I(X \times \mathbb{P}^n) = I(X) \otimes_\Lambda I(\mathbb{P}^n)$ la identidad $(\sum_{i=0}^{n} p_i)_* = \Delta_{\mathbb{P}^n}$ vale a nivel correspondencias. Luego $\mathbb{P}^n$ se descompone como suma directa de la forma $\mathbb{P}^{\mathrm{n}} = \bigoplus_{i=0}^{n} (\mathbb{P}^n, p_i)$. Hay que observar que $p_0 = p_0^{\mathbb{P}^n}$ y $p_n = p_n^{\mathbb{P}^n}$ de manera que esos dos sumandos son isomorfos a e y $\mathbb{L}^n$. Para terminar la demostración hay que ver que, si $\iota : \mathbb{P}^i \to \mathbb{P}^n$ es una inmersión de espacios proyectivos, entonces, por 5.0.34 y por 2.1.3

$$\Gamma'_\iota \circ p_i = (id_{\mathbb{P}^n} \times \iota)^*(p_i) = x^{n-i} \times \iota^* x^i = x^{n-i} \times [e]$$

Y, similarmente,

$$p_i^{\mathbb{P}^i} \circ \Gamma'_\iota = \iota_* 1_{\mathbb{P}^i} \times [e] = x^{n-i} \times [e]$$

Si se toma la correspondencia $\Theta = 1_{\mathbb{P}^i} \times x^i \in \hom_{\mathcal{M}}(\mathbb{L}^i, (\mathbb{P}^n, p_i))$ se calcula directamente que

$$p_i \circ \Gamma'_\iota \circ \Theta = p_i \qquad \Theta \circ \Gamma'_\iota \circ p_i^{\mathbb{P}^i} = p_i^{\mathbb{P}^i}$$

Con lo que Γ'_ι determina un isomorfismo entre $(\mathbb{P}^n, p_i) \cong (\mathbb{P}^i, p_i^{\mathbb{P}^i}) \cong \mathbb{L}^i$. □

Vemos así que el motivo de Lefschetz cumple, de alguna manera, la función de representar las celdas afines en las descomposiciones de motivos.
La noción de lo que una 'celda'debería significar en geometría algebraica está, sin embargo, muy lejos de ser aclarada con el motivo de Lefschetz. El inconveniente es que no tenemos en Geometría Algebraica una noción de *modelo local* como la que existe para variedades topológicas o variedades diferenciales donde alrededor de todo punto existe un abierto isomorfo a una bola afín. La existencia de tales modelos locales tiene la ventaja de que se permiten calcular la cohomología de las variedades topológicas a través del dato combinatorio de cómo se intersecan (ver [18]). En el caso de la Geometría Algebraica sólo podemos hacer esto rudimentariamente (para variedades con descomposición celular, por ejemplo).
Una teoría que diera alguna analogía más amplia entre el fenómeno combinatorio en topología algebraica y la cohomología de variedades algebraicas tendría una fuerte interacción con la teoría de motivos (en [13], por ejemplo, Manin habla de una hipotética teoría de variedades definidas sobre "$\mathbb{F}_1$: el cuerpo de característica 1 " y de la posible relación entre esta y la también hipotética teoría de motivos)

6.3. Twist de Tate

Puede parecer, en una primera impresión, que al considerar sólo correspondencias de grado cero en la definición de motivos estamos ignorando los aportes esenciales que correspondencias de grados distintos de cero puedan hacer. En realidad tomamos las correspondencias de grado cero para NO perder el dato de la graduación de la teoría, estamos destacando que como morfismos tomamos los que respetan el grado. Los morfismos que no respetan el grado siguen estando ahí, si consideramos la siguiente heurística:

Supongamos por un momento que también podemos definir, sin problemas y de manera similar a como definimos los motivos de variedades proyectivas regulares, al motivo de

$\mathbb{A}^1$, la recta afín. Entonces, para dos variedades X e Y proyectivas y regulares, los morfismos entre los motivos de las variedades $X \times \mathbb{A}^1$ y Y estarían dados por correspondencias $\alpha \in I^{\dim(X\times\mathbb{A}^1)}(X \times \mathbb{A}^1 \times Y) = I^{\dim X+1}(X \times \mathbb{A}^1 \times Y)$
Pero, por el axioma de homotopía, la proyección $X\times\mathbb{A}^1\times Y \to X\times Y$ induce un isomorfismo $I^{\dim X+1}(X \times \mathbb{A}^1 \times Y) \cong I^{\dim X+1}(X \times Y)$ siendo este último el grupo de correspondencias de grado 1 entre X e Y.

La realidad es que, si bien no definimos el motivo de $\mathbb{A}^1$, tenemos un buen análogo de él en el motivo de Lefschetz y podemos esperar que multiplicar por $\mathbb{L}$ nos de la misma información sobre las correspondencias de grados no nulos. Vamos a definir entonces el concepto de *twisting*, que no es nada más que multiplicar por $\mathbb{L}$, y ver algunas de sus propiedades:

Definición 6.3.1. Definimos la categoría $\mathcal{M}_I$ como la categoría donde los objetos están formados por tripletes (X, p, r) donde X es una variedad p es una correspondencia idempotente (o sea que (X, p) definen un motivo) y $r \in \mathbb{Z}$ es un número entero. Las flechas se definen por:

$$\hom_{\mathcal{M}_I}((X, p, r), (Y, q, r')) = \{q \circ \alpha \circ p \ tq : \ \alpha \in I^{\dim X-r+r'}(X \times Y)\}$$

En particular la asignación $(X, p) \mapsto (X, p, 0)$ define un funtor plenamente fiel entre $\mathcal{M}_I^{eff}$ y $\mathcal{M}_I$. A los tripletes (X, p, r), los vamos a llamar r-ésimo twist del motivo (X, p)

Notación 6.3.2. Los tripletes (X, p, r) van a ser notados también como $X(r)$, $pX(r)$ o $p\mathfrak{h}(X)(r)$

Ahora vamos a ver que estas definiciones se corresponden con la heurística que habíamos planteado:
Estando en el caso en el que $I(X)$ es el anillo de ciclos módulo una equivalencia adecuada tenemos que $I(\mathbb{P}^1) = \Lambda[x]/(x^2)$ y tenemos fórmulas geométricas para calcular f_* (recordar 2.1.20).

Proposición 6.3.3. *Sea e la variedad consistente en un punto. Si $I(X)$ es el anillo de ciclos módulo una equivalencia adecuada, entonces es válida la siguiente igualdad en $\mathcal{M}_I$:*

$$e(-1) \cong \mathbb{L}$$

Demostración. Primero veamos que por definición $\hom(e(-1), \mathbb{L}) = \{p_1 \circ \alpha \ tq : \alpha \in I^{dim e+1}(e \times \mathbb{P}^1) = I^1(\mathbb{P}^1)\}$ y que $\hom(\mathbb{L}\ , e(-1)) = \{\beta \circ p_1 \ tq : \beta \in I^{dim\mathbb{P}^1-1}(\mathbb{P}^1 \times e) = I^0(\mathbb{P}^1)\}$ Ahora tomamos los ciclos más obvios que se nos puedan ocurrir: notando como $x \in I(\mathbb{P}^1)$ la clase de un punto escribimos $\alpha = 1_e \times x \in I(e \times \mathbb{P}^1)$ entonces

$$f = p_1 \circ \alpha = \pi_{13*}(\pi_{12}^*(1_e \times x)\pi_{13}^*(1_{\mathbb{P}^1} \times x)) = \pi_{13*}(1_e \times x \times x) = 1_e \times x$$

En la última igualdad usamos la fórmula para f_* en el caso de una equivalencia adecuada, es decir $\pi_{13*}(1_e \times x \times x)$ es la clase de $[\pi_{13}(e, x, x)]$ multiplicado por el grado del ciclo sobre su imagen, en este caso 1 (cualquier duda, recordar 2.1.20 nuevamente). Similarmente se tiene que si $\beta = 1_{\mathbb{P}^1\times e}$ entonces $g = \beta \circ p_1 = 1_{\mathbb{P}^1\times e}$.
Por último se verifica de la misma manera que $f \circ g = 1_e = \Delta_{e\times e} = id_{e(-1)}$ y $g \circ f = p_1$ $\square$

El motivo $e(1)$ es llamado generalmente *Motivo de Tate* a veces es notado con una $\mathbb{T}$, cuando el anillo de coeficientes Λ de la teoría de intersección es el de números racionales a veces se lo nota también $\mathbb{Q}(1)$, otras veces se lo escribe como $\mathbb{L}^{-1}$. El nombre se debe a que está estrechamente relacionado a la llamada *conjetura de Tate*, una conjetura de geometría aritmética acerca de la acción del grupo de Galois absoluto de un cuerpo k sobre los grupos de cohomología etal de las variedades sobre k , desafortunadamente no estamos en condiciones de enunciar correctamente la conjetura aquí.

Definición 6.3.4. Definimos en $\mathcal{M}_I$ un producto de la siguiente manera:
Sean X e Y variedades, p y q correspondencias que son proyectores y r, r' números enteros:

$$(X, p, r) \otimes (Y, q, r') = (X \times Y, p \otimes q, r + r')$$

Reemplazando $r = r' = 0$ en la definición vemos que el producto en $\mathcal{M}_I$ extiende a aquel de $\mathcal{M}_I^{eff}$. Por otra parte el isomorfismo canónico entre $X \times e$ y X da un isomorfismo canónico entre $p\mathfrak{h}(X) \otimes e(r)$ y $p\mathfrak{h}(X)(r)$. Como $e(-1) \cong \mathbb{L}$ entonces tenemos que si $r > 0$, $p\mathfrak{h}(X)(-r) \cong p\mathfrak{h}(X) \otimes \mathbb{L}^r$. Con lo que la heurística del principio de la sección queda confirmada.

Observemos que la categoría $\mathcal{M}_I$ también es pseudo-abeliana y es, de hecho, la completación pseudo-abeliana de la subcategoría formada por los objetos de tipo (X, Δ_X, r)

Observación 6.3.5. Es notable cómo permanentemente a lo largo de la matemática vemos que no es tanto la técnica sino el lenguaje correcto para pensar en ciertos temas lo que nos proporciona un enfoque más simple y profundo. Podrían citarse muchos grandes hitos de la historia de la matemática sobre conceptos hoy fundamentales y cómo estos permitieron el avance del estado del pensamiento matemático.

Pero también es muy cierto que incluso en las observaciones más insulsas puede estar el origen de la simplificación fundamental de ciertos conceptos. Este caso es uno de ellos. En el paper original de Manin ([12]) se definen los morfismos entre motivos como los definimos nosotros, como un cociente del grupo de correspondencias de grado cero. Manin no advirtió que este grupo cociente era isomorfo a un subgrupo del grupo de correspondencias (es decir que los morfismos de motivos pueden escribirse de la forma $p \circ \alpha \circ q$). Esto dificulta la definición del Twist de un motivo. A partir de esta parte se toma un trabajo extra en demostrar identidades entre motivos torcidos. La observación trivial que hicimos acerca de la forma del grupo de morfismos entre dos motivos aparece en el libro de André [1], esto hace que todas las demostraciones sean más sencillas.

Para ilustrar la observación anterior voy a escribir la demostración de un lema que aparece en [12] que con nuestro lenguaje es inmediata, pero sin él es un poco más trabajosa.

Lema 6.3.6. *Sean dos motivos efectivos U, $V \in \mathcal{M}_I^{eff}$ entonces el morfismo de grupos:*

$$\hom(U, V) \to \hom(U \otimes \mathbb{L}^i, V \otimes \mathbb{L}^i) : f \mapsto f \otimes id_{\mathbb{L}^i} = f(i)$$

Es un isomorfismo para todo $i > 0$ y es compatible con las composiciones y vales que $f(i)(j) = f(i + j)$

Demostración. El hecho de que $(f \circ g)(i) = f(i) \circ g(i)$ se desprende de la compatibilidad del producto tensorial de motivos con la composición. Y el hecho de que $f(i)(j) = f(i+j)$

sale de que $\mathbb{L}^i \otimes \mathbb{L}^j = \mathbb{L}^{i+j}$. Notemos que si probamos el lema para $U = \mathfrak{h}(X)$ y $V = \mathfrak{h}(Y)$ entonces (como $\hom(p\mathfrak{h}(X), q\mathfrak{h}(Y)) = q \circ \hom(\mathfrak{h}(X), \mathfrak{h}(Y)) \circ p$ para proyectores p y q cualesquiera) habremos probado el lema para todos los motivos en general.
Como $f(i)(j) = f(i+j)$ entonces basta probar el lema para $i = 1$ en este caso tenemos que

$$\mathfrak{h}(X) \otimes \mathbb{L} = (X \times \mathbb{P}^1, id_X \otimes p_1^{\mathbb{P}^1}) \qquad \mathfrak{h}(Y) \otimes \mathbb{L} = (Y \times \mathbb{P}^1, id_Y \otimes p_1^{\mathbb{P}^1})$$

Primero vamos a probar que, si $f(1) = 0$ entonces $f = 0$ (i.e.: la aplicación es inyectiva).
El morfismo $f(1)$ es inducido por la correspondencia $f \otimes id_{\mathbb{P}^1}$ y es cero si vale

$$0 = (f \otimes id_{\mathbb{P}^1}) \circ (id_X \otimes p_1^{\mathbb{P}^1}) = f \otimes p_1^{\mathbb{P}^1}$$

Por la definición de $p_1^{\mathbb{P}^1}$ y como $I(X \times Y \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ es un $I(X \times Y)$-módulo libre sigue que si $0 = f \otimes p_1^{\mathbb{P}^1} \in I(X \times Y \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ entonces $f = 0$.

Ahora probemos que la aplicación es suryectiva: Recordemos que, además de saber que $I(X \times Y \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ es un $I(X \times Y)$-módulo libre sabemos que es igual a $I(X \times Y)[x, y]/(x^2, y^2)$ donde

$$x = 1_{X \times Y} \times 1_{\mathbb{P}^1} \times e = 1_{X \times Y} \times p_0^{\mathbb{P}^1} \qquad y = 1_{X \times Y} \times e \times 1_{\mathbb{P}^1} = 1_{X \times Y} \times p_1^{\mathbb{P}^1}$$

con lo que tenemos generadores de $I(X \times Y \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ sobre $I(X \times Y)$.
Los morfismos en $\hom(X \otimes \mathbb{L}, Y \otimes \mathbb{L})$ son de la forma

$$(\Delta_Y \otimes p_1^{\mathbb{P}^1}) \circ \alpha \circ (\Delta_X \otimes p_1^{\mathbb{P}^1})$$

con α una correspondencia en $I(X \times Y \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$
Entonces, como α es combinación Λ-lineal de $f_1 \otimes 1_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$, $f_2 \otimes p_1^{\mathbb{P}^1}$, $f_3 \otimes p_0^{\mathbb{P}^1}$ y $f_4 \otimes (p_1^{\mathbb{P}^1} \cdot p_0^{\mathbb{P}^1})$ y se tiene que

$$1_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} \circ p_1^{\mathbb{P}^1} = p_1^{\mathbb{P}^1} \qquad (p_1^{\mathbb{P}^1} \cdot p_0^{\mathbb{P}^1}) \circ p_1^{\mathbb{P}^1} = 0$$

Se puede deducir que todo elemento de $\hom(X \otimes \mathbb{L}, Y \otimes \mathbb{L})$ es de la forma $f \otimes p_1^{\mathbb{P}^1}$ $\square$

7. El motivo de un Fibrado vectorial y de un Blow-up

7.1. Fibrados vectoriales

En esta parte volvemos parcialmente a los términos de la sección 2 para referirnos a la teoría de intersección de los fibrados vectoriales. El mismo principio de reducción en "celdas"sencillas y la utilización de los axiomas de exactitud y homotopía que nos llevaron a determinar el anillo $I(\mathbb{P}^n)$ nos van a dar la pauta de la estructura del anillo de un fibrado proyectivo $P(\mathcal{E}) \to X$ vamos a ver que podemos dar generadores de $I(P(\mathcal{E}))$ considerado como $I(X)$-módulo. Para las definiciones de fibrado vectorial, fibrado proyectivo y sus principales características geométricas referimos a [8] o al apéndice B de [5].

Primero tenemos que abordar el tema principal de la teoría de intersección de fibrados vectoriales. Esto es la definición de clases de Chern. Para esto vamos a utilizar el enfoque axiomático de [6] y [7]
Las clases de Chern son los representantes canónicos de los fibrados vectoriales en las teorías de intersección, más precisamente:
Supongamos que I es una teoría de intersección **graduada** con la propiedad de que para toda variedad X existe un morfismo de grupos $cl : Pic(X) \to I^1(X)$ que es funtorial (es decir que si $L \in Pic(X)$ es un fibrado en rectas y $f : Y \to X$ entonces $cl(f^*L) = f^*(cl(L))$ donde el primer f^* es pull-back de fibrados y el segundo es el morfismo de anillos $I(f)$). Y que cumpla lo siguiente:

Axioma 7.1.1. (Compatibilidad con divisores de ceros de un line bundle) Sea L un line bundle sobre X y s una sección regular (global) de L y sea Y el divisor de ceros de s (ver [5, Capítulo 2.2]), entonces, en $I(X)$ vale $[Y] = cl(L)$

Todas las teorías que vimos acá tienen esta propiedad, de hecho para el anillo de Chow de variedades regulares el morfismo de grupos cl es un isomorfismo.
Si E es un fibrado vectorial sobre X y $\mathbb{P}(E)$ es el fibrado proyectivizado de E, recordamos que E tiene una estructura natural de line bundle sobre $\mathbb{P}(E)$, esto es muy esperable si se piensa que si X consta de un punto entonces E es un espacio vectorial n-dimensional y $\mathbb{P}(E)$ es el espacio proyectivo $n-1$-dimensional entonces E tiene estructura natural de line bundle sobre $\mathbb{P}(E)$. Notemos con L_E el fibrado en rectas inducido por E sobre $\mathbb{P}(E)$, entonces escribimos

$$\xi_E = cl(L_E) \in I^1(P(E))$$

Notemos que, si $E \to X$ es un fibrado vectorial, $f : Y \to X$ un morfismo y E' el fibrado sobre Y inducido por el pull-back por f. Entonces $\mathbb{P}(E')$ es canónicamente isomorfo al pull-back de $\mathbb{P}(E)$ y, por lo tanto tenemos que $\xi_{E'} = f^*(\xi_E)$.

Proposición 7.1.2. *Sea X una variedad no singular, E un fibrado vectorial de rango p sobre X, f el morfismo de proyección $\mathbb{P}(E) \to X$. Si consideramos a $I(\mathbb{P}(E))$ como un $I(X)$-módulo (a través del morfismo $f^* : I(X) \to I(\mathbb{P}(E))$) tenemos que las clases $(\xi_E)^i$ $(0 \leq i \leq p-1)$ son linealmente independientes sobre $I(X)$ y además se tiene*

$$f_*(\xi_E^i) = 0 \quad (0 \leq i \leq p-2) \qquad f_*(\xi_E^{p-1}) = 1_X$$

Demostración. Que $f_*(\xi_E^i) = 0 \quad (0 \leq i \leq p-2)$ sale por cuestiones de grado, ya que f_* es homogénea de grado $-(p-1)$ y $\xi_E^i \in I^i(\mathbb{P}(E))$. Para probar la segunda de las ecuaciones, como $x = f_*(\xi_E^{p-1})$ es de grado cero, y $I^0(X) \cong \Lambda$, basta ver que el morfismo de aumentación cumple $\epsilon(x) = 1$.
Tomamos U un abierto donde E se trivialice $\iota : U \to X$ la inmersión, $E' = \iota^{-1}(E) = E|_U$, $j : \mathbb{P}(E') \to \mathbb{P}(E)$ la inmersión de los espacios fibrados y $f' : \mathbb{P}(E') \to U$ la proyección. Entonces tenemos, por 2.1.6, que

$$\iota^*(f^*(\xi_E^{p-1})) = f'_*(j^*(\xi_E^{p-1})) = f'_*(j^*(\xi_E)^{p-1}) = f'_*(\xi_{E'}^{p-1})$$

Como $\epsilon(i^*(x)) = \epsilon(x)$ por ser morfismo de aumentación la ecuación anterior nos reduce al caso de un fibrado trivial $E = X \times \mathbb{A}^p$. En este caso $\mathbb{P}(E) = X \times \mathbb{P}^{p-1}$ y $\xi_E = 1_X \times cl(L_p)$ donde L_p es el line bundle natural de $\mathbb{P}^{p-1}$ (es en otras palabras $\mathcal{O}(-1)$ ver [8]). Por otra parte, por el axioma 7.1.1 se tiene que $cl(L_p) = [H]$ la clase de un hiperplano cualquiera, por lo tanto ξ_E^{p-1} es $1_X \times [e]$ y, luego

$$f_*((\xi_E)^{p-1}) = \pi_{1*}((\xi_E)^{p-1}) = \pi_{1*}(1_X \times [e]) = 1$$

En particular, si hubieran $a_1, \ldots, a_{p-1} \in I(X)$ tales que $\sum_i f^* a_i \xi_E^i = 0$, podemos denotar con j el mayor índice tal que $a_j \neq 0$, multiplicando la suma por ξ^{p-1-j} podemos suponer que $x_{p-1} \neq 0$ y aplicando f_* tendríamos, por la fórmula de proyección 2.1.8 que

$$0 = f_*(\sum_i f^* a_i \xi_E^i) = \sum_i a_i f_* \xi_E^i = x_i$$

lo que es absurdo, por lo tanto los ξ^i son linealmente independientes. □

Ahora vamos a aplicar técnicas de reducción a subvariedades más sencillas, utilizando 2.1.10 y 2.1.9 para ver que las clases fundamentales $\xi_E^i \quad 0 \leq i \leq p-1$ generan $I(\mathbb{P}(E))$ como $I(X)$-módulo.

Proposición 7.1.3. *Sea X una variedad proyectiva regular y E una variedad regular tal que existe un morfismo playo $f : E \to X$. Sea $S \subseteq I(E)$, supongamos que para todo conjunto localmente cerrado (intersección de un cerrado y un abierto) irreducible no singular Y uno tiene que, para todo $x \in I(f^{-1}(Y))$ se puede encontrar un abierto no vacío $U \hookrightarrow Y$ tal que si $i : f^{-1}(U) \to E$, entonces $x|_{f-1(U)} = i^*(x)$ pertenece al $I(U)$-módulo generado por $i^*(S)$. Bajo estas condiciones, el conjunto S genera a $I(E)$*

Notemos que acá por "subvariedades más sencillas" entendemos a los abiertos U, de alguna manera estamos diciendo que si, para todo subconjunto cerrado Y, S genera "localmente" a $I(Y)$ podemos asegurar que genera todo $I(E)$

Demostración. Por inducción en $n = \dim X$, si $\dim X = 0$ el teorema es trivial. Si $n > 0$ tomamos un abierto no vacío U de X cualquiera y tomamos como $Y = X \backslash U$, y a Y' como el conjunto de singularidades de X. También escribimos $U' = X \backslash Y'$, $Y_1 = U' \backslash U = Y \backslash Y'$. Notamos las preimágenes de estos conjuntos por f de la siguiente manera $\breve{U} = f^{-1}(U)$ y así con todos, lo mismo si notamos $i : Y_1 \hookrightarrow U'$ la inmersión entonces $\breve{i} : \breve{Y}_1 \hookrightarrow \breve{U}'$ es la inmersión en las fibras. Consideramos entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} I(Y_1)^{(S)} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & I(U')^{(S)} \arrow[r, "j^*"] \arrow[d] & I(U)^{(S)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ I(\breve{Y}_1) \arrow[r, "\breve{i}_*"] & I(\breve{U}') \arrow[r, "\breve{j}^*"] & I(\breve{U}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $I(Y_1)^{(S)}$ es el $I(Y_1)$-submódulo de $I(\breve{Y}_1)$ generado por los elementos de $\iota^*_{\breve{Y}}(S)$ donde $\iota_{\breve{Y}} : \breve{Y}_1 \to E$ es la inmersión, los demás conjuntos de la fila de arriba se definen similarmente. Las filas son exactas por 2.1.9. Como las flechas verticales son esencialmente f^* y ι^* para las distintas inmersiones ι en E, entonces el segundo cuadrado del diagrama es conmutativo por funtorialidad. Por otra parte el primer cuadrado del diagrama conmuta por la propiedad 2.1.6 y la fórmula de proyección. Por la hipótesis inductiva, la primer flecha vertical es un epimorfismo. Como j^* es un epimorfismo, si $x \in I(E)$ es tal que $x|_{\breve{U}} = \breve{j}^* x|_{\breve{U}'}$ está en la imagen de $I(U)^{(S)}$ entonces $x|_{\breve{U}'}$ está en la imagen de $I(U')^{(S)}$. Por hipótesis siempre existe un U tal que para todo $x \in I(E)$, $x|_{\breve{U}} = \breve{j}^* x|_{\breve{U}'}$ está en la imagen de $I(U)^{(S)}$. Entonces la misma hipótesis va a ser cierta si reemplazamos a Y por Y' y tomamos Y'' como el conjunto de singularidades de Y', así podemos proceder hasta llegar a $Y = \emptyset$, o sea $\breve{U}' = E$, $U = X$ y para todo $x \in I(E)$ entonces $x \in I(X)^{(S)}$. □

Notemos que desde el enunciado del teorema estamos tomando como implícito el hecho de que el funtor I tenga dominio en la categoría de variedades regulares **cuasi-proyectivas** y no solo en las variedades proyectivas, como estábamos trabajando nosotros. En realidad esto no es mayor problema siempre y cuando tomemos la precaución de que no estamos haciendo f_* de ningún morfismo f que no sea propio. Todas las teorías de intersección que manejamos, incluidas las cohomologías de Weil pueden extenderse a este caso.

Corolario 7.1.4. *Sea X una variedad algebraica no singular, E un fibrado vectorial de rango p sobre X y $\mathbb{P}(E)$ su fibrado proyectivo asociado, entonces los ξ^i_E generan el $I(X)$-módulo $I(\mathbb{P}(E))$*

Demostración. Para demostrar que se cumplen las hipótesis de la proposición tomemos una subvariedad localmente cerrada no singular Y, entonces $\mathbb{P}(E)$ induce un fibrado proyectivo $\mathbb{P}(E')$ sobre Y por restricción, tomemos como el abierto U de la hipótesis un abierto que trivialice a $\mathbb{P}(E')$, de manera que hay que probar que, en el caso en que se tenga un fibrado trivial $X \times \mathbb{P}^p$ los ξ^i_E van a generarlo, pero ya vimos que en este caso $\xi^i_E = 1_X \times [H]^i$ donde $[H]$ es la clase de un hiperplano, y sabemos por lo que vimos en la sección 2 que $I(X \times \mathbb{P}^p)$ es generada por estos elementos □

Combinando este resultado con 7.1.2 tenemos:

Corolario 7.1.5. *$I(\mathbb{P}(E))$ es un $I(X)$-módulo libre de rango p generado por las clases ξ^i_E.*

Esto va a permitirnos definir lo que es una clase de Chern:

Definición 7.1.6. (Clases de Chern) Sea X una variedad no singular y $E \xrightarrow{\psi} X$ un fibrado vectorial de rango p sobre X. Definimos las clases de Chern de E como los elementos $c_i(E) \in I^i(X)$ con $0 \leq i \leq p$ tales que $c_0(E) = 1_X$ y

$$\sum_{i=0}^{p} \psi^*(c_i(E))\xi^{p-i} = 0$$

Los $c_i(E)$ son llamados i-ésima clase de Chern de E y la suma de todos $c(E) =_{Def} \sum c_i(E)$ es llamada la *clase total de Chern*

De las clases de Chern vamos a usar las siguientes propiedades fundamentales cuya demostración está en [6]:

Proposición 7.1.7. *Las clases de Chern satisfacen lo siguiente:*

Funtorialidad *Sea $f : X \to Y$ un morfismo y E un fibrado sobre Y entonces la siguiente ecuación vale en $I(X)$ vale:*

$$c(f^*(E)) = f^*(c(E))$$

Normalización *Si E es un fibrado vectorial de rango* 1 *sobre X se tiene:*

$$c(E) = 1 + \xi_E$$

Aditividad *Sea X una variedad regular y $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre X, entonces:*

$$c(E) = c(E') \cdot c(E'')$$

Acá sólo van a aparecer las clases de Chern tangencialmente. Sin embargo el tema de clases de Chern de variedades algebraicas (originalmente las clases de Chern fueron definidas para variedades topológicas en la década del '30, [5, notas al capítulo 3]) es particularmente interesante. Esto es así porque las clases $c_i(E)$ son objetos que constituyen ejemplos, simples pero no triviales, de muchos fenómenos muy importantes en teoría de intersección (algo así como las curvas para la teoría de clasificación).

El enfoque axiomático que usamos acá es una especie de "atajo" a la teoría de Chern y tiene la gran ventaja que, aunque no demostramos concretamente la existencia de clases de Chern (básicamente porque tampoco demostramos la existencia de teorías de intersección) podemos entender la mayoría de sus propiedades más importantes, de hecho en [6] Grothendieck se explaya un poco más que nosotros con este tipo de argumentos y muestra sin mucha dificultad la relación que hay entre operaciones con fibrados vectoriales (producto tensorial, sucesiones exactas, producto exterior, etc.) y operaciones algebraicas entre las clases de Chern, este tipo de desarrollo fue lo que sin duda lo llevó a considerar la definición de $K^0(X)$, la K-teoría de una variedad.

Sin embargo, el enfoque axiomático tiene, también, desventajas muy importantes. Principalmente, el hecho de que no estamos dando una construcción de clases de Chern (y aún asumiendo que existan teorías de intersección con clases de Chern, la definición que dimos es bastante implícita, no muy bien adaptada a cálculos directos). Además, este enfoque en particular es bastante restrictivo desde el momento en que definimos las clases $c(E)$ sólo para fibrados vectoriales sobre variedades regulares. En [5] Fulton describe de manera bastante diferente las clases de Chern para variedades en general, este enfoque es algo más trabajoso aún tomando como válidas las propiedades fundamentales de la teoría de Chow.

Ahora vamos a utilizar los resultados acerca de $I(\mathbb{P}(E))$ para establecer una descomposición del motivo $\mathfrak{h}(\mathbb{P}(E))$ en términos de $\mathfrak{h}(X)$.

Sabemos que, dado un fibrado proyectivo $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\psi} X$ de rango r, podemos descomponer a $I(\mathbb{P}(E))$ en suma directa como $I(\mathbb{P}(E)) = \bigoplus_i I(X) \cdot \xi^i$ y además sabemos que esta construcción es universal en el sentido en que $f^*\xi_E = \xi_{f^*(E)}$, por lo tanto, si ponemos esta descomposición en términos de correspondencias, el principio de identidad de Manin y la proposición 6.1.7 va a darnos el resultado deseado en la categoría de motivos.
Primero observemos que, como vale:

$$\psi_*(\xi_E^i) = 0 \quad (0 \leq i \leq r-2) \qquad\qquad \psi_*(\xi_E^{r-1}) = 1_X$$

Entonces es muy fácil describir a la proyección $p_r : I(\mathbb{P}(E)) \to I(X) \cdot \xi^{p-1}$, de hecho tenemos que:

$$\begin{gathered}\xi^{r-1} \cdot \psi^*\psi_*(\textstyle\sum_{i=0}^{r-1} \psi^*(a_i)\xi^i) = \xi^{r-1} \cdot \psi^*(\sum_{i=0}^{r-1} \psi_*(\psi^*(a_i)\xi^i)) = \\ \xi^{r-1} \cdot \psi^*(\textstyle\sum_{i=0}^{r-1} a_i\psi_*\xi^i) = \xi^{r-1} \cdot \psi^*(a_{r-1}) = p_r(\sum_{i=0}^{r-1} \psi^*(a_i)\xi^i)\end{gathered}$$

Con lo que ya tenemos la primera (o última, depende por donde uno empiece a contar) proyección p_r escrita en forma de composición de morfismos de la forma f^*, f_* y m_x(=multiplicación por un elemento). A partir de esto podemos escribir las otras recursivamente, de la siguiente manera. Si tenemos la descripción de los proyectores $p_r, p_{r-1}, \ldots, p_{i+1}$ entonces

$$(id_{I(X)} - \sum_{j=i+1}^{r} p_j) \sum_{k=0}^{r-1} \psi^*(a_k)\xi^k = \sum_{k=0}^{i} \psi^*(a_k)\xi^k$$

Ahora podemos multiplicar esta última expresión por ξ^{r-1-i}, y luego aplicar ψ_*, el único término que va a sobrevivir va a ser a_i. Por lo tanto tenemos que

$$p_i = \xi^{i-1} \cdot \psi^*\psi_*(id_{I(X)} - id_{I(X)} - \sum_{j=i+1}^{r} p_j)$$

Abusando notación vamos a escribir p_i también por la correspondencia

$$m_{\xi^{i-1}} \circ^t \Gamma_\psi \circ \Gamma_\psi \circ (\Delta_X - \sum_{j=i+1}^{r} p_j)$$

Notemos que, por la funtorialidad de las clases ξ_E, y como los morfismos de módulos p_i son proyectores y descomponen a la identidad, podemos aplicar el principio de Manin 5.0.35 para deducir que las correspondencias p_i son proyectores y que $\sum_i p_i = \Delta_X$. Más aún, al tener esta descomposición de la diagonal podemos aplicar 6.1.7 para concluir que:

Proposición 7.1.8. *El motivo de $\mathbb{P}(E)$ se descompone como suma directa en:*

$$\mathfrak{h}(\mathbb{P}(E)) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} (\mathbb{P}(E), p_i)$$

Por otra parte, sabemos que, si $E \xrightarrow{\psi} X$ y $F \xrightarrow{\phi} X$ son dos fibrados de rango r, entonces tanto$I(\mathbb{P}(E))$ como $I(\mathbb{P}(E))$ son $I(X)$-módulos libres de rango r y, por lo tanto, isomorfos entre sí. Es más, similarmente a como definimos los proyectores p_i se ve que $g_r = \xi_F^{r-1}\phi^*\psi_*$ es un morfismo $I(\mathbb{P}(E)) \to I(X) \cdot \xi_F^{r-1}$ que manda ξ_E^{r-1} en ξ_F^{r-1} y $g_r(\xi_E^i) = 0$ si $i \neq r-1$. Igualmente tenemos que

$$g_i = \xi_F^i \cdot \phi^*\psi_*(id_{I(X)} - \sum_{j=i+1}^{r} p_j)$$

cumple con $g_i(\xi_E^{i-1}) = \xi_F^{i-1}$, $g_i(\xi_E^k) = 0$ si $k \neq i-1$.
Con lo que $\alpha = \sum_i g_i$ es un isomorfismo cuya inversa se escribe como $\sum_i f_i$ donde los f_i se calculan reemplazando ϕ por ψ y ξ_F por ξ_E en la definición de los g_i. Nuevamente aplicando 5.0.35 a α y su inversa vemos que define un isomorfismo entre los motivos de $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(F)$. En particular el motivo de cualquier fibrado proyectivo de rango $r-1$ es isomorfo al motivo del fibrado trivial $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ con lo que

$$\mathfrak{h}(\mathbb{P}(E)) = \mathfrak{h}(X \times \mathbb{P}^{r-1}) = \mathfrak{h}(X) \otimes \mathfrak{h}(\mathbb{P}^{r-1}) = \bigoplus_{i=o}^{r} \mathfrak{h}(X) \otimes \mathbb{L}^i \qquad (7.1.1)$$

7.2. Motivo de un Blow-up

En esta parte vamos a discutir la forma del motivo del blow-up $\widetilde{X}$ de una variedad X a lo largo de una subvariedad Y. Recordamos la definición de Blow-up, vamos a dar acá una definición clásica al estilo de Weil describiéndolo por cartas y ecuaciones como está en [2] , vamos a necesitar sólo el caso en que Y es regular, pero la definición general es parecida. Para una definición en el lenguaje de esquemas se puede consultar [8, capítulo II] o [5, apéndice B]

Definición 7.2.1. Blow-up de una variedad a lo largo de una subvariedad: Sea X una variedad e Y una subvariedad de X de codimensión i. El Blow-up $\widetilde{X}$ de X a lo largo de Y se define como la variedad dada localmente por las siguientes cartas:
Si U es un abierto afín de X tal que $U \cap Y = \emptyset$ ponemos a U como carta. Si U es un abierto afín de X tal que existen parámetros uniformizantes $f_0, \ldots, f_{i-1}$ de $U \cap Y \neq \emptyset$ (i.e.: las ecuaciones $\{f_k = 0\}$ determinan el conjunto de puntos de $U \cap Y$). Ponemos como carta la variedad $\widetilde{U}$ cuyos puntos son el subconjunto de $U \times \mathbb{P}^{i-1}$ dado por las siguientes ecuaciones:

$$\{(u,x) \in U \times \mathbb{P}^{i-1}\ tq:\ x_k f_j(u) - x_j f_k(u) = 0 \quad 0 \leq k,j \leq i-1\}$$

donde $(x_o : \cdots : x_{i-1})$ son las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^{i-1}$. Observemos que $\widetilde{U} \backslash (Y \times \mathbb{P}^{i-1}) \cong U \backslash Y$

Dos cartas U y V tales que $U \cap V \cap Y = \emptyset$ las pegamos a través de los isomorfismos que existen entre $U \cap V$ con el abierto correspondiente de X. Si $U \cap V \cap Y \neq \emptyset$ las pegamos a través de la biyección entre puntos que determinan dos conjuntos de parámetros uniformizantes para Y

Observación 7.2.2. A partir de esta definición no queda claro, pero se puede probar que, si X es proyectiva, entonces $\widetilde{X}$ también lo es [2, 12.c].

Observemos también que, con el atlas de la definición, podemos definir un morfismo $f : \widetilde{X} \to X$ con la siguiente propiedad: f es un isomorfismo entre $\widetilde{X} \backslash f^{-1}(Y)$ e $X \backslash Y$ y, por otra parte, llamando $\widetilde{Y} = f^{-1}(Y)$ tenemos que $f : \widetilde{Y} \to Y$ es un fibrado proyectivo de rango igual a $\mathrm{codim} Y - 1$; más precisamente, puede demostrarse que la estructura de fibrado que tiene $\widetilde{Y}$ sobre Y es naturalmente isomorfa al proyectivizado del fibrado conormal de Y en X (el fibrado conormal es el que corresponde al haz localmente libre $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2$ donde $\mathcal{I}_Y$ es el haz de ideales de Y)

Dado que el único dato que necesitamos para definir $\widetilde{X}$ a partir de X es la subvariedad Y, querríamos dar una descripción del motivo de $\widetilde{X}$ en términos de $\mathfrak{h}(x)$ y de $\mathfrak{h}(Y)$. Para lograr esto vamos a proceder como en el caso de los fibrados proyectivos, es decir encontrar una descomposición de $I(\widetilde{X})$ que sea expresable en términos de correspondencias y usar 5.0.35 y 6.1.7 para demostrar que esa descomposición es motívica.

El ingrediente principal que vamos a usar es el siguiente teorema que damos sin demostración:

Teorema 7.2.3. *Sea $f : \widetilde{X} \to X$ el blow-up de X a lo largo de una variedad regular Y de codimensión d, y notemos con N el fibrado normal*[5] *de Y en X. Entonces la siguiente sucesión exacta corta de grupos se escinde:*

$$0 \to A^*(Y) \xrightarrow{\alpha} A^*(\widetilde{Y}) \oplus A^*(X) \xrightarrow{\beta} A^*(\widetilde{X}) \to 0$$

Donde $\alpha(y) = (f|_{\widetilde{Y}}^*(y) \cdot c_{d-1}(E), -i_* y)$ siendo $E = (f|_{\widetilde{Y}}^* N)/\mathcal{O}_N(-1)$ e i la inclusión de Y en X. El morfismo β está dado por $\beta(\widetilde{y}, x) = j_*(\widetilde{y}) + f^* x$ donde j es la inclusión de $\widetilde{Y}$ en $\widetilde{X}$. La inversa a izquierda de α está dada por $\alpha'(\widetilde{x}, y) = f|_{\widetilde{Y}*}(\widetilde{x})$

Demostración. Ver [5, capítulo 6.7] □

Observemos que α, β, α' son todos morfismos expresables en términos de correspondencias, más precisamente por:
$a = (-m_{c_{d-1}(E)} \circ \Gamma_{f|_{\widetilde{Y}}}, \Gamma_i)$
$b = \Gamma_j + {}^t\Gamma_f$
$a' = \Gamma_{f|_{\widetilde{Y}*}}$ Además, como para cualquier variedad T se tiene que el pullback

$$\begin{array}{ccc} T \times \widetilde{Y} & \xrightarrow{id_T \times j} & T \times \widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle id_T \times f|_{\widetilde{Y}}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T \times Y & \xrightarrow[id_T \times i]{} & T \times X \end{array}$$

[5]es decir $(\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2)^*$

También es un Blow-up, podemos aplicar 5.0.35 y 6.1.7 y concluir

Proposición 7.2.4. *La sucesión*

$$0 \to \mathfrak{h}(Y)(-d) \xrightarrow{a} \mathfrak{h}(X) \oplus \mathfrak{h}(\widetilde{Y})(-1) \xrightarrow{b} \mathfrak{h}(\widetilde{X}) \to 0$$

es exacta y se escinde en la categoría $\mathcal{M}_{A^*}$ de motivos de Chow (o sea motivos con la equivalencia racional como teoría de intersección I).

Corolario 7.2.5. *Estructura del motivo de un Blow-up*

$$\mathfrak{h}(\widetilde{X}) = \mathfrak{h}(X) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{d-1} \mathfrak{h}(Y)(-i) \right)$$

Demostración. Por la proposición anterior $\mathfrak{h}(\widetilde{(X)}) = (id - aa')(\mathfrak{h}(X) \oplus \mathfrak{h}(\widetilde{Y})(-1))$ ya que estamos escribiendo a $\mathfrak{h}(\widetilde{(X)})$ como núcleo de la proyección

$$\mathfrak{h}(X) \oplus \mathfrak{h}(\widetilde{Y})(-1) \cong \mathfrak{h}(Y)(-d) \oplus \mathfrak{h}(\widetilde{(X)}) \to \mathfrak{h}(Y)(-d)$$

Usando el principio de Manin y la definición de los morfismos α y α' vemos que $id - aa'$ actúa como la identidad sobre X. Sobre $\widetilde{Y}$ tenemos que, como $\widetilde{Y}$ es el fibrado conormal de Y en X, entonces

$$\alpha\alpha' = f^*(f_*(\widetilde{y})) \cdot c_{d-1}(f^*N/\mathcal{O}_{\widetilde{Y}})$$

Queremos probar que la fórmula para $\alpha\alpha'$ es igual a la proyección a $\xi^d_{\widetilde{Y}} \cdot A^*(Y)$. Para esto basta ver que $c_{d-1}(f^*N/\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-1)) = \xi^d_{\widetilde{Y}}$ esto lo sabemos a partir de la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathcal{O}_N(-1) \to f^*N \to f^*N/\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-1) \to 0$$

y usando que entonces $c(f^*N) = c(\mathcal{O}_N(-1))c(f^*N/\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-1))$, como $c(\mathcal{O}_N(-1)) = c_1(\mathcal{O}_N(-1)) = \xi_{\widetilde{Y}}$ por definición, y por funtorialidad $c(f^*N) = f^*c(N)$ tenemos lo siguiente:

$$c_d(f^*N) = f^*c_d(N) = -\sum_{i=0}^{d-1} c_i(N)\xi^{d-i}_{\widetilde{Y}} = \xi_{\widetilde{Y}} \cdot c_{d-1}(E)$$

Por lo cual $c_{d-1}(E) = \xi^{d-1}_{\widetilde{Y}}$ y $id - aa'$ actúa como la proyección a $\bigoplus_{i=0}^{d-2} \xi^i_{\widetilde{Y}} \cdot A^*(Y)$ con lo que se tiene la descomposición buscada. □

8. Motivos de Curvas

En esta sección vamos a ver cómo el Jacobiano de una curva C determina completamente el motivo $\mathfrak{h}(C)$ en el caso que estemos tomando como teoría de intersección una teoría de clases módulo equivalencia adecuada.
Observemos que en la teoría de Chow hay un isomorfismo natural $Pic(C) \cong I^1(C)$. Como la jacobiana $J(C)$ de una curva C es la variedad que representa el funtor

$$P_C : \mathcal{V}ar \to \mathcal{G}r \quad T \mapsto Pic(C \times T)/\{L \in Pic(C \times T) \ tq : \ \exists\, M \in Pic(T), \ L = p_T^{CT*}(M)\}$$

en particular $J(C)$ es canónicamente isomorfa como grupo a $Pic(C)$ (acá estamos tomando en cuenta a $J(C)$ como una variedad definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, para más precisiones ver [14]) o sea que en definitiva tenemos un isomorfismo canónico $J(C) \cong I^1(C)$ en el caso en que I es el anillo de Chow.
Por otra parte, en los ejemplos que consideramos recién, tenemos que el anillo $I(C)$ se descompone como $I^0(C) \oplus J(C) \cong \mathbb{Z} \oplus J(C)$ con lo que, si queremos aislar el papel del jacobiano en el motivo de C vamos a tener que depurarlo de “componentes triviales”esto lo vamos a hacer de la siguiente manera.

Dada una variedad conexa X de dimensión n y una teoría de intersección I tal que X es I-especial (recordar 6.2) definimos el motivo reducido de X como:

$$\mathfrak{h}^+(X) = (X, \Delta - p_0^X - p_n^X) = (X, \Delta - ([e] \times 1_X) - (1_X \times [e]))$$

Proposición 8.0.6. *Sea I una teoría de intersección proveniente de una equivalencia adecuada y X una variedad de dimensión n I-especial. Para cualesquiera $i, j \in Z$ tenemos que*

$$Hom_{\mathcal{M}}(\mathfrak{h}^+(X)(i), \mathbb{L}^j) = 0 \quad Hom_{\mathcal{M}}(\mathbb{L}^j, \mathfrak{h}^+(X)(i)) = 0$$

Demostración. Vamos a probar que $\hom_{\mathcal{M}}(\mathfrak{h}^+(X)(i), \mathbb{L}^j) = 0$ ya que la otra igualdad sale análogamente. Lo que tenemos que probar es que $I^{n-i+j}(X \times e) \circ \Delta - p_0^X - p_n^X = 0$ para eso simplemente usamos el isomorfismo $I(X \times e) \cong I(X)$, tomamos $\alpha \in I^{n-i+j}(X)$ y calculamos $\alpha \circ \Delta - p_0^X - p_n^X = 0$

$$\begin{aligned}
&\alpha \circ \Delta - p_0^X - p_n^X = \alpha \circ (\Delta - ([e] \times 1_X) - (1_X \times [e])) = \\
&p_{2*}(p_1^*(\alpha) \cdot \Delta - p_1^*(\alpha) \cdot p_1^*([e]) - p_1^*(\alpha) \cdot p_2^*([e])) = \\
&\alpha - p_{2*}(p_1^*(\alpha \cdot [e])) - p_{2*}(\alpha \times [e])
\end{aligned}$$

El segundo término es cero si $\alpha \notin I^0(X)$ y el tercer término es α. Si $\alpha \in I^0(X)$ entonces el tercer término es cero y el segundo es α □

Observación 8.0.7. Recordemos que en la demostración de la hipótesis de Riemann para curvas hicimos basicamente la misma reducción.

Ahora vamos a usar las propiedades de la jacobiana de una curva para calcular los morfismos entre los motivos de dos curvas $\hom_{\mathcal{M}}(\mathfrak{h}^+C_1, \mathfrak{h}^+C_2)$.

Sean X e Y dos variedades y $x \in X$, $y \in Y$ dos puntos distinguidos. Una *correspondencia divisorial* entre X e Y con base en x e y es un line bundle L sobre $X \times Y$ tal que las restricciónes $L|X \times \{y\}$ y $L|\{x\} \times Y$ son ambas triviales. Con esta terminología expresamos la siguiente propiedad universal del jacobiano de una curva.

Proposición 8.0.8. *(Existencia del line bundle universal) Sea P un punto sobre una curva C. Existe una correspondencia divisorial M^P entre C y $J(C)$ con base en P y en 0 tal que, para cualquier correspondencia divisorial L entre C y una variedad Y con base en P y $y \in Y$ existe un único morfismo $\phi : Y \to J(C)$ tal que $\phi(y) = 0$ y $(id_X \times \phi)^* M^P \cong L$*

Demostración. En [14, Teorema 1.2] □

Expresándolo en lenguaje de divisores, usando al anillo de Chow como teoría de intersección, decimos que existe una correspondencia $F^P \in A^1(C \times J(C))$ con la propiedad de que para cualquier $f \in A^1(C \times Y)$ que cumpla $f \cdot ([x] \times 1_Y) = f \cdot (1_C \times [y]) = 0$ se tiene un morfismo ϕ tal que $id_C \times \phi^*(F^p) = f$.
En particular se tiene un morfismo canónico φ^P tomando

$$f = p_+^C =_{def} \Delta_C - (1_C \times [P]) - ([P] \times 1_C)$$

Proposición 8.0.9. *Las correspondencias $F^+ = F^P \circ p_+^C \in \hom_{\mathcal{M}}(\mathfrak{h}^+(C), \mathfrak{h}^+ J(C))$ y $\varphi^+ = p_+^C \circ \Gamma_{\varphi^P} \in \hom_{\mathcal{M}}(\mathfrak{h}^+ J(C), \mathfrak{h}^+(C))$ cumplen que*

$$F^+ \circ \varphi^+ = (p_+^C \circ {}^t\Gamma_{\varphi^P}) \circ (F^P \circ p_+^C) = id_{\mathfrak{h}^+(C)}$$

En particular $\mathfrak{h}^+(C)$ es un sumando directo de $\mathfrak{h}^+(J(C))$.

Demostración. Nos basta con demostrar que ${}^t\Gamma_{\varphi^P} \circ F^P = p_+^C$ Para esto consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C \times C \times C \arrow[r, "id_C \times \phi \times id_C"] & C \times J(C) \times C \arrow[r, "p_{13}"] & C \times C \\
& C \times C \arrow[ul, "id_C \times \delta_C"] \arrow[u, "id_C \times \gamma_\phi"'] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde δ_C es el morfismo diagonal y $\gamma_\phi(x) = (x, \phi(x))$ Teniendo en cuenta esto y las propiedades de 5.0.25 tenemos:

$$\begin{aligned}
&{}^t\Gamma_{\varphi^P} \circ F^P = p_{13*}((id_C \times \gamma_\phi)_*(1_{C\times C}) \cdot (F^P \times 1_C)) = \\
&p_{13*}(id_C \times \gamma_\phi)_*(id_C \times \gamma_\phi)^*(F^P \times 1_C) = (id_C \times \gamma_\phi)^*(F^P \times 1_C) = \\
&(id_C \times \delta_C)^*(id_C \times \phi \times id_C)^*(F^P \times 1_X) = (id_C \times \delta_C)^*[((id_C \times \phi)^* F^P) \times 1_C] = \\
&(id_C \times \delta_C)^*(p_+^C \times 1_X) = p_+^C
\end{aligned}$$

□

Observación 8.0.10. Estando en el caso de curvas, y considerando el anillo de intersección como N^*, el anillo de equivalencia numérica, (en realidad va a servir cualquier anillo de intersección que cumpla $I^n(X) \cong \Lambda$) cuando hablamos de la condición $f \cdot ([x] \times 1_Y) = f \cdot (1_C \times [y]) = 0$ estamos simplemente diciendo que los índices $a(f)$ y $b(f)$ sean cero (recordar la sección 'puntos en curvas'). Con lo que, si $f \in N^1(C \times C')$ es una correspondencia de grado cero tal que $a(f) = b(f) = 0$ tenemos:

$$f \circ p_+^C = f - p_{13*}([x] \times f) - p_{13*}(1_X \times (([x] \times 1_Y) \cdot f)) = f$$

análogamente $p_{+}^{C'} \circ f = f$.
Por otra parte es inmediato de la definición que $a(f \circ g) = a(f)a(g)$, y de ahí sale que cualquier morfismo en $\hom(\mathfrak{h}^{+}(C), \mathfrak{h}^{+}(C'))$ cumple con la condición $a(f) = b(f) = 0$
En definitiva hay una biyección entre las correspondencias $f : C \vdash C'$ con $a(f) = b(f) = 0$ y las flechas entre los motivos $\mathfrak{h}^{+}(C)$ y $\mathfrak{h}^{+}(C')$

El siguiente teorema, que enunciamos sin demostración, nos va a dar la equivalencia que existe entre la categoría de motivos de tipo $\mathfrak{h}^{+}(C)$ y la de jacobianas:

Teorema 8.0.11. *Sean C_1 y C_2 curvas no singulares con puntos distinguidos y sean J_1 y J_2 sus jacobianas. Hay una correspondencia uno a uno entre correspondencias divisoriales de C_1 a C_2 y morfismos de variedades abelianas* $\hom(J_1, J_2)$

Demostración. [14, Corolario 6.1] La idea es que una correspondencia divisorial define un morfismo de $\phi : C_1 \to J_2$ que, a su vez, define un morfismo $J_1 \to J_2$ por ser la Jacobiana de C_1 la variedad abeliana que factoriza los morfismos de C_1 a todas las otras variedades abelianas (es decir: la Jacobiana de una curva es también la variedad de Albanese de la curva) □

En particular, si tomamos como anillo de coeficientes $\Lambda = \mathbb{Q}$ y como teoría de intersección, por ejemplo, a $N_{\mathbb{Q}}^{*}$, tenemos que la biyección entre correspondencias divisoriales y morfismos entre jacobianas da que la subcategoría de $\mathcal{M}_{N_{\mathbb{Q}}^{*}}$ consistente en motivos de la forma $\mathfrak{h}^{+}(C)$ es equivalente a la de variedades jacobianas módulo isogenías.
Más aún, vamos a usar el siguiente teorema para ver que la clausura pseudo-abeliana de esta categoría es (equivalente a) la categoría de variedades abelianas.

Teorema 8.0.12. *Para cualquier variedad abeliana A, sobre un cuerpo infinito, existe una jacobiana J y un epimorfismo $J \twoheadrightarrow A$*

Demostración. [14, sección 10] □

Como, por 4.2.8, la categoría de variedades abelianas es abeliana y semisimple, existe, para toda variedad abeliana A una jacobiana J y un proyector $p : J \to J$ tal que $p(J) = A$. En particular la categoría de variedades abelianas $\mathfrak{V}ab$ está incluida en la clausura pseudo-abeliana de la categoría de las Jacobianas $\mathfrak{J}ac$, al ser $\mathfrak{V}ab$ una categoría abeliana es pseudo-abeliana, y contiene a $\mathfrak{J}ac$, con lo que $\mathfrak{V}ab$ es la completación pseudo-abeliana de $\mathfrak{J}ac$.

9. Variedades uniracionales de dimensión 3

Una variedad uniracional de dimensión 3 se define como una variedad X para la cual se tiene un morfismo racional $\phi : \mathbb{P}^3 \rightsquigarrow X$ de grado finito. Variedades uniracionales aparecen naturalmente en problemas de clasificación. El morfismo racional de $\mathbb{P}^3$ a X puede "resolverse" es decir se puede tomar una serie de Blow-ups de manera tal de poder definir el morfismo sobre toda la variedad, más precisamente existen morfismos

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "\chi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \mathbb{P}^3 \arrow[rr, "\phi"] & & X \end{tikzcd} \tag{9.0.1}$$

Con ψ un morfismo de grado finito y χ la composición de Blow-up's a lo largo de subvariedades no singulares definidas sobre una extensión finita del cuerpo k (el cuerpo de definición de X), las subvariedades pueden ser puntos o curvas. Para una teoría moderna de resolución de morfismos racionales ver [20].

A partir del diagrama 9.0.1 podemos saber la forma de $\mathfrak{h}(X')$ de la siguiente manera: Sabemos que el motivo $\mathfrak{h}\mathbb{P}^3 = \mathbb{L}^3 \oplus \mathbb{L}^2 \oplus \mathbb{L} \oplus e$. Sabemos cómo es el motivo de un Blow-up en términos de la base y la subvariedad explotada, en este caso tenemos muchos Blow-ups sucesivos, cuando son a lo largo de un punto tenemos que sumarle $\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^2$ al motivo que teníamos antes, y cuando es el Blow-up a lo largo de una curva C lo que tenemos que hacer es sumar $\bigoplus_{i=1}^{d-1} \mathfrak{h}(C)(-i)$ al motivo que teníamos, en este caso $d = 2$ así que nos queda que tenemos que sumar $\mathfrak{h}(C)(-1) = \mathfrak{h}(C) \otimes \mathbb{L} = \mathbb{L} \oplus (\mathfrak{h}^+(C) \otimes \mathbb{L}) \oplus \mathbb{L}^2$. Con lo que el motivo de X' nos queda:

$$\mathfrak{h}(X') = e \oplus a\mathbb{L} \oplus (\bigoplus_i \mathfrak{h}^+(C_i) \otimes \mathbb{L}) \oplus a\mathbb{L}^2 \oplus \mathbb{L}^3 \tag{9.0.2}$$

Donde a es la cantidad de Blow-ups sobre puntos tuvo que hacerse para resolver ϕ Ahora bien, sabemos que el motivo de X es un sumando directo del motivo de X', donde el proyector es $p = (1/\deg\phi)^t\Gamma_\phi \circ \Gamma_\phi$, como $\hom(\mathbb{L}^i, \mathbb{L}^j) = 0$ si $i \neq j$ y $\hom(h^+(C_i) \otimes \mathbb{L}^i, \mathbb{L}^j) = 0$ entonces el proyector p se descompone como proyector de cada uno de los sumandos. Más aún, p restringido a $\bigoplus_i \mathfrak{h}^+(C_i) \otimes \mathbb{L}$ es de la forma $p' \otimes id_{\mathbb{L}}$ con $p' \in \mathrm{End}(\bigoplus_i \mathfrak{h}^+(C_i) \otimes \mathbb{L})$ (porque, si M es un motivo cualquiera, por la definición de twist se ve que $\hom(M \otimes \mathbb{L}, M \otimes \mathbb{L}) = \hom(M(-1), M(-1)) = \hom(M, M)$) con lo cual acotamos a $\mathfrak{h}(X)$ como suma de términos del tipo $e \oplus a'\mathbb{L} \oplus A \oplus a''\mathbb{L}^2 \oplus \mathbb{L}^3$ donde A es (equivalente a) la clase de isogenía de una variedad abeliana.

En general podemos notar que el razonamiento anterior no solo funciona con proyectores sino que, más aún, para cualquier correspondencia de grado cero entre motivos con descomposiciones similares a 9.0.2 podemos seguir el mismo razonamiento y concluir que, de hecho, tenemos un funtor $X \mapsto A_X$ de variedades uniracionales de dimensión 3 a variedades abelianas módulo isogenía.

Ahora vamos a ver que, efectivamente, podemos contar puntos con lo que hicimos. Primero observemos que, por cómo actúa el morfismo de Frobenius Fr en las variedades (localmente como tomar potencias q-ésimas) y cómo construimos la variedad abeliana A_X

podemos aplicar la hipótesis de Riemann a A_X (el divisor que le corresponde al gráfico de Frobenius va a un morfismo de Jacobianas que actúa de la misma manera y por lo tanto es Fr sobre las Jacobianas, después proyectamos a la variedad A, pero los morfismos racionales sobre $\mathbb{F}_q$ conmutan con Frobenius, así que el funtor $X \mapsto A_X$ manda $Fr_X \mapsto Fr_{A_X}$). Lo que vamos a hacer para computar la cantidad de puntos $\nu_r(X)$ de X sobre $\mathbb{F}_{q^r}$ es observar que $\nu_s(X) = \int \Delta_X \cdot Fr_X^r$ y que, si tomo la equivalencia numérica, está bien definido para un motivo el número $\nu_r((X,p)) = \int p \cdot Fr_X^r$ y, se puede calcular $\nu_r(M \oplus N) = \nu_r(M) + \nu_r(N)$ y $\nu_r(M \otimes N) = \nu_r(M) \otimes \nu_r(N)$. En particular $\nu_r(\mathbb{L}) = q^r$ y tenemos entonces:

$$\nu_r(X) = 1 + aq^r + q^r \sum_i \omega_i^r + a'q^{2r} + q^{3r}$$

Donde los ω_i son las raíces características de Frobenius en A_X, y por lo tanto $|\omega_i| = q^{1/2}$. Por lo que tenemos un resultado que es equivalente a la hipótesis de Riemann.

Referencias

[1] Y. André *Une Introductions aux Motifs* (Motifs purs, motifs mixtes, périodes). 1995. Panoramas et synthèses - Société mathématique de France

[2] A.Borel, J.P.Serre *Le Théorème de Riemann-Roch*. 1958. Bulletin de la S.M.F, 86: págs.:97-136.

[3] P. Deligne *La conjecture de Weil I*. 1974. Publ. Math. IHES.

[4] M. Demazure *Motifs des Variétés Algébriques*. 1969. Séminaire Bourbaki n^o 365

[5] W. Fulton *Intersection Theory*. 1983. Segunda edición 1997. Springer

[6] A. Grothendieck *La théorie de classes de Chern*. 1958. Bulletin de la S.M.F, 86: págs.:137-154.

[7] A. Grothendieck *Sur quelques propiétés fondamentales en Théorie des Intersections*, 1958. Seminaire Claude Chevalley.

[SGA6] A. Grothendieck (director) *SGA 6*, 1966-67 Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch. 1971. Springer-Verlag.

[8] R. Hartshorne *Algebraic Geometry*. 1977. Octava edición 1997. Springer Graduate Texts in Mathematics.

[9] S. Kleiman *Algebraic Cycles and the Weil Conjectures*. 1968. Dix esposeés sur la cohomologie des Schemás.

[10] N. Koblitz *p-Adic Numbers, p-Adic Analysis, and Zeta-Functions*. 1977. Springer Graduate Text in Mathematics.

[11] S. Lang.*Abelian Varieties*. 1959 Interscience Tracts in pure and applied Mathematics.

[12] Yu. Manin *Correspondences, Motifs and monoidal transformations*. 1968. Matematičeski Sbornik, 6(4), págs.:439-470

[13] Yu. Manin *Lectures on zeta functions and motives* (according to Denninger and Kurokawa). 1995. Astérisque, 228

[14] J. Milne *Jacobian Varieties*. 1986. Arithmetic Geometry (Proc. Conference on Arithmetic Geometry, Storrs, August 1984), págs.:167-212. Springer

[15] A. Molinuevo *Anillo de Chow de variedades*. Tesis de licenciatura, (en preparación)

[16] D. Mumford. *Abelian Varieties*. 1970. Oxford University Press.

[17] D. Mumford. *Rational equivalence of* 0*-cycles on surfaces*. 1969. J. Math. Kyoto Univ. 9, págs.:195-204

[18] N. Ojeda Bär *Revestimientos categóricos, simpliciales y topologías de Grothendieck*. Tesis de licenciatura. 2006. Universidad de Buenos Aires.

[19] A. Weil. *Number of solutions of equations in finite fields.* 1949 Bulletin AMS, 55.

[20] J. Wlodarczyk. *Toroidal varieties and the weak factorization theorem.* 2003. Inventiones Mathematicae 154 (2), págs.:223-331. Springer.