UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoría y aproximación de problemas de autovalores lineales y no lineales

María Cecilia Picchio

Director: Ricardo Durán

Diciembre de 2008

Dedico este trabajo a mi papá

Índice general

Introducción

“Elementos finitos; quizás ninguna otra familia de métodos de aproximación haya tenido un impacto mayor en la teoría y en la práctica de métodos numéricos durante el siglo veinte” dice Tinsley Oden en la introducción al Handbook of Numerical Analysis Vol. 2 [**8**], una muy buena referencia sobre los orígenes y el desarrollo histórico del método. El método de elementos finitos (FEM, por su sigla en inglés), que se utiliza hoy en día en todas las áreas de la ingeniería cuyos modelos puedan plantearse como ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se basa en la formulación débil o variacional de problemas de valores iniciales o de frontera. El simple hecho de que la integral de una función sobre un dominio arbitrario pueda partirse en una suma de integrales sobre una colección de subdominios cuya unión es el dominio original, es la observación clave de la teoría de elementos finitos. Como consecuencia de esto el análisis del problema puede hacerse local: sobre un subdominio típico (generalmente triángulos) suficientemente chico, se puede pensar que una buena aproximación a la solución estará dada por un polinomio.

Los orígenes del método están ligados al apéndice de un artículo de Courant del año 1943 [**9**] en el que se estudian aproximaciones lineales a trozos para el problema de Dirichlet. Sin embargo, noventa y dos años antes, en 1851, Scellbach [**21**] propuso una solución al estilo de elementos finitos para el problema de Plateau (que consiste en determinar la superficie de área mínima encerrada por una curva cerrada). Pero esto no es todo; dos siglos antes el mismo Leibniz usó ideas relacionadas con el método cuando intentaba resolver el problema de la braquistocrona propuesto por Bernoulli en 1696. Tuvieron que pasar doscientos cincuenta años para que descubriesen que se podían obtener buenas aproximaciones de ecuaciones diferenciales sin trabajar con elementos infinitesimales sino manteniendo a los elementos finitos en tamaño. De ahí el nombre de “elementos finitos”. Los ’60s fueron los años donde la teoría matemática del método comenzó a tomar forma. En la década del ’70 el método se popularizó entre los ingenieros y la comunidad científica gracias a la resolución de diversos problemas difíciles de la ingeniería.

Uno podría pensar que el desarrollo de los FEM fue una consecuencia del profundo conocimiento sobre ecuaciones en derivadas parciales, espacios de Sobolev y soluciones débiles. Esto no fue así. Las dos teorías crecieron de manera paralela pero independiente, como cuenta Tinsley Oden: “las semillas de la teoría moderna de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales fueron sembradas aproximadamente al mismo tiempo que aquellas para el desarrollo de los FEM modernos, pero en un jardín completamente distinto”.

Organización de la tesis

En el primer capítulo se recuerdan las nociones básicas de la formulación variacional de problemas elípticos de orden dos y del método de elementos finitos.

En el segundo capítulo se estudia el problema de autovalores asociado a un operador en forma de divergencia sobre el espacio $H_0^1(\Omega)$, brindando un análisis más profundo sobre las propiedades del primer autovalor (que es el que tiene mayor importancia en las aplicaciones prácticas). Luego, se generalizan los resultados al caso de problemas espectrales abstractos planteados en espacios de Hilbert y se analiza una aproximación variacional discreta de estos problemas.

El tercer capítulo es de carácter técnico. Se desarrolla la teoría de interpolación en los espacios de Sobolev y se aplican estos resultados para obtener una cota del error de aproximación del problema espectral discreto abordado en el capítulo 2. La teoría se encuadra en un contexto más general que el necesario para esta aplicación pues será utilizada en el cuarto capítulo para aproximar soluciones de un problema no lineal.

En el cuarto capítulo se presenta un problema no lineal que involucra al p-Laplaciano y se prueba la existencia y unicidad de solución del problema variacional asociado. Se deduce la existencia y unicidad de solución del problema variacional discreto y se obtienen cotas del error. Estudiando un problema de minimización, que resulta ser equivalente al problema variacional, se logran mejoras en las estimaciones del error.

En el último capítulo se expone un problema de autovalores para el p-Laplaciano y se brinda un análisis focalizado en las propiedades del primer autovalor y la primera autofunción. Finalmente, se ofrece una aproximación variacional para el autovalor principal.

Agradecimientos

A mi familia, por darme los medios para estudiar esta carrera.

A Ricardo Durán, por dirigir esta tesis, y a Pablo De Napoli, Julián Fernández Bonder y Juan Pablo Pinasco, por ser los jurados.

A todos mis compañeros.

A Nicolás Ojeda Bär, por llenarme de inspiración y por haber influenciado cada aspecto de mi vida como nadie.

María Cecilia Picchio

CAPíTULO 1

Método de elementos finitos

1. Un ejemplo introductorio

Para introducirnos en el tema y con el objetivo de motivar las próximas definiciones, consideremos el siguiente problema unidimensional al que denotaremos PC (por problema clásico): dada una función $f \in C(\overline{I})$, donde I es el intervalo $(0,1)$, se quiere hallar una función $u \in C^2(\overline{I})$ que satisfaga

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Según el problema, encontrar una solución clásica puede ser una tarea muy difícil. Por eso intentaremos encontrar una función u que resuelva el problema en un sentido menos estricto. Si tomamos una función cualquiera φ que sea suficientemente buena, por ejemplo de clase $C^\infty(I)$, multiplicamos la ecuación a ambos lados por esta función e integramos en el intervalo I, obtenemos que

$$\int_0^1 f\varphi = -\int_0^1 u''\varphi = u'(0)\varphi(0) - u'(1)\varphi(1) + \int_0^1 u'\varphi' = u'(0)\varphi(0) + \int_0^1 u'\varphi',$$

por la fórmula de integración por partes. Si pedimos que $\varphi(0) = 0$ logramos eliminar el término de borde. Ahora bien, para que tenga sentido la expresión $\int_I u'\varphi' = \int_I f\varphi$, no necesitamos que la función u sea de clase $C^2(\overline{I})$ sino que se pueden relajar las hipótesis sobre ella. En esa dirección es que se introduce la noción de derivada débil.

Definición 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Decimos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ si para todo subconjunto V de Ω que verifique que $\overline{V}$ es compacto y que $\overline{V} \subset \Omega$, se cumple que $u \in L^1(V)$.*

Definición 1.2. *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que u tiene derivada débil respecto a x_i si existe una función $v \in L^1_{loc}(I)$ tal que*

$$\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v\phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Si la derivada débil existe entonces es única y, en ese caso, se nota $v = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

En la situación de nuestro problema, vamos a pedir que $u \in L^2(I)$ y que tenga derivada débil $u' \in L^2(I)$. Así, se verifica la igualdad

$$\int_I u'\varphi' = \int_I f\varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ con } \varphi(0) = 0. \tag{1}$$

Definimos entonces el conjunto donde vamos a plantear la formulación variacional como

$$\mathbb{V} = \{v \in L^2(I) : v \text{ tiene derivada débil } v' \in L^2(I) \text{ y } v(0) = 0\}.$$

Observar que (1) se sigue cumpliendo si reemplazamos la función $\varphi \in C^\infty(I)$ por una función $v \in \mathbb{V}$. El problema variacional -PV- consiste en hallar una función $u \in \mathbb{V}$ tal que $\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \ \forall v \in \mathbb{V}$. A la función u se la llama solución débil.

También podemos definir un problema de minimización -PM- que consiste en hallar una función de $\mathbb{V}$ que minimice el funcional $J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 v'^2 - \int_0^1 fv$ sobre todas las funciones $v \in \mathbb{V}$. Para tener definidos los problemas PV y PM no es necesario que la función f sea continua; alcanza con que sea de cuadrado integrable.

PROPOSICIÓN 1.1. *Los problemas PV y PM son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que tenemos una solución u del PV y veamos que es solución del PM. Dada $v \in \mathbb{V}$, definamos $w = v - u$ que es otro elemento de $\mathbb{V}$. Tenemos que

$$J(v) = J(w+u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (w')^2 + \int_0^1 w'u' + \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 - \int_0^1 fw - \int_0^1 fu.$$

Como $w \in \mathbb{V}$ resulta que $\int_0^1 w'u' - \int_0^1 fw = 0$. Por lo tanto,

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2}\int_0^1 (w')^2 \geq J(u),$$

como queríamos ver.

Supongamos ahora que u es solución del PM y veamos que resuelve el PV. Sean $\epsilon \geq 0$ y $w \in \mathbb{V}$. Como la función $u + \epsilon w \in \mathbb{V}$, se cumple que $J(u) \leq J(u + \epsilon w)$. Por lo tanto, la función de una variable $g(\epsilon) = J(u + \epsilon w)$ tiene un mínimo en $\epsilon = 0$. Desarrollemos esta función:

$$g(\epsilon) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 + \epsilon\int_0^1 u'w' + \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^1 (w')^2 - \int_0^1 fu - \epsilon\int_0^1 fw.$$

Luego, $0 = g'(0) = \int_0^1 u'w' - \int_0^1 fw$ y, como esto se cumple para toda $w \in \mathbb{V}$, concluimos que u es solución del PV. $\square$

En el caso en que la función f sea continua se cumple que una solución del problema clásico es solución del PV -y por lo tanto del PM. Lo importante es que, asumiendo que la solución débil es regular, se cumple que es una solución clásica.

PROPOSICIÓN 1.2. *Sea u una solución del PV. Si $u \in C^2(\overline{I})$, entonces es una solución clásica.*

DEMOSTRACIÓN. Dada $v \in \mathbb{V}$, integrando por partes obtenemos que

$$\int_0^1 fv = \int_0^1 u'v' = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_0^1 u''v = u'(1)v(1) - \int_0^1 u''v. \tag{2}$$

En particular, eso vale para toda función $v \in \mathbb{V}$ tal que $v(1) = 0$, en cuyo caso resulta que $\int_0^1 (f + u'')v = 0$. Si la función $f + u'' \in C(\overline{I})$ no fuera idénticamente nula en en intervalo I, entonces debería ser de signo constante en un subintervalo $[x_1, x_2] \subset I$. Tomando $v(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)^2$ en $[x_1, x_2]$ y $v(x) = 0$ afuera de este intervalo, resultaría que $0 = \int_0^1 (f + u'')v \neq 0$. Por lo tanto, $-u'' = f$ en I.

Para concluir que u es solución del PC basta ver que $u'(1) = 0$ (la condición $u(0) = 0$ se cumple pues $u \in \mathbb{V}$). Volviendo a (2), ahora que sabemos que $-u'' = f$, debe cumplirse que $u'(1)v(1) = 0$ $\forall v \in \mathbb{V}$. Si elegimos $v(x) = x$, función que pertenece a $\mathbb{V}$, resulta que $u'(1) = 0$, como queríamos probar. $\square$

Introduciendo la forma bilineal $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $a(u, v) = \int_0^1 u'v'$, y el funcional $L : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $L(v) = \int_0^1 fv$, podemos reescribir el PV de la siguiente manera: "Hallar $u \in \mathbb{V}$ tal que $a(u, v) = L(v)$ $\forall v \in \mathbb{V}$".

Método de Galerkin. Tomemos ahora un subespacio de dimensión finita S de $\mathbb{V}$ y consideremos el problema variacional discreto -PVD- que consiste en hallar una función $u_s \in S$ tal que $a(u_s, v_s) = (f, v_s)\ \forall v_s \in S$.

Teorema 1.1. *El PVD tiene una única solución.*

Demostración. Digamos que N es la dimensión de S y sea $B = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N\}$ una base de este subespacio. Pedir que u_s verifique $a(u_s, v_s) = (f, v_s)\,\forall v_s \in S$ equivale a pedir que $a(u_s, \phi_i) = (f, \phi_i)\,\forall 1 \leq i \leq N$. Ahora bien, como $u_s \in S$, buscar u_s equivale a buscar sus coordenadas en la base B. Tomando $u_s = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j$ y usando la bilinealidad de a, encontramos que el PVD es equivalente a hallar coeficientes $(\alpha_j)_{j=1}^{N} \subset \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j a(\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_i)\ \forall 1 \leq i \leq N$.

Definamos la matriz $K \in \mathbb{R}^{N\times N}$ cuyos coeficientes son $(K)_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$, y el vector $b \in \mathbb{R}^N$ tal que $(b)_i = \int_0^1 f\phi_i$. El PVD consiste entonces en hallar una solución del sistema $K\alpha = b$. Para ver que este sistema tiene solución única probemos que la matriz K es inversible. Supongamos entonces que $K\alpha = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}^N$, y tomemos $v = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j \in \mathbb{V}$. Como

$$a(v, \phi_i) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a(\phi_j, \phi_i) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K_{ij} = (K\alpha)_i = 0 \quad \forall i,$$

resulta que $a(v, v) = a(v, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i a(v, \phi_i) = 0$. Pero $a(v, v) = \int_0^1 (v')^2$, así que $v = cte$ y, como $v(0) = 0$, debe ser $v = 0$. Equivalentemente, $\alpha = 0$. □

La matriz K, a la que se llama matriz de rigidez (el nombre viene de la mecánica), es simétrica porque la forma bilineal a lo es y es definida positiva pues

$$\alpha^t K\alpha = \sum_{i,j=1}^{N} K_{ij}\alpha_i\alpha_j = a(v, v) \geq 0,$$

donde $v = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j$, y si $a(v, v) = 0$, con $v \in \mathbb{V}$, entonces $v = 0$.

El *método de elementos finitos* es un caso particular del método de Galerkin: consiste en elegir como subespacio S un conjunto de funciones continuas que sean polinomiales a trozos. Consideremos, por ejemplo, una partición del intervalo $[0, 1]$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$, y tomemos $S = \{v \in C[0, 1] : v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_1 \text{ y } v(0) = 0\}$, donde $\mathcal{P}_k$ es el conjunto de polinomios de grado a lo sumo k. Vamos a ver más adelante que debemos pedirle a las funciones de S la continuidad para tener que S es un subespacio de $\mathbb{V}$. Para darle una medida a la malla, uno define, para cada $1 \leq i \leq N$, $h_i = x_i - x_{i-1}$ y $h = \max\{h_i : 1 \leq i \leq N\}$. La notación usual para S es entonces $\mathbb{V}_h$. Tenemos que definir ahora una base de $\mathbb{V}_h$. Como habrá que calcular $\int f\phi_i$ y $a(\phi_i, \phi_j)$, conviene elegir funciones que tengan soporte chico y lo más disjunto posible. Vamos a elegir la base de Lagrange cuyos elementos cumplen $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$ y son poligonales a trozos, más específicamente:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq i \leq N-1,$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & x \notin [x_0, x_1] \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi_N(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}} & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0 & x \notin [x_{N-1}, x_N]. \end{cases}$$

Veamos que $\{\phi_0, \cdots, \phi_N\}$ es una base del conjunto $\tilde{S} = \{v \in C[0,1] : v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_1\}$ (notar que estamos eliminando la condición de borde $v(0) = 0$). Para ver que es un sistema de generadores, tomemos una función $v \in \tilde{S}$ y veamos que $v(x) = \sum_{j=0}^{N} v(x_j)\phi_j(x)$. En efecto, las dos funciones son lineales en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y coinciden en sus extremos; luego, son iguales en todo el intervalo $[0,1]$. Para probar que son linealmente independientes, supongamos que $\sum_{j=0}^{N} \alpha_j\phi_j(x) = 0$. Evaluando en el nodo x_i resulta que $\alpha_i = 0$.

Si agregamos la condición de borde no vamos a necesitar la función ϕ_0. Una base de $\mathbb{V}_h$ es $B = \{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$ y así la matriz de rigidez K es tridiagonal.

2. Descripción general del método

El conjunto $\mathbb{V}$ con el que trabajamos en el ejemplo anterior resulta ser un espacio de Hilbert, es decir, un espacio vectorial completo con la norma inducida por un producto interno, que en ese caso es $(f,g) = \int_0^1 fg + \int_0^1 f'g'$. En esta sección vamos a desarrollar brevemente la teoría de elementos finitos para problemas variacionales planteados en espacios de Hilbert.

DEFINICIÓN 1.3. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Notemos con $\|\cdot\|$ a la norma inducida por el producto interno definido en $\mathbb{V}$. Sea $a(\cdot,\cdot) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Decimos que*

- *a es simétrica si $a(u,v) = a(v,u)$ $\forall u, v \in \mathbb{V}$,*
- *a es continua si existe una constante $M > 0$ tal que $a(u,v) \leq M\|u\|\|v\|$, y*
- *a es coercitiva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$ $\forall u \in \mathbb{V}$.*

Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ un operador lineal y continuo, más brevemente $L \in \mathbb{V}^*$, y sea $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal, continua y coercitiva. El PV consiste en hallar una función $u \in \mathbb{V}$ tal que $a(u,v) = L(v)$ $\forall v \in \mathbb{V}$. El teorema de Lax-Milgram garantiza existencia y unicidad de solución para ese problema.

TEOREMA DE LAX-MILGRAM. *Dado un espacio de Hilbert $(\mathbb{V}, (\cdot,\cdot))$, sean $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal, continua y coercitiva en $\mathbb{V}$, y $L \in \mathbb{V}^*$. Existe un único $u \in \mathbb{V}$ tal que $a(u,v) = L(v)$ $\forall v \in \mathbb{V}$. Además, $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|L\|^*$.*

Notar que el teorema no pide que la forma bilineal a sea simétrica. De hecho, en el caso simétrico este teorema es un corolario del Teorema de representación de Riesz. La demostración del teorema de Lax-Milgram se puede leer en prácticamente cualquier libro de ecuaciones diferenciales lineales, entre ellos citamos a [**19**] y [**13**].

Consideremos ahora el problema de minimización abstracto PM: dados $\mathbb{V}$ un espacio vectorial completo con $\|\cdot\|$, una forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ simétrica, continua y coercitiva, un funcional L en $\mathbb{V}^*$ y un subespacio cerrado U de $\mathbb{V}$, se quiere hallar $u \in U$ que minimice $J(v)$ entre todas las funciones $v \in U$, donde $J : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ está definido por

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v).$$

TEOREMA 1.2. *Existe una única solución $u \in U$ del problema PM. Además, u satisface $a(u,v) = L(v)$ para toda función $v \in U$.*

DEMOSTRACIÓN. La forma bilineal a define un producto interno en $\mathbb{V}$. Asociada a este producto interno tenemos la norma $\|v\|_E = \sqrt{a(v,v)}$, llamada norma energía, que resulta ser equivalente a $\|\cdot\|$: por la coercitividad de a tenemos que $\|u\|_E^2 \geq \alpha\|u\|^2$ y por la continuidad de a, $\|u\|_E^2 \leq M\|u\|^2$. Luego, resulta que $(\mathbb{V}, a(\cdot,\cdot))$ es un espacio de Hilbert. Por el teorema de Lax-Milgram sabemos que existe un único elemento $w \in \mathbb{V}$ tal que $L(v) = a(w, v) \, \forall v \in \mathbb{V}$. Usando la simetría de a podemos reescribir el funcional J de la siguiente manera:

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - a(w, v) = \frac{1}{2}[a(v - w, v - w) - a(w, w)].$$

Así, el problema se tradujo en hallar una función $u \in U$ que minimice $\|v - w\|_E$ entre todos los elementos $v \in U$. Siendo U un subespacio cerrado de $\mathbb{V}$, existe un único $u \in U$ que minimiza esa distancia.

Como u es la proyección ortogonal de w sobre U por el producto interno $a(\cdot, \cdot)$, se verifica que $a(w - u, v) = 0 \; \forall v \in U$. Equivalentemente, $a(u, v) = a(w, v) = L(v) \; \forall v \in U$. □

Un ejemplo de un espacio de Hilbert es el espacio de Sobolev $H^k(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Recordemos la definición de estos espacios. Dado un multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, definimos $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, donde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Definición 1.4. *En relación con la definición 1.2, se define la derivada débil $D^\alpha u$, si existe, como la única función de $L^1_{loc}(\Omega)$ que verifica*

$$\int_\Omega u \, D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \, \phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definición 1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Se define el espacio de Sobolev $H^k(\Omega)$ como el siguiente conjunto:*

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}.$$

En ese espacio tenemos definido el producto interno $(f, g) = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}$ que hace de él un espacio de Hilbert. Ese producto interno induce la norma $\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$.

Definición 1.6. *$H_0^k(\Omega)$ es la clausura del espacio $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^k(\Omega)$.*

Es decir, una función u pertenece a $H_0^k(\Omega)$ si existe una sucesión $(u_k)_{k \geq 1} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ en $H^k(\Omega)$. Como $H_0^k(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^k(\Omega)$, resulta que $H_0^k(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert.

Supongamos ahora que el problema variacional está asociado con un problema elíptico de segundo orden sobre un conjunto abierto, acotado y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz y que $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$ o $\mathbb{V} = H^1(\Omega)$. Por el teorema de Lax-Milgram sabemos que el problema tiene solución única. Un problema de este tipo sería, por ejemplo, el problema variacional asociado al problema clásico PC que consiste en hallar, dada una función continua f, una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in \Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R} \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

En este caso, el PV consiste en hallar una función $u \in \mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = L(v) \; \forall v \in H_0^1(\Omega)$, donde $a(u, v) = \int_0^1 u'v'$ y $L(v) = \int_0^1 fv$.

Igual que antes, si nos quedamos con un subespacio de dimensión finita $\mathbb{V}_h$ de $\mathbb{V}$ también existirá una única solución del PVD y del PMD, que consisten respectivamente en hallar $u_h \in \mathbb{V}_h$ tal que $a(u_h, v_h) = L(v_h) \, \forall v_h \in \mathbb{V}_h$ y tal que $J(u_h) = \text{mín}\{J(v_h) : v_h \in \mathbb{V}_h\}$. El método de elementos finitos es una forma de construir estos subespacios $\mathbb{V}_h$. Para ello vamos a necesitar una **triangulación admisible** τ de Ω, es decir, una partición de Ω en triángulos T (intervalos si $n = 1$, triángulos si $n = 2$, tetraedros si $n = 3$), que son los que se llaman elementos finitos, de modo tal que

1. $\Omega = \cup_{T\in\tau} T$,
2. dada una cara de cualquier elemento T_1, o bien es parte del borde de Ω o bien es la cara de otro elemento T_2 de τ (en este último caso los elementos T_1 y T_2 se dicen *adyacentes*).

Por ejemplo, en el caso $n = 2$, la última condición se traduce así: dos triángulos de la partición o comparten un vértice, o comparten un lado, o no se tocan. Para cada elemento T, h_T representará el diámetro de T, es decir, la mayor de las distancias entre dos elementos de T, y denotaremos por $h = \max\{h_T : T \in \tau\}$. Utilizaremos la notación τ_h en lugar de τ.

Llamemos $\mathcal{P}_k$ al conjunto de polinomios de grado a lo sumo k en n variables. ¿Qué pasa si definimos $\mathbb{V}_h = \{v : v|_T \in \mathcal{P}_k \, \forall T \in \tau_h\}$? ¿Se cumple que $\mathbb{V}_h \subset H^1(\Omega)$? No necesariamente, ya que podría haber dos definiciones distintas sobre las caras de elementos adyacentes. El siguiente teorema resuleve este problema.

Teorema 1.3. *Si $v|_T \in \mathcal{P}_k \, \forall T \in \tau_h$, se cumple que $v \in H^1(\Omega)$ si y sólo si $v \in C(\overline{\Omega})$.*

Demostración. Supongamos primero que v es continua. En particular, pertenece a $L^2(\Omega)$. Luego, basta hallar para cada $1 \leq i \leq n$ una función $v_i \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_i \varphi = -\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para cada i tomemos como v_i la función cuya restricción a cada elemento $T \in \tau_h$ es la función $\frac{\partial v|_T}{\partial x_i}$. Como los elementos tienen borde Lipschitz se puede usar la fórmula de Green para obtener que, dado $T \in \tau_h$,

$$\int_T \frac{\partial v|_T}{\partial x_i} \varphi = -\int_T v|_T \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\partial T} v|_T \, \varphi \, \nu_{i,T},$$

donde $\nu_{i,T}$ es la componente i-ésima de la normal exterior unitaria a lo largo de ∂T. Sumando sobre todos los elementos de la partición obtenemos que

$$\int_\Omega v_i \varphi = -\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{T\in\tau_h} \int_{\partial T} v|_T \, \varphi \, \nu_{i,T}.$$

Veamos que la segunda integral del término de la derecha es nula: o bien una parte de ∂T está en el borde de Ω, en cuyo caso $\varphi = 0$ en esa parte, o bien la contribución de elementos adyacentes es nula ya que la normal tendrá signo distinto.

Probemos ahora la otra implicación. Supongamos, por el absurdo, que la función $v \in H^1(\Omega)$ no es continua. En ese caso, existen dos elementos adyacentes T_1 y T_2 y un subconjunto abierto no vacío $U \subset T_1 \cup T_2$ tales que $v|_{T_1} - v|_{T_2}$ es o bien positiva o bien negativa en $U \cap T'$, donde T' es la cara que comparten los dos elementos. Supongamos que es positiva y tomemos una función $\varphi \in C_0^\infty(U)$ que sea positiva en $U \cap T'$. Luego, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y se tiene que

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi = \sum_{j=1}^{2} \int_{T_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi = \sum_{j=1}^{2} \left[-\int_{T_j} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\partial T_j} v|_{T_j} \varphi \nu_{T_j} \right] = -\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{T'} (v|_{T_1} - v|_{T_2}) \varphi \nu_{T_1}.$$

Entonces, $0 = \int_{T'} (v|_{T_1} - v|_{T_2}) \varphi \nu_{T_1} > 0$, hecho que no puede ocurrir.

□

Por lo tanto, un subespacio contenido en $\mathbb{V}$ es

$$\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_k \quad \forall T \in \tau_h\}.$$

La razón por la que elegimos espacios polinomiales a trozos es que facilitan las cuentas que debemos hacer para resolver el sistema lineal asociado al PVD.

No vamos a probar en general que este subespacio tiene dimensión finita sino que vamos a verlo en algunos casos particulares a modo de ejemplificar cómo construir las funciones base.

Supongamos que $n = 2$ y que T es un triángulo. ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{P}_1(T)$? Una función lineal v en dos variables tiene tres grados de libertad ya que es de la forma $v(x) = ax + by + c$. Luego, queda unívocamente determinada por su valor en tres puntos de T a los que llamaremos nodos. Equivalentemente, $\dim(P_1(T)) = 3$. Ahora bien, como queremos que la función sea continua en Ω necesitamos que se "pegue" bien en el borde de dos triángulos adyacentes, es decir, en el lado común a dos triángulos vecinos. Si consideramos la restricción de v a un lado del borde de T (que es un segmento) tenemos una función lineal en una variable. Luego, debemos definir a la función en dos nodos por cada lado de cada triángulo. Además, los vértices de la triangulación deben ser nodos para asegurar la continuidad de la función en el caso en que dos triángulos vecinos compartan solamente un vértice. Si necesitamos que haya tres nodos por triángulo, dos por cada lado y que los tres vértices sean nodos, la única forma de satisfacer esto es elegiendo como nodos a los vértices de los triángulos.

Veamos cómo construir una base de $\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1 \quad \forall T \in \tau_h\}$. Sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ los vértices de la triangulación. Definimos las funciones de Lagrange $\phi_1, \cdots, \phi_N$ de la siguiente manera: la función ϕ_i es continua en $\overline{\Omega}$, $\phi_i|_T \in \mathcal{P}_1(T)$ para cada $T \in \tau_h$ y $\phi_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. Veamos que el conjunto $\{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$ es una base de $\mathbb{V}_h$. Dada $v \in \mathbb{V}_h$, probemos que $v(x) = \sum_{j=1}^{N} v(\alpha_j)\phi_j(x)$. En efecto, las dos funciones son lineales cuando se las restringe a cada elemento $T \in \tau_h$ y coinciden en tres puntos (los vértices de T). Luego, son idénticas en cada triángulo y, como consecuencia, son iguales en $\overline{\Omega}$. Para ver que son linealmente independientes, supongamos que $\sum_{j=1}^{N} \gamma_j\phi_j(x) = 0$. Evaluando en α_i obtenemos que $\gamma_i = 0$, como queríamos probar.

Si por las condiciones de contorno del problema resulta que el espacio adecuado para la formulación variacional es $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$ en lugar de $H^1(\Omega)$, entonces el subespacio de dimensión finita que podemos tomar es

$$\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_k \quad \forall T \in \tau_h \text{ y } v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Si pedimos que los polinomios tengan grado menor o igual que uno, podemos trabajar con esta base: tomamos $\beta_1, \cdots, \beta_M$ los vértices de la triangulación que están en el interior de Ω y usamos las funciones de Lagrange asociadas a esos nodos.

Supongamos ahora que queremos encontrar una base de $\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_2(T) \quad \forall T \in \tau_h\}$, donde Ω es un polígono convexo en $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{P}_2(T)$? Un polinomio de grado dos tiene seis grados de libertad. Por lo tanto, fijando los valores en seis nodos por triángulo tenemos definida a una única función en Ω que, restringida a cada triángulo, es un polinomio de grado a lo sumo dos. Si queremos que la función resulte continua, debemos elegir a los vértices del triángulo como nodos y, además, poner suficientes nodos por cada lado de cada triángulo. ¿Cuántos? Un polinomio de grado dos en dos variables es un polinomio de grado dos en una variable cuando se lo restringe a una recta. Luego, debemos elegir tres nodos por cada lado de cada triángulo y seis en total. La única forma de satisfacer estas condiciones es eligiendo a los tres vértices del triángulo y, para cada lado, a un nodo interior, por ejemplo, el punto medio. Una base de $\mathbb{V}_h$ estará definida por las funciones de Lagrange asociadas a los nodos de la triangulación.

Hagamos un último ejemplo. En este caso, Ω es un poliedro en $\mathbb{R}^3$ y los elementos T de la triangulación son tetraedros. Queremos hallar una base para el subespacio $\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau_h\}$. Una función que pertenece a $\mathcal{P}_1(T)$ es un polinomio de grado a lo sumo uno en tres variables, o sea que es de la forma $ax + by + cz + d$. Luego, fijando los valores en cuatro nodos por tetraedo tenemos definida a una única función. Igual que antes, para tener asegurada la continuidad de la función en Ω debemos fijar su valor en tres nodos por cada cara de T y en los vértices. Tenemos entonces que elegir como nodos a los cuatro vérices de T y trabajar con las funciones de Lagrange asociadas a ellos.

CAPíTULO 2

Problemas de autovalores lineales

Los problemas de autovalores surgen de manera natural cuando se quiere resolver un problema de evolución (o sea dependiente del tiempo) por medio de separación de variables. Consideremos, por ejemplo, la ecuación del calor en una dimensión espacial:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1,\, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geq 0 \qquad \text{(condición de borde)} \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq 1 \qquad \text{(condición inicial).} \end{cases}$$

Si proponemos como solución $u(x,t) = f(x)g(t)$ resulta que $f(x)g'(t) = f''(x)g(t)$, de donde $\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)}$. Como el lado izquierdo de la igualdad es una función que depende sólo de x y el lado derecho depende sólo de t, no queda otra opción más que $\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda$, para alguna constante λ. Por otro lado, la condición de borde nos dice que $f(0)g(t) = f(1)g(t) = 0$ para todo tiempo t y, como buscamos una solución no trivial, pedimos que $f(0) = f(1) = 0$. Así obtenemos los siguientes problemas de autovalores:

$$\begin{cases} -f'' = \lambda f \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g' + \lambda g = 0.$$

Podemos trabajar análogamente con un problema n-dimensional: dados $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera suficientemente regular (por ejemplo, Lipschitz), una función $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ y $T > 0$, buscamos una función $u = u(x,t) : \Omega \times (0,T) \to R$ que satisfaga:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Si proponemos que $u(x,t) = F(x)G(t)$ obtenemos que $F(x)G'(t) - \Delta F(x)G(t) = 0$ y, luego, $\frac{\Delta F(x)}{F(x)} = \frac{F'(t)}{G(t)} = -\lambda$, para cierta constante λ. Razonando como antes llegamos a que las funciones F y G buscadas satisfacen los siguientes problemas de autovalores:

$$\begin{cases} -\Delta F = \lambda F & \text{en } \Omega \\ F = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G' + \lambda G = 0.$$

1. Problema modelo en el caso lineal

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 a trozos. Para $1 \leq i,j \leq n$, sean a_{ij} funciones acotadas de clase C^1 definidas en Ω, y sea c una función no negativa y acotada en Ω . Suponemos que la matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ es

- simétrica: $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, y
- uniformemente elíptica: existe una constante positiva θ tal que $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \theta\,|\xi|^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x \in \Omega$.

Introduzcamos el operador en forma de divergencia

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + cu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu$$

y consideremos el problema de hallar un número real λ tal que exista una solución débil u de

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Para definir qué es una solución débil de este problema tenemos que hallar su formulación variacional. Para eso tomemos una función test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega u\,\varphi\,dx &= \int_\Omega \mathcal{L}u\,\varphi\,dx \\ &= \int_\Omega \left(-\operatorname{div}(A\nabla u)\,\varphi + c\,u\,\varphi\right)\,dx \\ &= \int_\Omega A\nabla u\nabla\varphi\,dx - \int_{\partial\Omega} A\nabla u\,\nu\,\varphi\,dS + \int_\Omega c\,u\,\varphi\,dx \\ &= \int_\Omega \left(A\nabla u\nabla\varphi + c\,u\,\varphi\right)\,dx. \end{aligned}$$

Introduciendo la forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $a(u,v) = \int_\Omega A\nabla u\nabla v + \int_\Omega cuv$ y notando con $(\cdot,\cdot)$ el producto interno de $L^2(\Omega)$, el problema se puede reescribir del siguiente modo:

"Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, no nula, tales que $a(u,v) = \lambda\,(u,v)$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$."

En ese caso se dice que λ es un autovalor de $\mathcal{L}$ y que u es una autofunción asociada a λ.

Es claro que a es simétrica y como los coeficientes a_{ij} son acotados resulta que a es continua. Su coercitividad se obtiene de la desigualdad de Poincaré. En efecto, dada $u \in H_0^1(\Omega)$, como $c(x) \geq 0$ en casi todo punto de Ω,

$$a(u,u) \geq \int_\Omega A(x)|\nabla u|^2 \geq \theta \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \alpha\|u\|_{1,\Omega}^2.$$

Luego, a define un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ y se tiene que $(H_0^1(\Omega), a(\cdot,\cdot))$ es un espacio de Hilbert. A la norma inducida por a se la llama *norma energía* y es equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega)$.

Para demostrar el próximo teorema vamos a usar un resultado clásico del análisis funcional conocido como Teorema Espectral. Sean dados un espacio de Hilbert $\mathbb{V}$ con producto interno $a(\cdot,\cdot)$ y un operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{V})$.

Definición 2.1.

1. *Este operador se dice compacto si dada una sucesión acotada* $(v_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{V}$ *existe una subsucesión* $(v_{k_j})_{j\geq 1}$ *tal que* $(Tv_{k_j})_{j\geq 1}$ *converge en* $\mathbb{V}$.
2. T *se dice simétrico si* $a(Tu,v) = a(u,Tv)$ $\forall u, v \in \mathbb{V}$.
3. T *se dice positivo si* $a(Tv,v) > 0$ $\forall v \in \mathbb{V}$, $v \neq 0$.

Teorema espectral. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ un operador compacto, simétrico y positivo en un espacio de Hilbert $\mathbb{V}$ de dimensión infinita. Entonces, existen una sucesión $(\mu_m)_{m\geq 1}$ positiva, monótona decreciente y convergente a 0, y una base ortonormal $(v_m)_{m\geq 1}$ de $\mathbb{V}$ tales que $Tv_m = \mu_m v_m$ $\forall m \geq 1$.*

Ahora sí estamos en condiciones de enunciar el teorema que resuelve el problema.

Teorema 2.1. *Si repetimos los autovalores de acuerdo a su multiplicidad se tiene que el espectro de $\mathcal{L}$ está formado por una sucesión $(\lambda_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}$ positiva, monótona creciente y no acotada,*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \nearrow \infty,$$

y que existe una sucesión de autofunciones $(w_m)_{m\geq 1} \subset H_0^1(\Omega)$ que es una base ortonormal de $(L^2(\Omega), (\cdot,\cdot))$. Además, $\left(\frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right)_{m\geq 1}$ es una base ortonormal de $(H_0^1(\Omega), a(\cdot,\cdot))$.

Demostración. La idea de la demostración es construir el operador $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ inverso de $\mathcal{L}$ y probar que es un operador lineal, continuo, simétrico, positivo y compacto. En este caso el teorema espectral nos dará información sobre los autovalores y las autofunciones de T que estarán relacionados con los autovalores y las autofunciones de $\mathcal{L}$.

Tomemos una función $f \in L^2(\Omega)$ y consideremos el problema (*) de hallar una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = (f, v)$ para toda función $v \in H_0^1(\Omega)$. Como la forma bilineal a es simétrica, continua y coercitiva, el teorema de Lax-Milgram nos dice que hay una única solución u. Entonces está bien definido el operador T que asigna a cada $f \in L^2(\Omega)$ la única solución u de (*), $T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, $f \mapsto u$.

Para ver que T es lineal tomemos dos funciones f y $g \in L^2(\Omega)$ y sea $v \in H_0^1(\Omega)$. Como $a(Tf, v) = (f, v)$ y $a(Tg, v) = (g, v)$, $a(Tf + Tg, v) = (f + g, v) = a(T(f + g), v)$. Por lo tanto, $a(T(f+g)-(Tf+Tg), v) = 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Tomando $v = T(f+g)-(Tf+Tg)$ y usando la coercitividad de a resulta que $T(f + g) = Tf + Tg$, como queríamos ver.

El teorema de Lax-Milgram nos dice también que $\|Tf\|_{1,\Omega} = \|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{0,\Omega}$, donde α es la constante de coercitividad de a. Tenemos entonces que $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$. Consideremos la restricción de T a $H_0^1(\Omega)$, a la que vamos a seguir llamando T. Este operador pertenece a $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$. Veamos que es compacto. En efecto, dada una sucesión acotada $(f_k)_{k\geq 1}$, como la inclusión de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, existen una subsucesión $(f_{k_j})_j$ y una función $f \in L^2(\Omega)$ tales que f_{k_j} converge a f en $L^2(\Omega)$. Como

$$\|Tf_{k_j} - Tf\|_E \leq \sqrt{M}\|Tf_{k_j} - Tf\|_{1,\Omega} = \sqrt{M}\|T(f_{k_j} - f)\|_{1,\Omega} \leq \frac{\sqrt{M}}{\alpha}\|f_{k_j} - f\|_{0,\Omega},$$

concluimos que Tf_{k_j} converge a Tf en $H_0^1(\Omega)$.

Falta ver que T es simétrico y positivo. Dadas u y $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(Tu, v) = (u, v) = (v, u) = a(Tv, u) = a(u, Tv) \quad \text{y}$$

$$a(Tu, u) = (u, u) > 0 \text{ si } u \neq 0.$$

Por el teorema espectral sabemos que existen una sucesión $(\mu_m)_{m\geq 1}$ de autovalores de T de multiplicidad finita con (μ_m) positiva, monótona decreciente y convergente a 0, y una base ortonormal $(v_m)_m$ de $(H_0^1(\Omega), a(\cdot,\cdot))$ tal que $Tv_m = \mu_m v_m$ para todo $m \geq 1$. Luego, $a(\mu_m v_m, v) = a(Tv_m, v) = (v_m, v)$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Definiendo $\lambda_m = \frac{1}{\mu_m}$ y $w_m = \frac{v_m}{\sqrt{\mu_m}}$, tenemos que $a(w_m, v) = \lambda_m(w_m, v)$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, es decir, λ_m y w_m son respectivamente autovalores y autofunciones de $\mathcal{L}$. La sucesión de autovalores verifica ser positiva, monótona creciente y divergente. Como $\frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}} = v_m$, la última afirmación del teorema es cierta. Veamos ahora que $(w_m)_{m\geq 1}$ es ortonormal con el producto interno de $L^2(\Omega)$:

$$(w_m, w_j) = (\frac{v_m}{\sqrt{\mu_m}}, \frac{v_j}{\sqrt{\mu_j}}) = \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_j}} \frac{1}{\mu_m}(v_m, v_j) = \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_j}} a(v_m, v_j) = \delta_{mj}.$$

Para terminar la demostración del teorema resta ver que $(w_m)_{m\geq 1}$ es una base de $(L^2(\Omega), (\cdot,\cdot))$. Para ello veamos que dada una función $f \in L^2(\Omega)$ para la cual $(f, w_m) = 0$ $\forall m \geq 1$, resulta que $f = 0$. Puesto que $(f, w_m) = \frac{1}{\sqrt{\mu_m}}(f, v_m)$, se tiene que $(f, v_m) = 0$ para todo $m \geq 1$. Sean $v \in H_0^1(\Omega)$ y $\epsilon > 0$. Como $(v_m)_{m\geq 1}$ es una base de $(H_0^1(\Omega), a(\cdot,\cdot))$, deben existir un número natural N y coeficientes reales $(\alpha_m)_{m=1}^N$ tales que $\|v - \sum_{m=1}^N \alpha_m v_m\|_E \leq \epsilon$. Así,

$$\begin{aligned}(f, v) &= (f, v - \sum_{m=1}^N \alpha_m v_m) + \sum_{m=1}^N \alpha_m (f, v_m) = (f, v - \sum_{m=1}^N \alpha_m v_m) \\ &\leq \|f\|_{0,\Omega} \left\| v - \sum_{m=1}^N \alpha_m v_m \right\|_{0,\Omega} \leq c\|f\|_{0,\Omega}\epsilon.\end{aligned}$$

Como ϵ era arbitrario debe ser $(f, v) = 0$. Al ser $H_0^1(\Omega)$ denso en $L^2(\Omega)$, concluimos que $(f, v) = 0$ $\forall v \in L^2(\Omega)$ y, luego, $f = 0$.

□

Observación. Algo que nos será útil más adelante y que es una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente escritura para las funciones de $L^2(\Omega)$ y de $H_0^1(\Omega)$. Dadas $u \in L^2(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$u = \sum_{m\geq 1} (u, w_m) w_m \quad \text{y} \quad \|u\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{m\geq 1} (u, w_m)^2,$$

$$v = \sum_{m\geq 1} a\left(v, \frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right) \frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}} = \sum_{m\geq 1} (v, w_m) w_m \quad \text{y} \quad a(v, v) = \sum_{m\geq 1} a\left(v, \frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right)^2 = \sum_{m\geq 1} \lambda_m (v, w_m)^2,$$

porque $a(v, \frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} a(v, w_m) = \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_m}}(v, w_m) = \sqrt{\lambda_m}(v, w_m)$.

Observación. Como vamos a ver más adelante se puede relajar la hipótesis $c \geq 0$. En ese caso podría haber autovalores negativos aunque sólo un número finito de ellos.

Comentario sobre la regularidad de las autofunciones. Evidentemente, si u es una autofunción asociada a λ en sentido clásico, es decir que es solución clásica del problema (3), entonces es una solución débil o solución del problema variacional. El recíproco es cierto si $\partial\Omega, a_{ij}$ y c son suficientemente suaves. Si el par (λ, u) es una solución del problema variacional y se tiene además que la frontera de Ω es Lipschitz y que $u \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces la solución débil es una solución clásica. Una condición suficiente para que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es que

A1. $\partial\Omega$ sea de clase C^m,
A2. $a_{ij} \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$ y
A3. $c \in C^{m-2}(\overline{\Omega})$,

donde $m = [\frac{n}{2}] + 3$. Por otro lado, si u es una autofunción del problema variacional asociada a λ, una condición suficiente para que $u \in H^k(\Omega)$ para algún $k \geq 2$ es que

B1. $\partial\Omega$ sea de clase C^k,
B2. $a_{ij} \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ y

B3. $c \in C^{k-2}(\overline{\Omega})$.

En ese caso se tiene que $u \in H^k(\Omega)$ y $\|u\|_{k,\Omega} \leq C\lambda^{k/2}\|u\|_{0,\Omega}$. Se pueden leer estos resultados en [**2**], teoremas 3.9 y 9.8.

2. El primer autovalor

En la bibliografía se suele referir a λ_1 como el *autovalor principal* y cuenta con propiedades muy lindas de las que nos ocuparemos en el próximo teorema. Antes veamos en algunos ejemplos la relevancia del primer autovalor.

Consideremos la ecuación de calor

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = 0 & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $T > 0$ y $u_0 \in L^2(\Omega)$. Si proponemos $u(x,t) = F(x)G(t)$, obtenemos los problemas de autovalores

$$\begin{cases} \mathcal{L}F = \lambda F & \text{en } \Omega \\ F = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G' + \lambda G = 0 \text{ en } [0,T].$$

Sabemos que para cada $m \geq 1$, $G_m(t) = e^{-\lambda_m t}$ y $F_m(x) = c_m w_m$ son soluciones, donde $c_m \in \mathbb{R}$ y $(\lambda_m)_m$ y $(w_m)_m$ son respectivamente la sucesión de autovalores y autofunciones del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

dadas por el teorema 2.1. Luego, para cada m mayor o igual a 1, $u_m(x,t) = c_m e^{-\lambda_m t} w_m(x)$ es solución de la ecuación (sin tener en cuenta el dato inicial). Como $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 = \sum_{m\geq 1}(u_0, w_m)w_m$. Proponemos entonces como solución

$$u(x,t) = \sum_{m\geq 1}(u_0, w_m)e^{-\lambda_m t}w_m(x).$$

Veamos que esta función está bien definida. Dados $t \in [0,T]$ y $\epsilon > 0$,

$$\|u_n(x,t) - u_m(x,t)\|_{0,\Omega}^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} (u_0, w_i)e^{-\lambda_i t}w_i(x) \right\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{i=n+1}^{m} (u_0, w_i)^2 e^{-2\lambda_i t} \leq \sum_{i=n+1}^{m} (u_0, w_i)^2 < \epsilon$$

si $n, m \geq n_0$, así que la sucesión $(u_n(\cdot,t))_n$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$ uniformemente en t. Luego, para cada t existe $u(x,t)$ y se tiene que $u(x,t) \in L^2(\Omega)$. Se puede probar (cf. [**13**]) que $u \in C^\infty(\Omega\times(0,T))$ y que es solución de la ecuación. Además,

$$\|u(x,t)\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{m\geq 1}(u_0, w_m)^2 e^{-2\lambda_m t} \leq e^{-2\lambda_1 t}\sum_{m\geq 1}(u_0, w_m)^2 = e^{-2\lambda_1 t}.$$

Luego, $u(x,t)$ tiende a 0 en $L^2(\Omega)$ cuando el tiempo tiende a infinito, y la tasa de convergencia está dada por el autovalor principal.

Si se considera la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

que es el caso particular de nuestro problema modelo en el que la matriz A es la identidad y $c = 0$, el primer autovalor representa la frecuencia principal: una autofunción asociada a λ_1 describe la forma de la membrana Ω cuando vibra emitiendo su tono más grave.

Dada una función $u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$, se define su *cociente de Rayleigh* como $\mathcal{R}(u) = \frac{a(u,u)}{\|u\|_{0,\Omega}^2}$.

Teorema 2.2. $\lambda_1 = \min\{\mathcal{R}(u) : u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0\}$.

Demostración. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ no nula.

$$\mathcal{R}(u) = \frac{a(u,u)}{\|u\|_{0,\Omega}^2} = \frac{\sum_{k\geq 1} \lambda_k (u, w_k)^2}{\sum_{k\geq 1} (u, w_k)^2} \geq \lambda_1.$$

Además, si w_1 es una autofunción asociada a λ_1, entonces

$$\mathcal{R}(w_1) = \frac{\lambda_1(w_1, w_1)}{\|w_1\|_{0,\Omega}^2} = \lambda_1. \qquad \square$$

Teorema 2.3. *Supongamos que estamos en las condiciones de regularidad dadas por las condiciones A*1*, A*2 *y A*3*.*

1. *La primera autofunción no cambia de signo y, por lo tanto, se puede elegir positiva.*
2. *El primer autovalor es simple.*

Demostración. 1. Afirmación: sea $u \in H_0^1(\Omega)$ no nula; una condición necesaria y suficiente para que $a(u,u) = \lambda_1 \|u\|_{0,\Omega}^2$ es que u sea solución débil de

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda_1 u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para probar la suficiencia basta tomar $v = u$ en la definición de solución débil. Para probar la otra implicación podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|u\|_{0,\Omega} = 1$.

$$\sum_{k\geq 1} \lambda_k (u, w_k)^2 = a(u,u) = \lambda_1 = \lambda_1 \|u\|_{0,\Omega}^2 = \lambda_1 \sum_{k\geq 1} (u, w_k)^2.$$

Luego, $\sum_{k\geq 1} (\lambda_k - \lambda_1)(u, w_k)^2 = 0$ y, como $\lambda_k \geq \lambda_1$, debe ser $(\lambda_k - \lambda_1)(u, w_k)^2 = 0$. Por lo tanto, si $\lambda_k > \lambda_1$, $(u, w_k) = 0$. Sea m la multiplicidad de λ_1. Tenemos que $(u, w_k) = 0$ para todo $k > m$ y $\lambda_k = \lambda_1$ para $1 \leq k \leq m$, por lo que $u = \sum_{k=1}^m (u, w_k)\, w_k$. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = \sum_{k=1}^m (u, w_k) a(w_k, v) = \sum_{k=1}^m (u, w_k) \lambda_1 (w_k, v) = \lambda_1 (u, v)$$

y, como $u \in H_0^1(\Omega)$, u es solución débil de la ecuación.

Ahora sí probemos la parte 1 del teorema. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una autofunción asociada al autovalor principal con $\|u\|_{0,\Omega} = 1$. Tenemos que probar que tiene signo constante (y luego podemos suponer que es positiva). Para demostrar ésto veamos que o bien la parte positiva o bien la parte negativa de u es cero. Recordemos que $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$ y se cumple que $u = u^+ - u^-$ y $u^2 = (u^+)^2 + (u^-)^2$. Se sabe que las funciones u^+ y u^- pertenecen a $H_0^1(\Omega)$ y que

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{en } \{u \leq 0\} \end{cases} \quad \text{y} \quad \nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{en } \{u < 0\} \end{cases}$$

lo que junto con el teorema anterior nos da

$$\lambda_1 = a(u,u) = a(u^+ - u^-, u^+ - u^-) = a(u^+, u^+) + a(u^-, u^-) \geq \lambda_1 \|u^+\|_{0,\Omega}^2 + \lambda_1 \|u^-\|_{0,\Omega}^2 = \lambda_1.$$

No queda otra opción más que

$$a(u^+, u^+) = \lambda_1 \|u^+\|_{0,\Omega}^2 \quad \text{y} \quad a(u^-, u^-) = \lambda_1 \|u^-\|_{0,\Omega}^2,$$

y, por la afirmación anterior, obtenemos que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u^+ = \lambda_1 u^+ & \text{en } \Omega \\ \quad u^+ = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u^- = \lambda_1 u^- & \text{en } \Omega \\ \quad u^- = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $u^+ \geq 0$ en Ω, $\mathcal{L}u^+ \geq 0$ en Ω y, luego, por el principio del máximo $u^+ = 0$ en Ω ó $u^+ > 0$ en Ω. Análogamente, $u^- = 0$ en Ω ó $u^- > 0$ en Ω. Dado que $u \neq 0$ ($\|u\|_{0,\Omega} = 1$), o bien $u^+ > 0$ o bien $u^- > 0$. En el primer caso debe ser $u^- = 0$ y, luego, $u = u^+ > 0$ en Ω. En el segundo caso debe ser $u^+ = 0$ y, luego, $u = u^- < 0$ en Ω.

2. Sean u y v dos autofunciones asociadas a λ_1. Nuestro objetivo es probar que son una un múltiplo de la otra. Por la parte 1 del teorema sabemos que ambas tienen signo constante, por lo que $\int_\Omega u \neq 0$ y $\int_\Omega v \neq 0$. Si tomamos $t = \frac{\int_\Omega u}{\int_\Omega v} \in \mathbb{R}$ tenemos que $\int_\Omega u - tv = 0$. Llamemos w a $u - tv$. Supongamos que $w \neq 0$. En ese caso, w es una autofunción asociada a λ_1 y, como consecuencia, tiene signo constante. Pero entonces $0 = \int_\Omega w \neq 0$, lo que no puede ocurrir. Por lo tanto, debe ser $w = 0$, es decir, $u = tv$.

□

Observación. Volvamos a considerar el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

En este caso, la forma bilineal es $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$. Si w_1 es una autofunción asociada a λ_1 se tiene que $\int_\Omega w_1^2 = \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla w_1|^2$. Por otro lado, por el teorema 2.2 tenemos que $\lambda_1 \leq \mathcal{R}(u)$ para cualquier función no nula $u \in H_0^1(\Omega)$, desigualdad que podemos reescribir del siguiente modo: $\int_\Omega u^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2$. Esto muestra que $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ es la constante óptima de la desigualdad de Poincaré.

3. Teoría espectral abstracta

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{H}$ dos espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ de dimensión infinita tales que:

- $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}$ con inclusión continua, es decir que existe una constante $c > 0$ tal que para toda función $u \in \mathbb{V}$ se cumple que $\|u\|_{\mathbb{H}} \leq c\|u\|_{\mathbb{V}}$, y
- $\mathbb{V}$ es denso en $\mathbb{H}$.

Siguiendo la notación de [**19**] notaremos con $(\cdot,\cdot)$ el producto interno de $\mathbb{H}$, con $|\cdot|$ la norma de $\mathbb{H}$ y con $\|\cdot\|$ la norma de $\mathbb{V}$. Sea $a(\cdot,\cdot) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, simétrica, continua y coercitiva. El problema espectral es:

"Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe $u \in \mathbb{V}$, con $|u| = 1$, tal que $a(u,v) = \lambda(u,v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$."

Si tales λ y u existen se llaman respectivamente un *autovalor* y una *autofunción asociada a* λ.

Se podría plantear el problema en el caso complejo, es decir en el caso en que $\mathbb{V}$ y $\mathbb{H}$ son dos espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y la forma $a(\cdot,\cdot)$ es sesquilineal y continua. Pero si pedimos que a sea además hermitiana (o sea que se cumpla que $a(u,v) = \overline{a(v,u)} \quad \forall u, u \in \mathbb{V}$) los autovalores van a ser reales: supongamos que $u \in \mathbb{V}$ es una autofunción asociada a $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego $a(u,v) = \lambda(u,v)$ para toda función $v \in \mathbb{V}$. En particular, para v=u resulta que $a(u,u) = \lambda(u,u)$. Tomando conjugado a ambos lados de la igualdad y usando que a es hermitiana tenemos que $\lambda(u,u) = a(u,u) = \overline{a(u,u)} = \overline{\lambda(u,u)} = \overline{\lambda}(u,u)$ y, luego, $\lambda = \overline{\lambda}$. Por lo tanto, si pedimos que la forma bilineal a sea simétrica podemos restringirnos al caso real.

En la sección anterior estudiamos este problema en el caso particular en que $\mathbb{H} = L^2(\Omega)$, $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$ y $a(u,v) = \int_\Omega (A\nabla u \nabla v + cuv)\,dx$. Sin embargo, en la demostración del teorema 2.1 no usamos quién era específicamente la forma bilineal a sino que sólo usamos que tenía la propiedad de ser simétrica, continua y coercitiva, lo que nos permitió construir el operador solución T que era el inverso del operador $\mathcal{L}$. Vimos que $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$ era un operador compacto, simétrico y positivo y, por lo tanto, estábamos en las hipótesis del teorema espectral. En esta sección podremos repetir las mismas cuentas para el problema espectral abstracto pidiendo que a sea bilineal, simétrica, continua y coercitiva.

Si $a(\cdot,\cdot)$ es bilineal, simétrica, continua (con constante M) y coercitiva (con constante α) en $\mathbb{V}$ podemos definir un operador $T : \mathbb{H} \to \mathbb{V}$ lineal y continuo, más brevemente $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{V})$, de la siguiente manera: dado $f \in \mathbb{H}$, Tf está definido como el único elemento de $\mathbb{V}$ que verifica $a(Tf, v) = (f, v)\ \forall v \in \mathbb{V}$.

En efecto, dada $f \in \mathbb{H}$ definamos el funcional $L_f : \mathbb{V} \to \mathbb{H}$ como $L_f(v) = (f,v)$. Se tiene que $L_f \in \mathbb{V}^*$ y, luego, por el teorema de Lax-Milgram existe un único $Tf \in \mathbb{V}$ tal que $a(Tf,v) = L_f(v) = (f,v)$ para toda $v \in \mathbb{V}$. La linealidad de T se deduce de la bilinealidad y la coercitividad de a (igual que en el problema modelo). Veamos ahora que el operador T es acotado. Por el teorema de Lax-Milgram sabemos que $\|Tf\| \le \frac{1}{\alpha}\|L_f\|_{\mathbb{V}^*}$. Sea $v \in \mathbb{V}$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que la inclusión de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{H}$ es continua obtenemos que $|L_f(v)| = |(f,v)| \le |f||v| \le c|f|\|v\|$ y, luego, $\|L_f\|_{\mathbb{V}^*} \le c|f|$. Por lo tanto, tenemos la siguiente acotación: $\|Tf\| \le \frac{c}{\alpha}|f|$.

Habiendo introducido este operador podemos reescribir el problema espectral de la siguiente manera:

$$\text{“Hallar } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } u \in \mathbb{V}\text{, con } |u| = 1\text{, tal que } u = \lambda T u.\text{”}$$

Notar que al igual que en el problema modelo, los autovalores que estamos buscando son los inversos de los autovalores del operador T.

Como a es bilineal, simétrica, continua y coercitiva, define un producto interno en $\mathbb{V}$ que hace de él un espacio de Hilbert. Vamos a trabajar con $(\mathbb{V}, a(\cdot,\cdot))$ y con la restricción de T a $\mathbb{V}$, a la que seguiremos llamando T. Dada $f \in \mathbb{V}$, $\|Tf\| \le \frac{c}{\alpha}|f| \le \frac{c^2}{\alpha}\|f\|$, así que tenemos que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. Este operador es además simétrico y positivo ya que si u y $v \in \mathbb{V}$,

$$a(Tu, v) = (u, v) = (v, u) = a(Tv, u) = a(u, Tv)$$

y

$$a(Tu, u) = (u, u) = |u|^2 > 0, \text{ si } u \neq 0.$$

Lema 2.1. *Si agregamos la hipótesis de que la inclusión de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{H}$ es compacta, entonces el operador T es compacto.*

Demostración. Sea $(v_k) \subset \mathbb{V}$ una sucesión acotada. Como la inclusión de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{H}$ es compacta, existen una subsucesión (v_{k_j}) y una función $v \in \mathbb{H}$ tales que v_{k_j} converge a v en $\mathbb{H}$. Veamos que (Tv_{k_j}) converge a Tv en $\mathbb{V}$:

$$0 \le \|Tv_{k_j} - Tv\| = \|T(v_{k_j} - v)\| \le \frac{c}{\alpha}|v_{k_j} - v| \to 0. \qquad \square$$

Estamos en condiciones de enunciar el teorema que resuelve el problema.

TEOREMA 2.4. *Si la inclusión de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{H}$ es compacta y $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal, simétrica, continua y coercitiva, entonces existen una sucesión positiva, monótona creciente y no acotada $(\lambda_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}$, y una base ortonormal $(w_m)_{m\geq 1}$ de $\mathbb{H}$ tales que*

$$a(w_m, v) = \lambda_m\,(w_m, v) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad \forall m \geq 1. \tag{4}$$

Además, $\left(\frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right)_{m\geq 1}$ *es una base ortonormal de* $(\mathbb{V}, a(\cdot,\cdot))$.

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la demostración del teorema 2.1. En este caso tenemos $(\mathbb{V}, a(\cdot,\cdot))$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{V})$ un operador simétrico, positivo y compacto. Luego, por el teorema espectral existen una sucesión de autovalores de T, $(\mu_m)_{m\geq 1}$, positiva, monótona decreciente y convergente a cero, y una base ortonormal $(v_m)_{m\geq 1}$ de $\mathbb{V}$ (con la norma inducida por $a(\cdot,\cdot)$) tales que $Tv_m = \mu_m v_m$ para todo $m \geq 1$. Como Tv_m está definido por $a(Tv_m, v) = (v_m, v)$ para todo $v \in \mathbb{V}$, tenemos que

$$a(v_m, v) = \frac{1}{\mu_m}\,(v_m, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Definiendo $\lambda_m = \frac{1}{\mu_m}$ y $w_m = \frac{v_m}{\sqrt{\mu_m}}$, se tiene que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \nearrow \infty$ y se verifica (4). Veamos que (w_m) es ortonormal en $\mathbb{H}$:

$$(w_m, w_j) = \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_j}}\,\frac{1}{\mu_m}\,(v_m, v_j) = \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_j}}\,a(v_m, v_j) = \delta_{mj}.$$

La demostración de que (w_k) es base de $\mathbb{H}$ es idéntica a la del problema modelo y, por tal razón, la omitiremos. Finalmente, la última afirmación es cierta ya que $\frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}} = v_m$. □

OBSERVACIÓN. Al igual que en la sección anterior, este teorema nos da la siguiente escritura para funciones $u \in \mathbb{H}$ y $v \in \mathbb{V}$:

$$u = \sum_{m\geq 1}(u, w_m)w_m \quad \text{y} \quad |u|^2 = \sum_{m\geq 1}(u, w_m)^2,$$

$$v = \sum_{m\geq 1} a\left(v, \frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right)\frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}} = \sum_{m\geq 1}(v, w_m)w_m \quad \text{y} \quad a(v,v) = \sum_{m\geq 1} a\left(v, \frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right)^2 = \sum_{m\geq 1}\lambda_m(v, w_m)^2.$$

OBSERVACIÓN. Se puede reducir la hipótesis de coercitividad sobre $a(\cdot,\cdot)$. Alcanza con pedir que existan $\alpha > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$a(v,v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha\,\|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

En este caso, la forma bilineal $b(u,v) = a(u,v) + \lambda(u,v)$ es simétrica, continua y coercitiva. Luego, por el teorema anterior existen una sucesión positiva, monótona creciente y no acotada, $(\widetilde{\lambda_m})_{m\geq 1}$, y una base ortonormal $(w_m)_{m\geq 1}$ de $\mathbb{H}$ tales que $b(w_m, v) = \widetilde{\lambda_m}\,(w_m, v)$ $\forall v \in \mathbb{V}$ y $\forall m \geq 1$. Equivalentemente,

$$a(w_m, v) = (\widetilde{\lambda_m} - \lambda)\,(w_m, v) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad \forall m \geq 1.$$

Definiendo $\lambda_m = \widetilde{\lambda_m} - \lambda$ se tiene que $-\lambda < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \nearrow \infty$, $(w_m)_m$ es base ortonormal de $\mathbb{H}$ y

$$a(w_m, v) = \lambda_m\,(w_m, v) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad \forall m \geq 1.$$

3.1. Aplicación a problemas elípticos de orden 2.

Vamos a resolver algunos problemas de autovalores que pueden plantearse como casos particulares de la teoría espectral abstracta que acabamos de estudiar. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 a trozos. Tomemos como $\mathbb{H}$ a $L^2(\Omega)$ y como $\mathbb{V}$ a un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ tal que $H_0^1(\Omega) \subset \mathbb{V} \subset H^1(\Omega)$. Se cumple que la inclusión de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{H}$ es continua. Además, como la inclusión de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, la inclusión de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{H}$ también lo es.

Sean $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \le i, j \le n$, y sea $c \in L^\infty(\Omega)$. Supongamos que la matriz $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ es simétrica y uniformemente elíptica. Volvamos a considerar el operador en forma de divergencia que introdujimos en la sección 1, $\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu$, y consideremos el problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u \in \mathbb{V}. \end{cases}$$

Dadas u y $v \in H^1(\Omega)$, sea $a(u, v) = \int_\Omega (A\nabla u \nabla v + cuv)\, dx$. La formulación variacional del problema es

“Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $u \in \mathbb{V}$, con $\|u\|_{0,\Omega} = 1$, tal que $a(u, v) = \lambda(u, v)\ \forall v \in \mathbb{V}$.”

La forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ es simétrica y continua pero no podemos asegurar que sea coercitiva. Vimos antes que en realidad alcanza con pedir que existan $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ tales que $a(v, v) + \lambda\|v\|_{0,\Omega}^2 \ge \alpha\|v\|_{1,\Omega}^2$. Dada $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a(v, v) + \lambda\|v\|_{0,\Omega}^2 &= \int_\Omega (A|\nabla v|^2 + cv^2 + \lambda v^2) \ge \theta\|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 + (\lambda - \|c\|_{\infty,\Omega})\|v\|_{0,\Omega}^2 \\ &\ge \min\{\theta, \lambda - \|c\|_{\infty,\Omega}\}\|v\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Luego, alcanza con tomar cualquier $\lambda > \|c\|_{\infty,\Omega}$. Aplicando el teorema 2.4 a la forma bilineal $b(u, v) = a(u, v) + \lambda(u, v)$ se tiene que existe una sucesión $(\lambda_m)_{m\ge1}$ monótona creciente y no acotada, con $\lambda_m > -\lambda$ para todo m, y que existe una base $(w_m)_m$ de $\mathbb{V}$ que es ortonormal en $L^2(\Omega)$ tal que $a(w_m, v) = \lambda_m(w_m, v)$ para toda función $v \in \mathbb{V}$ y para todo $m \ge 1$.

Para el *problema de Dirichlet* (que es el problema modelo que estudiamos en la sección anterior)

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

hay que tomar $\mathbb{H} = L^2(\Omega)$ y $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$. Tenemos que la sucesión de autovalores es mayor a $-\lambda$, monótona creciente y no acotada y que existe una sucesión de autofunciones que es una base de $H_0^1(\Omega)$ y que es ortonormal en $L^2(\Omega)$. Como habíamos dicho antes puede haber autovalores negativos pero sólo un número finito de ellos. En el caso en que $c(x) \ge 0$ para casi todo $x \in \Omega$, la forma bilineal a es coercitiva y entonces se puede tomar $\lambda = 0$. Luego, los autovalores son positivos.

Si consideramos el *Problema de Neumann*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i$, el espacio natural para plantearlo es $H^1(\Omega)$ ya que el término de borde que aparce en la formulación variacional, $\int_{\partial\Omega} A\nabla u\, \nu\, \varphi\, dS$, no es otra cosa que $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \varphi\, dS = 0$. Hay que tomar entonces $\mathbb{H} = L^2(\Omega)$ y $\mathbb{V} = H^1(\Omega)$ y tenemos que la sucesión de autovalores del problema es mayor a $-\lambda$, monótona creciente y no acotada, y que existe una sucesión de autofunciones que es una base de $H^1(\Omega)$ y que es ortonormal en $L^2(\Omega)$. Si $c(x) \geq 0$ para casi todo $x \in \Omega$, tenemos que $a(u,u) \geq \theta \|\nabla u\|_{L^2}^2$ y luego $b(u,u) = a(u,u) + \lambda \|u\|_{0,\Omega}^2 \geq \text{mín}\{\theta, \lambda\} \|u\|_{1,\Omega}^2$, o sea que alcanza con pedir que $\lambda > 0$. Tenemos entonces que, en este caso, los autovalores son no negativos. De hecho, 0 es un autovalor asociado a la función constante $u = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$, que es una función de norma 1 en $L^2(\Omega)$.

Consideremos por último el *problema mixto*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 & \text{en } \partial\Omega - \Gamma_0, \end{cases}$$

donde Γ_0 es un sunconjunto de $\partial\Omega$ con medida (del borde) positiva. Tomando $\mathbb{H} = L^2(\Omega)$ y $\mathbb{V} = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$, se tiene que la sucesión de autovalores del problema es monótona creciente, no acotada y mayor a $-\lambda$, y existe una sucesión de autofunciones que es una base de $\mathbb{V}$ y que es ortonormal en $L^2(\Omega)$. Igual que antes, si $c(x) \geq 0$ para casi todo $x \in \Omega$, los autovalores son no negativos.

4. Caracterización de los autovalores por medio del cociente de Rayleigh

Volvamos al contexto abstracto. Tenemos dos espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ de dimensión infinita, $\mathbb{V}$ y $\mathbb{H}$, tales que $\mathbb{V}$ es denso en $\mathbb{H}$ y la inclusión de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{H}$ es compacta, y una forma bilineal, simétrica, continua y coercitiva $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. Vimos en el teorema 2.4 que existen una sucesión $(\lambda_m)_{m\geq 1}$ positiva, monótona creciente y no acotada, y una base ortonormal $(w_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{V}$ de $\mathbb{H}$ tales que, para cada $m \geq 1$, $a(w_m, v) = \lambda_m (w_m, v)$ $\forall v \in \mathbb{V}$. Como $\left(\frac{w_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right)_m$ es una base ortonormal de $(\mathbb{V}, a(\cdot,\cdot))$ vimos que, dada $v \in \mathbb{V}$,

$$v = \sum_{m\geq 1} (v, w_m) w_m, \;\; |v|^2 = \sum_{m\geq 1} (v, w_m)^2 \;\text{ y }\; a(v,v) = \sum_{m\geq 1} \lambda_m (v, w_m)^2.$$

Dada $v \in \mathbb{V}$ no nula, su cociente de Rayleigh se define como $\mathcal{R}(v) = \frac{a(v,v)}{|v|^2}$. Queremos caracterizar los autovalores del problema espectral abstracto usando el cociente de Rayleigh. Esta caracterización nos será útil en la sección siguiente cuando nos ocupemos de aproximar numéricamente los autovalores.

Llamemos $\alpha_m = (v, w_m)$. Tenemos que

$$\mathcal{R}(v) = \frac{\sum_{m\geq 1} \lambda_m \alpha_m^2}{\sum_{m\geq 1} \alpha_m^2} \geq \lambda_1.$$

Por otro lado, $\mathcal{R}(w_j) = \frac{a(w_j,w_j)}{|w_j|^2} = \frac{\lambda_j (w_j,w_j)}{|w_j|^2} = \lambda_j$. Conluimos entonces que

$$\lambda_1 = \text{mín}\{\mathcal{R}(v) : v \in \mathbb{V}, v \neq 0\}.$$

Sea V_m el subespacio de $\mathbb{V}$ generado por las m primeras autofunciones, $V_m = \langle w_1, w_2, \cdots, w_m \rangle$. Denotemos por $V_m^\perp$ su complemento ortogonal:

$$\begin{aligned} V_m^\perp &= \{v \in \mathbb{V} : a(v, w_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq m\} \\ &= \{v \in \mathbb{V} : (v, w_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq m\}. \end{aligned}$$

Tomemos $v \in V_{m-1}^{\perp}$, $v \neq 0$. Tenemos que $v = \sum_{i\geq 1} \alpha_i w_i = \sum_{i\geq m} \alpha_i w_i$. Entonces, $\mathcal{R}(v) = \frac{\sum_{i\geq m} \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i\geq m} \alpha_i^2} \geq \lambda_m$ y, como $\mathcal{R}(w_m) = \lambda_m$, resulta que

$$\lambda_m = \min_{\substack{v\in V_{m-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} \mathcal{R}(v). \tag{5}$$

Teorema 2.5 (Principio min-max de Courant). *Bajo las hipótesis del teorema 2.4 se tiene que*

$$\lambda_m = \min_{E_m\in\Sigma_m} \max_{\substack{v\in E_m\\ v\neq 0}} \mathcal{R}(v),$$

donde Σ_m es la familia de todos los subespacios de $\mathbb{V}$ de dimensión m.

Demostración. Tomemos $E_m = V_m$. Sea $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \in V_m$, $v \neq 0$. $\mathcal{R}(v) = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2} \leq \lambda_m$ y, como $\mathcal{R}(w_m) = \lambda_m$ y $w_m \in V_m$, tenemos que

$$\lambda_m = \max_{\substack{v\in V_m\\ v\neq 0}} \mathcal{R}(v).$$

Por lo tanto, alcanza con ver que dado un subespacio $E_m \subset \mathbb{V}$ de dimensión m,

$$\lambda_m \leq \max_{\substack{v\in E_m\\ v\neq 0}} \mathcal{R}(v).$$

Como la dimensión de E_m es m y $V_{m-1}^{\perp} = \langle w_m, w_{m+1}, \cdots \rangle$, debe existir algún elemento no nulo $w \in E_m \bigcap V_{m-1}^{\perp}$. Por (5), $\lambda_m = \min_{\substack{v\in V_{m-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} \mathcal{R}(v)$ y, luego,

$$\lambda_m \leq \mathcal{R}(w) \leq \max_{\substack{v\in E_m\\ v\neq 0}} \mathcal{R}(v). \qquad \square$$

5. Aproximación variacional de problemas espectrales

En esta sección vamos a estudiar cómo aproximar los autovalores y las autofunciones del problema espectral general. Sea $\mathbb{V}_h$ un subespacio de $\mathbb{V}$ de dimensión finita $N = N(h)$. Consideremos el problema variacional discreto

"Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $u_h \in \mathbb{V}_h$ no nulo tal que $a(u_h, v_h) = \lambda(u_h, v_h)\ \forall v_h \in \mathbb{V}_h$."

Teorema 2.6. *Bajo las hipótesis del teorema 2.4 se tiene que los autovalores del problema discreto forman una sucesión positiva y monótona creciente, $0 < \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \cdots \leq \lambda_{N,h}$, y que existe una base $(w_{m,h})_{m=1}^N$ de $\mathbb{V}_h$ que es ortonormal en $\mathbb{H}$ tal que $a(w_{m,h}, v_h) = \lambda_{m,h}(w_{m,h}, v_h)$ para toda $v_h \in \mathbb{V}_h$ y para todo $1 \leq m \leq N$.*

Demostración. Para probar el teorema vamos a traducir el problema de autovalores en un sistema matricial. Este método es el que se usa en la práctica para encontrar los autovalores y las autofunciones del problema discreto.

Sea $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N\}$ una base de $\mathbb{V}_h$. Pedir que $u_h \in \mathbb{V}_h$ verifique $a(u_h, v_h) = \lambda(u_h, v_h)$ para toda $v_h \in \mathbb{V}_h$ es equivalente a pedir que u_h verifique $a(u_h, \phi_i) = \lambda(u_h, \phi_i)\ \forall 1 \leq i \leq N$. La función u_h que buscamos se escribe $u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j$ y, como a es bilineal, buscar u_h es equivalente a buscar coeficientes reales $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ tales que

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j a(\phi_j, \phi_i) = \lambda \sum_{j=1}^N (\phi_j, \phi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq N.$$

Introduzcamos las matrices simétricas de $N \times N$, $(R)_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$ y $(M)_{ij} = (\phi_j, \phi_i)$, que se llaman matrices de rigidez y de masa respectivamente. Con esta notación el problema se traduce en hallar $\alpha \in \mathbb{R}^N$ tal que $R\alpha = \lambda M\alpha$. Estas matrices son definidas positivas ya que si $v \in \mathbb{V}_h$ es no nulo, escribiendo $v = \sum_{i=1}^N v_i\phi_i$, tenemos que

$$vMv^t = \sum_{i,j=1}^N (\phi_j, \phi_i)v_iv_j = \left(\sum_{j=1}^N v_j\phi_j, \sum_{i=1}^N v_i\phi_i\right) = (v, v) > 0$$

y

$$vRv^t = \sum_{i,j=1}^N a(\phi_j, \phi_i)v_iv_j = a\left(\sum_{j=1}^N v_j\phi_j, \sum_{i=1}^N v_i\phi_i\right) = a(v, v) > 0.$$

Sea $M = LL^t$ la descomposición de Cholesky de M, es decir, $L \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es triangular inferior y $L_{ii} > 0$ para $i = 1, \cdots, N$. La ecuación $R\alpha = \lambda M\alpha$ es equivalente a la ecuación $L^{-1}R(L^t)^{-1}L^t\alpha = \lambda L^t\alpha$. Llamando $\beta = L^t\alpha \in \mathbb{R}^N$, obtenemos el siguiente problema espectral matricial equivalente:

$$L^{-1}R(L^t)^{-1}\beta = \lambda\beta.$$

Como la matriz $L^{-1}R(L^t)^{-1}$ es simétrica y definida positiva, existen una sucesión $0 < \lambda_{1,h} \leq \cdots \leq \lambda_{N,h}$ y una base ortonormal $(\beta_i)_{i=1}^N$ de $\mathbb{R}^N$ tales que $L^{-1}R(L^t)^{-1}\beta_i = \lambda_{i,h}\beta_i$ para $1 \leq i \leq N$. Tomando $\alpha_i = (L^t)^{-1}\beta_i$ se tiene que $R\alpha_i = \lambda_{i,h}M\alpha_i$. Si tomamos $w_{i,h} = \sum_{l=1}^N (\alpha_i)_l\phi_l$, donde $(\alpha_i)_l$ es la l-ésima componente del vector α_i, resulta que $(w_{i,h})_{i=1}^N$ es una base de $\mathbb{V}_h$. Como $R\alpha_i = \lambda_{i,h}M\alpha_i$, obtenemos que $a(w_{i,h}, \phi_j) = \lambda_{i,h}(w_{i,h}, \phi_j)$ para $1 \leq i, j \leq N$. Finalmente,

$$(w_{i,h}, w_{j,h}) = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N (\alpha_i)_l(\alpha_j)_m(\phi_l, \phi_m) = \alpha_j^t M\alpha_i = \beta_j^t L^{-1}M(L^t)^{-1}\beta_i = \beta_j^t\beta_i = \delta_{ij}$$

dice que $(w_{i,h})_{i=1}^N$ es ortonormal en $\mathbb{H}$. □

Observación. Igual que en caso continuo, si uno elimina la hipótesis de coercitividad sobre a y pide a cambio que existan $\alpha > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $a(u, u) + \lambda|u|^2 \geq \alpha\|u\|^2$ para toda $u \in \mathbb{V}$, se tiene que la sucesión de autovalores del problema discreto es monótona creciente y mayor a $-\lambda$.

Observación. Dada $v \in \mathbb{V}_h$, existen únicos coeficientes tales que $v = \sum_{i=1}^N \alpha_iw_{i,h}$. Como $a(w_{i,h}, w_{j,h}) = \lambda_{i,h}(w_{i,h}, w_{j,h}) = \lambda_{i,h}\delta_{ij}$, tenemos que

$$a(v, v) = \sum_{i,j=1}^N \alpha_i\alpha_j a(w_{i,h}, w_{j,h}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2\lambda_{i,h}$$

y

$$|v|^2 = (v, v) = \sum_{i,j=1}^N \alpha_i\alpha_j(w_{i,h}, w_{j,h}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2.$$

De manera análoga al caso continuo se pueden probar las siguientes caracterizaciones de los autovalores vía el cociente de Rayleigh:

$$\lambda_{1,h} = \min_{\substack{v_h\in\mathbb{V}_h \\ v_h\neq 0}} \mathcal{R}(v_h) \quad \text{y} \quad \lambda_{m,h} = \min_{\substack{v_h\in\mathbb{V}_h \\ a(v_h,w_{i,h})=0\ 1\leq i\leq m-1}} \mathcal{R}(v_h).$$

TEOREMA 2.7 (Principio min-max de Courant). *Bajo las hipótesis del teorema 2.4 se tiene que*

$$\lambda_{m,h} = \min_{E_m \in \Sigma_{m,h}} \max_{\substack{v_h \in E_m \\ v_h \neq 0}} \mathcal{R}(v_h),$$

donde $\Sigma_{m,h}$ *es la familia de todos los subespacios* E_m *de* $\mathbb{V}_h$ *de dimensión* m*.*

Como $\mathbb{V}_h$ es un subespacio de $\mathbb{V}$, $\Sigma_{m,h} \subset \Sigma_m$ y, entonces, $\lambda_m \leq \lambda_{m,h}$ para $1 \leq m \leq N$. Nos ocuparemos ahora de acotar $\lambda_{m,h} - \lambda_m$.

Si la forma bilineal a definida en $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ es coercitiva, está bien definido el operador de proyección elíptica de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{V}_h$, $\Pi_h \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}_h)$, que asigna a una función $u \in \mathbb{V}$ el elemento $\Pi_h u \in \mathbb{V}_h$ definido por $a(\Pi_h u - u, v_h) = 0 \; \forall v_h \in \mathbb{V}_h$. El operador $\Pi_h u$ no es otra cosa que la proyección ortogonal de u sobre $\mathbb{V}_h$ con el producto interno $a(\cdot, \cdot)$. Se cumple que $u - \Pi_h u \in \mathbb{V}_h^{\perp}$.

Recordemos que V_m es el subespacio de $\mathbb{V}$ generado por las primeras m autofunciones.

LEMA 2.2. *Para cada* $m = 1, \cdots, N$ *sea* $\sigma_{m,h} = \inf\{|\Pi_h v| : v \in V_m, |v| = 1\}$*. Si* $\sigma_{m,h} > 0$*, entonces*

$$\lambda_{m,h} \leq \sigma_{m,h}^{-2} \lambda_m.$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar el lema vamos a usar la caracterización min-max de $\lambda_{m,h}$ con el subespacio $E_m = \Pi_h V_m$. Veamos entonces que este subespacio tiene dimensión m. La aplicación lineal $\Pi_h : V_m \to \Pi_h V_m$ es un epimorfismo. Si la dimensión de $\Pi_h V_m$ no fuera m entonces esta transformación lineal no sería un isomorfismo y, por lo tanto, existiría un elemento de V_m, $v \neq 0$, tal que $\Pi_h v = 0$. Pero en ese caso sería $\sigma_{m,h} = 0$, contradiciendo la hipótesis del lema.

Tenemos entonces que

$$\lambda_{m,h} \leq \max_{\substack{v_h \in \Pi_h V_m \\ v_h \neq 0}} \mathcal{R}(v_h).$$

Si $v_h \in \Pi_h V_m$ es no nulo, existe un elemento no nulo $v \in V_m$ tal que $v_h = \Pi_h v$. Así, $\mathcal{R}(v_h) = \mathcal{R}(\Pi_h v)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|v| = 1$ ya que $\mathcal{R}(\Pi_h \frac{v}{|v|}) = \mathcal{R}(\Pi_h v)$. Luego,

$$\lambda_{m,h} \leq \max_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \frac{a(\Pi_h v, \Pi_h v)}{|\Pi_h v|^2}.$$

Para terminar la demostración acotemos el numerador de la expresión anterior: $a(\Pi_h v, \Pi_h v) = a(v, \Pi_h v) = a(v, v) - a(v, v - \Pi_h v) = a(v, v) - a(v - \Pi_h v, v - \Pi_h v) \leq a(v, v)$ y, entonces,

$$\lambda_{m,h} \leq \max_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \frac{a(v, v)}{|\Pi_h v|^2} \leq \lambda_m \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \frac{1}{|\Pi_h v|^2} = \lambda_m \sigma_{m,h}^{-2},$$

pues $\lambda_m = \max\{a(v, v) : v \in V_m, |v| = 1\}$. □

Tenemos entonces que acotar inferiormente a $\sigma_{m,h}$.

LEMA 2.3. *Para cada* $m \geq 1$ *existe una constante* $c = c(m) > 0$ *tal que para todo subespacio* $\mathbb{V}_h$ *de* $\mathbb{V}$ *de dimensión* $N \geq m$ *se verifica*

$$\sigma_{m,h}^2 \geq 1 - c \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\|^2.$$

Demostración. Sea $v \in V_m$ con $|v| = 1$. Tenemos que buscar una cota inferior de $|\Pi_h v|^2$. Como

$$\begin{aligned} 1 - |\Pi_h v|^2 = |v|^2 - |\Pi_h v|^2 &= (v - \Pi_h v, v + \Pi_h v) = (v - \Pi_h v, v) + (v - \Pi_h v, \Pi_h v) \\ &= 2(v - \Pi_h v, v) - |v - \Pi_h v|^2, \end{aligned}$$

deducimos que $|\Pi_h v|^2 \geq 1 - 2(v - \Pi_h v, v)$. Mayoremos entonces $(v - \Pi_h v, v)$. Escribiendo $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i$, con $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = 1$, y recordando que $a(v, w_i) = \lambda_i (v, w_i)$ $\forall v \in \mathbb{V}$, tenemos que

$$\begin{aligned} (v - \Pi_h v, v) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i (v - \Pi_h v, w_i) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\lambda_i} a(v - \Pi_h v, w_i) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\lambda_i} a(v - \Pi_h v, w_i - \Pi_h w_i) \\ &= a\left(v - \Pi_h v, \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\lambda_i}(w_i - \Pi_h w_i)\right) \leq M\|v - \Pi_h v\| \left\|\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\lambda_i}(w_i - \Pi_h w_i)\right\| \\ &\leq M\|v - \Pi_h v\| \left(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^m \|w_i - \Pi_h w_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

por la continuidad de a y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Como la sucesión (λ_i) es decreciente, $\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i^2} \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = \frac{1}{\lambda_1^2}$. Por otro lado, $\sum_{i=1}^m \|w_i - \Pi_h w_i\|^2 \leq m \sup\{\|v - \Pi_h v\|^2 : v \in V_m, |v| = 1\}$. Juntando todo llegamos a la siguiente desigualdad

$$(v - \Pi_h v, v) \leq M(\|v - \Pi_h v\|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{m} (\sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{M\sqrt{m}}{\lambda_1} \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\|^2.$$

Luego, $|\Pi_h v|^2 \geq 1 - \frac{2M\sqrt{m}}{\lambda_1} \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\|^2$. □

Una acotación "peor" está dada por:

$$|\Pi_h|^2 \geq 1 - 2(v - \Pi_h v, v) \geq 1 - 2|v - \Pi_h v||v| \geq 1 - 2 \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} |v - \Pi_h v|.$$

Hasta ahora no le pedimos nada al subespacio $\mathbb{V}_h$. Para tener un resultado de convergencia de $\lambda_{m,h}$ a λ_m le vamos a pedir que cumpla la siguiente *hipótesis de aproximación*:

$$\forall\, u \in \mathbb{V} \quad \lim_{h \to 0} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\| = 0.$$

Lema 2.4 (Lema de Céa). *Dado $u \in \mathbb{V}$,*

$$\|u - \Pi_h u\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|.$$

Demostración. Sea $v_h \in \mathbb{V}_h$. Como $\Pi_h u$ es la proyección ortogonal de u sobre $\mathbb{V}_h$ por el producto interno $a(\cdot, \cdot)$, tenemos, usando la continuidad y la coercitividad de a, que

$$\alpha\|u - \Pi_h u\|^2 \leq a(u - \Pi_h u, u - \Pi_h u) = a(u - \Pi_h u, u - v_h) \leq M\|u - \Pi_h u\|\|u - v_h\|,$$

lo que concluye la demostración del lema. □

OBSERVACIÓN. En realidad, usando que a es simétrica se puede mejorar la acotación. Como a define un producto interno se puede usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Habíamos introducido la *norma energía* que era $\|u\|_E = \sqrt{a(u,u)}$. Sea $v_h \in \mathbb{V}_h$,

$$\|u - \Pi_h u\|_E^2 = a(u - \Pi_h u, u - \Pi_h u) = a(u - \Pi_h u, u - v_h) \leq \|u - \Pi_h u\|_E \|u - v_h\|_E.$$

Esto muestra que $\|u - \Pi_h u\|_E \leq \|u - v_h\|_E \ \forall\, v_h \in \mathbb{V}_h$. Luego,

$$\alpha\|u - \Pi_h u\|^2 \leq a(u - \Pi_h u, u - \Pi_h u) = \|u - \Pi_h u\|_E^2 \leq \|u - v_h\|_E^2 \leq M\|u - v_h\|^2$$

y, por lo tanto,

$$\|u - \Pi_h u\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|.$$

TEOREMA 2.8. *Supongamos que se verifican las hipótesis del teorema 2.4. Para cada $m \geq 1$ existen $h_0 > 0$ y una constante $c > 0$ tal que si $h \leq h_0$ y $\mathbb{V}_h$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ de dimensión $N \geq m$ que verifica la hipótesis de aproximación, entonces se tiene que*

$$0 \leq \lambda_{m,h} - \lambda_m \leq c \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|^2.$$

Es importante remarcar que la constante c es independiente del subespacio $\mathbb{V}_h$.

DEMOSTRACIÓN. Por la hipótesis de aproximación y el lema de Céa resulta que

$$\lim_{h \to 0} \|u - \Pi_h u\| = 0 \quad \forall u \in \mathbb{V}.$$

Usando esta última desigualdad podemos probar que

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\| = 0. \tag{6}$$

En efecto, tomemos $v \in V_m$ con $|v| = 1$. Sabemos que $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i$, con $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = 1$. Usando la linealidad del operador Π_h y la desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos acotar de la siguiente manera:

$$\|v - \Pi_h v\| = \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i (w_i - \Pi_h w_i) \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^m \|w_i - \Pi_h w_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y, luego,

$$0 \leq \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\| \leq \left(\sum_{i=1}^m \|w_i - \Pi_h w_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

por ser una suma con finitos términos.

Por el lema 2.3, debe existir un $h_0 > 0$ tal que $\sigma_{m,h}^2 \geq 1 - c \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\|^2 > \frac{1}{2}$ si $h \leq h_0$ y, por el lema 2.2 junto con la igualdad (6), obtenemos que

$$\lambda_{m,h} \leq \frac{1}{1 - c \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\|^2} \lambda_m \leq (1 + c \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\|^2) \lambda_m$$

para otra constante c. Juntando ésto con el lema de Céa llegamos a que

$$\lambda_{m,h} - \lambda_m \leq c \lambda_m \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \|v - \Pi_h v\|^2 \leq C \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|^2,$$

donde $C = \frac{M}{\alpha} c\lambda_m$ es independiente de h. $\square$

OBSERVACIÓN. Bajo las hipótesis del teorema anterior se deduce que $\lim_{h\to 0} \lambda_{m,h} = \lambda_m$.

5.1. Aproximación de autofunciones.

Pasemos ahora a estudiar la aproximación de las autofunciones. Por simplicidad nos vamos a restringir al caso en que λ_m es un autovalor simple. Más adelante estudiaremos el problema de autovalores del p-laplaciano (que es un problema con varias preguntas abiertas) y nos restringiremos al estudio del primer autovalor ya que las cosas se vuelven bastante complicadas para los otros autovalores. Vimos que para el problema modelo lineal el primer autovalor era simple y lo mismo vale para el primer autovalor del p-laplaciano.

Estamos considerando entonces el caso en que $\lambda_i \neq \lambda_m$ si $i \neq m$, o sea que todas las autofunciones asociadas a λ_m son una un múltiplo de la otra. Bajo las hipótesis del teorema 2.8 se tiene que si $h \leq h_0$, $\lambda_{i,h} \neq \lambda_m$ para $1 \leq i \leq N, i \neq m$. Se puede definir en ese caso

$$\rho_{m,h} = \max_{\substack{1\leq i\leq N\\ i\neq m}} \frac{\lambda_m}{|\lambda_{i,h} - \lambda_m|}.$$

OBSERVACIÓN. $\rho_{m,h}$ está acotado independientemente del subespacio $\mathbb{V}_h$. Para ver esto tomemos un índice $1 \leq i \leq N$ con $i \neq m$. Como $\lambda_i \leq \lambda_{i,h}$, $|\lambda_{i,h}-\lambda_m| \geq |\lambda_i-\lambda_m|-(\lambda_{i,h}-\lambda_i)$. Por el teorema 2.8, si h es suficientemente chico entonces $\lambda_{i,h}-\lambda_i < \frac{1}{2}|\lambda_m-\lambda_i|$ y, así, $|\lambda_{i,h}-\lambda_m| > \frac{1}{2}|\lambda_m-\lambda_i| > 0$.

LEMA 2.5. *Si λ_m es simple, existen un $h_0 > 0$ y una autofunción $w_{m,h}$ tales que para $h \leq h_0$,*

$$|w_{m,h} - w_m| \leq 2(1 + \rho_{m,h})|w_m - \Pi_h w_m|.$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos $v_{m,h}$ como la proyección ortogonal de $\Pi_h w_m$ sobre el subespacio $\langle w_{m,h}\rangle$, es decir $v_{m,h} = (\Pi_h w_m, w_{m,h})w_{m,h}$. Dado que

$$|w_{m,h} - w_m| \leq |w_{m,h} - v_{m,h}| + |v_{m,h} - \Pi_h w_m| + |\Pi_h w_m - w_m|,$$

vamos a acotar $|w_{m,h}-v_{m,h}|$ y $|v_{m,h}-\Pi_h w_m|$. Empecemos por la última. El conjunto $\{w_{1,h}, \cdots, w_{N,h}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{V}_h$ con el producto interno de $\mathbb{H}$. Luego, $\Pi_h w_m = \sum_{i=1}^N (\Pi_h w_m, w_{i,h})w_{i,h}$ y así deducimos que

$$|v_{m,h} - \Pi_h w_m|^2 = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N} (\Pi_h w_m, w_{i,h})^2.$$

Usando que $w_{i,h}$ es una autofunción asociada a $\lambda_{i,h}$ tenemos que $(\Pi_h w_m, w_{i,h}) = \frac{1}{\lambda_{i,h}} a(\Pi_h w_m, w_{i,h}) = \frac{1}{\lambda_{i,h}} a(w_m, w_{i,h})$, por la definición de $\Pi_h w_m$. Como w_m es una autofunción asociada a λ_m, esta última expresión es igual a $\frac{\lambda_m}{\lambda_{i,h}}(w_m, w_{i,h})$. Luego,

$$\lambda_{i,h}(\Pi_h w_m, w_{i,h}) = \lambda_m(w_m, w_{i,h}),$$

igualdad que podemos reescribir del siguiente modo:

$$(\lambda_{i,h} - \lambda_m)(\Pi_h w_m, w_{i,h}) = \lambda_m(w_m - \Pi_h w_m, w_{i,h}).$$

Equivalentemente,

$$(\Pi_h w_m, w_{i,h}) = \frac{\lambda_m}{\lambda_{i,h} - \lambda_m}(w_m - \Pi_h w_m, w_{i,h}),$$

de donde concluimos, para $h \leq h_0$, que

$$|(\Pi_h w_m, w_{i,h})| \leq \rho_{m,h} |(w_m - \Pi_h w_m, w_{i,h})|.$$

Así,

$$|v_{m,h} - \Pi_h w_m|^2 \leq \rho_{m,h}^2 \sum_{i \neq m} |(w_m - \Pi_h w_m, w_{i,h})|^2 \leq \rho_{m,h}^2 |w_m - \Pi_h w_m|^2.$$

Acotemos ahora $|w_{m,h} - v_{m,h}|$. De la definición de $v_{m,h}$ y el hecho de que $|w_{m,h}| = 1$, podemos escribir

$$|w_{m,h} - v_{m,h}| = |[(\Pi_h w_m, w_{m,h}) - 1] w_{m,h}| = |(\Pi_h w_m, w_{m,h}) - 1|.$$

Por otro lado, también tenemos que

$$|w_m| - |w_m - v_{m,h}| \leq |v_{m,h}| \leq |w_m| + |w_m - v_{m,h}|$$

y, como $|w_m| = 1$ y $|v_{m,h}| = |(\Pi_h w_m, w_{m,h})|$, resulta que $||(\Pi_h w_m, w_{m,h})| - 1| \leq |w_m - v_{m,h}|$.

Podemos elegir $w_{m,h}$ de modo que $(\Pi_h w_m, w_{m,h}) \geq 0$ (cambiándola eventualmente por un múltiplo de ella). Así tenemos que

$$\begin{aligned} |w_{m,h} - v_{m,h}| &\leq |(\Pi_h w_m, w_{m,h}) - 1| \leq |w_m - v_{m,h}| \\ &\leq |w_m - \Pi_h w_m| + |\Pi_h w_m - v_{m,h}| \\ &\leq (1 + \rho_{m,h}) |w_m - \Pi_h w_m|. \end{aligned}$$

Juntando todo,

$$\begin{aligned} |w_{m,h} - w_m| &\leq (1 + \rho_{m,h}) |w_m - \Pi_h w_m| + \rho_{m,h} |w_m - \Pi_h w_m| + |w_m - \Pi_h w_m| \\ &= 2(1 + \rho_{m,h}) |w_m - \Pi_h w_m|, \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Lema 2.6. $\|w_{m,h} - w_m\|_E^2 = \lambda_m |w_{m,h} - w_m|^2 + \lambda_{m,h} - \lambda_m$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \|w_{m,h} - w_m\|_E^2 &= a(w_{m,h} - w_m, w_{m,h} - w_m) = a(w_{m,h}, w_{m,h}) + a(w_m, w_m) - 2a(w_m, w_{m,h}) \\ &= \lambda_{m,h} + \lambda_m - 2\lambda_m (w_m, w_{m,h}). \end{aligned}$$

Por otro lado, $|w_{m,h} - w_m|^2 = |w_{m,h}|^2 + |w_m|^2 - 2(w_m, w_{m,h}) = 2 - 2(w_m, w_{m,h})$ y, luego, $-2(w_m, w_{m,h}) = |w_{m,h} - w_m|^2 - 2$, de donde se deduce el resultado. □

Teorema 2.9. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema 2.4 y la hipótesis de aproximación. Si λ_m es simple entonces existen $h_0 > 0$ suficientemente chico y una constante c independiente de $\mathbb{V}_h$ tales que $\lambda_{m,h}$ es simple y se verifican las siguientes desigualdades:*

$$\|w_{m,h} - w_m\| \leq c \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\| \tag{7}$$

y

$$|w_{m,h} - w_m| \leq c\, |w_m - \Pi_h w_m|. \tag{8}$$

Demostración. Por el teorema 2.8 tenemos que existe $h_0 > 0$ tal que si $h \leq h_0$ entonces $\lambda_{m,h}$ es simple. La desigualdad (8) es una consecuencia del lema 2.5 y del hecho de que la función $\rho_{m,h}$

está acotada independientemente del subespacio $\mathbb{V}_h$. Veamos que vale (7). Usando el lema anterior, la desigualdad (8) y el teorema 2.8 tenemos que

$$\|w_{m,h} - w_m\|^2 \leq c\|w_{m,h} - w_m\|_E^2 \leq c\lambda_m |w_m - \Pi_h w_m|^2 + c \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|^2$$

$$\leq c\lambda_m \|w_m - \Pi_h w_m\|^2 + c \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|^2,$$

porque la inclusión de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{H}$ es continua. Por el lema de Céa,

$$\|w_m - \Pi_h w_m\|^2 \leq c \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|w_m - v_h\|^2 \leq c \sup_{\substack{v \in V_m \\ |v|=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|^2,$$

pues w_m es un elemento de V_m de norma 1, y de ahí se sigue el resultado.

□

Observación. Bajo las hipótesis del teorema anterior se deduce que $\lim_{h \to 0} \|w_{m,h} - w_m\| = 0$.

¿Bajo qué condiciones podemos asegurar que se cumple la hipótesis de aproximación? La siguiente propiedad nos brinda una condición suficiente.

Proposición 2.1. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema 2.4 y sea $\mathbb{V}_h$ un subespacio de $\mathbb{V}$ de dimensión finita. Supongamos que existen un subespacio $\mathbb{S}$ denso en $\mathbb{V}$ y una aplicación $r_h : \mathbb{S} \to \mathbb{V}_h$ tales que*

$$\forall\, v \in \mathbb{S}, \quad \lim_{h \to 0} \|v - r_h(v)\| = 0.$$

Entonces, $\mathbb{V}_h$ verifica la hipótesis de aproximación, es decir, verifica que

$$\forall\, u \in \mathbb{V}, \quad \lim_{h \to 0} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\| = 0.$$

Demostración. Tomemos un elemento $u \in \mathbb{V}$ y un número $\epsilon > 0$. Como $\inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\| \leq \|u - \Pi_h u\|$, alcanza con ver que $\lim_{h \to 0} \|u - \Pi_h u\| = 0$. Debido a que $\mathbb{S}$ es denso en $\mathbb{V}$, debe existir un elemento $v \in \mathbb{S}$ tal que $\|u - v\| < \frac{\alpha}{2M}\epsilon$, donde α y M son respectivamente la constante de continuidad y de coercitividad de la forma bilineal a. Para ese v existe un $h(\epsilon)$ tal que $\|v - r_h(v)\| < \frac{\alpha}{2M}\epsilon$ si $h \leq h(\epsilon)$. Por el lema de Céa,

$$\|u - \Pi_h u\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\| \leq \frac{M}{\alpha}\|u - r_h(v)\| \leq \frac{M}{\alpha}(\|u - v\| + \|v - r_h(v)\|) < \epsilon$$

si $h \leq h(\epsilon)$. □

CAPíTULO 3

Error de interpolación en espacios de Sobolev

1. Un resultado técnico

Esta sección se compone de una serie de resultados técnicos que usaremos para estimar el orden del error del problema espectral discreto presentado en el capítulo anterior. Vamos a desarrollar la teoría en un contexto más general porque en el capítulo siguiente aplicaremos estos resultados al estudio de problemas no lineales.

En esta sección trabajaremos con los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, donde Ω es un subconjunto abierto, acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$, m es un entero no negativo y p es un número real que verifica $1 < p < \infty$. $W^{m,p}(\Omega)$ es el conjunto de funciones v de $L^p(\Omega)$ que tienen derivadas débiles $D^\alpha v$ para cada multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq m$, las cuales pertenecen a $L^p(\Omega)$. Recordemos que $D^\alpha v$, si existe, es la única función de $L^1_{loc}(\Omega)$ tal que "vale la fórmula de integración por partes", es decir, tal que

$$\int_\Omega v D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha v \, \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

En este espacio tenemos la norma

$$\|v\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha v|^p \right)^{1/p},$$

que hace de él un espacio de Banach, y las seminormas

$$|v|_{j,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| = j} \int_\Omega |D^\alpha v| \right)^{1/p}$$

para cada entero $0 \leq j \leq m$.

Vamos a enunciar ahora algunos resultados conocidos que necesitaremos, algunos en este capítulo y otros en los capítulos siguientes. Son algunos casos particulares de las desigualdades de Sobolev y el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov que se pueden consultar, por ejemplo, en [**1**] o [**25**]. La expresión "$V \subset\subset H$" quiere decir que la inclusión de V en H es compacta y la expresión "$V \hookrightarrow H$", que la inclusión de V en H es continua. Se define p^*, el conjugado de Sobolev de p, como $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$. Si el borde de Ω es Lipschitz, se cumplen las siguientes inclusiones:

- $W^{m,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ $\forall 1 \leq q < p^*$, si $m < \frac{n}{p}$;
- $W^{m,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ $\forall 1 \leq q < \infty$, si $m = \frac{n}{p}$;
- $W^{m,p}(\Omega) \subset\subset C(\overline{\Omega})$ si $m > \frac{n}{p}$.

Las funciones de $W^{m,p}(\Omega)$ no están definidas en todo Ω sino que son clases de funciones que están definidas y que coinciden salvo en un conjunto de medida nula. En ese sentido, la última inclusión debe entenderse de la siguiente manera: una función $u \in W^{m,p}(\Omega)$ puede redefinirse en un conjunto de medida cero de modo que la función modificada $\widetilde{u}$ sea continua y cumpla que $\|\widetilde{u}\|_{\infty,\Omega} \leq c\|u\|_{m,p,\Omega}$, donde la constante c es independiente de u. Trasladando los órdenes de derivación se obtienen inclusiones análogas, por ejemplo, $W^{m+r,p}(\Omega) \subset\subset W^{r,q}(\Omega)$ para $1 \leq q < p^*$, si $m < \frac{n}{p}$. Por otro lado, se deduce de estas tres propiedades que la inclusión de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$ es compacta para $1 < p < \infty$.

Consideremos en particular el caso en que Ω es un polígono abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Dada τ_h una triangulación de Ω en elementos finitos, tomemos

$$\mathbb{V}_h = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_k \quad \forall T \in \tau_h\}, \tag{9}$$

donde k es un entero no negativo. Para $0 \leq j \leq k+1$ un número entero, sea $\Pi_T \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(T), W^{j,p}(T))$ un operador lineal y continuo que deja fijos a los elementos de $\mathcal{P}_k$, es decir, $\Pi_T p = p \ \forall p \in \mathcal{P}_k$. Para simplificar la notación estamos usando la convención de que $W^{m,p}(T) = W^{m,p}(T^\circ)$, donde T° es el interior de T. En este capítulo queremos estudiar estimaciones del error $v - \Pi_T v$ en distintas seminormas para cualquier función $v \in W^{k+1,p}(T)$.

Un resultado que nos será útil en nuestra tarea es el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Existe una constante $C = C(\Omega)$ tal que $\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$,*

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_k} \|v + p\|_{k+1,p,\Omega} \leq C|v|_{k+1,p,\Omega}.$$

En la demostración usaremos este resultado:

Lema 3.1. *Existe una constante $c > 0$ tal que para toda función $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ se verifica que*

$$\|v\|_{k+1,p,\Omega} \leq c \left(|v|^2_{k+1,p,\Omega} + \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_\Omega D^\alpha v \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Supongamos que la afirmación no es cierta. Entonces, existe una sucesión $(v_j)_{j\geq 1} \subset W^{k+1,p}(\Omega)$ tal que $\|v_j\|_{k+1,p,\Omega} = 1 \ \forall j$ y

$$\lim_{j\to\infty} |v_j|^2_{k+1,p,\Omega} + \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_\Omega D^\alpha v_j \right)^2 = 0. \tag{10}$$

En particular, la sucesión (v_j) es acotada en $W^{k+1,p}(\Omega)$ y, como la inclusión de $W^{k+1,p}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$ es compacta, deben existir una subsucesión (a la que seguiremos llamando (v_j)) y una función $v \in W^{k,p}(\Omega)$ tales que $v_j \to v$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Por (10), $\lim_{j\to\infty} |v_j|_{k+1,p,\Omega} = 0$ y, por lo tanto, concluimos que $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ y que, para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| = k+1$, debe ser $D^\alpha v = 0$. Debido a que Ω es conexo tenemos que $v \in \mathcal{P}_k$. Por (10) también tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega D^\alpha v_j = 0 \quad \forall |\alpha| \leq k$$

y, luego, $\int_\Omega D^\alpha v = 0 \ \forall |\alpha| \leq k$. Como $v \in \mathcal{P}_k$ no queda otra opción más que $v = 0$, hecho que es absurdo pues $\|v\|_{k+1,p,\Omega} = 1$.

□

Ahora sí demostremos el teorema 3.1. Dada una función $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ le podemos asociar el siguiente polinomio $\overline{p} \in \mathcal{P}_k$ definido de manera que se satisfaga:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \leq k, \int_\Omega D^\alpha \overline{p} = -\int_\Omega D^\alpha v.$$

Usando el lema anterior tenemos que

$$\inf_{p\in\mathcal{P}_k} \|v+p\|_{k+1,p,\Omega} \leq \|v+\overline{p}\|_{k+1,p,\Omega} \leq C\left(|v+\overline{p}|^2_{k+1,p,\Omega} + \sum_{|\alpha|\leq k}\left(\int_\Omega D^\alpha(v+\overline{p})\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = C|v|_{k+1,p,\Omega},$$

como queríamos probar. □

Con el teorema anterior podemos probar la siguiente acotación para el error local.

Teorema 3.2. *Sea $T\subset\mathbb{R}^n$ un compacto conexo con frontera de clase C^1 a trozos. Sea $\Pi_T \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(T), W^{j,p}(T))$ un operador que deja fijos a los elementos de $\mathcal{P}_k$, donde $0\leq j\leq k+1$ es un entero. Luego, existe una constante $C = C(T,\Pi_T)$ tal que*

$$\forall v\in W^{k+1,p}(T), \quad \|v-\Pi_T v\|_{j,p,T} \leq C|v|_{k+1,p,T}.$$

Demostración. Sea $v\in W^{k+1,p}(T)$. Como Π_T deja fijos a los elementos de $\mathcal{P}_k$ tenemos que, dado $p\in\mathcal{P}_k$, $v-\Pi_T v = v+p-\Pi_T(v+p) = (I-\Pi_T)(v+p)$, donde $Iw = w\ \forall w\in W^{k+1,p}(T)$. Como la inclusión de $W^{k+1,p}(T)$ en $W^{j,p}(T)$ es continua resulta que el operador I es continuo. Así,

$$\|v-\Pi_T v\|_{j,p,T} \leq \|I-\Pi_T\|_{\mathcal{L}(W^{k+1,p}(T),W^{j,p}(T))}\|v+p\|_{k+1,p,T} = C\|v+p\|_{k+1,p,T}.$$

Como esto vale para cualquier polinomio p de grado k concluimos, usando el teorema anterior, que

$$\|v-\Pi_T v\|_{j,p,T} \leq C\inf_{p\in\mathcal{P}_k}\|v+p\|_{k+1,p,T} \leq C|v|_{k+1,p,T}.$$ □

Para conocer la dependencia de la constante C respecto de las características geométricas del elemento T (al que llamaremos triángulo) vamos a introducir un *triángulo de referencia* $\widehat{T}$, compacto, conexo y con frontera de clase C^1 a trozos. Cualquier triángulo T se obtiene a través de una transformación afín inversible de $\widehat{T}$,

$$F(\widehat{x}) = B\widehat{x}+b \text{ con } B\in\mathbb{R}^{n\times n} \text{ inversible y } b\in\mathbb{R}^n,$$

$$T = F(\widehat{T}).$$

Dada una función v definida en T le vamos a asociar una función $\widehat{v}$ definida en $\widehat{T}$ del siguiente modo: dado $\widehat{x}\in\widehat{T}$, $\widehat{v}(\widehat{x}) := v(F(\widehat{x})) = v(x)$, es decir $\widehat{v} = v\circ F$. Recíprocamente, a una función $\widehat{v}$ definida en $\widehat{T}$ le vamos a asociar la función $v = \widehat{v}\circ F^{-1}$ que está definida en T. Veremos en el próximo teorema que estas funciones son igual de buenas.

Recordemos que dada una matriz $A\in\mathbb{R}^n$, su norma matricial está definida como

$$\|A\| = \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^n\\ \xi\neq 0}}\frac{|A\xi|}{|\xi|},$$

donde $|\cdot|$ es la norma euclídea de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3. *$v\in W^{j,p}(T)$ si y sólo si $\widehat{v}\in W^{j,p}(\widehat{T})$. Más aún, existen dos constantes $C_i = C_i(j,n)$ $(i=1,2)$ tales que*

$$|v|_{j,p,T} \leq C_1\|B^{-1}\|^j|\det(B)|^{\frac{1}{p}}|\widehat{v}|_{j,p,\widehat{T}}$$

y

$$|\widehat{v}|_{j,p,\widehat{T}} \leq C_2\|B\|^j|\det(B)|^{-\frac{1}{p}}|v|_{j,p,T}.$$

Demostración. Vamos a dar una idea de la demostración no muy formal. Para los detalles citamos a [**7**].

Como $x = B\widehat{x} + b$, resulta que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \widehat{x}_k}(\widehat{x}) \frac{\partial \widehat{x}_k}{\partial x_i},$$

y, como $\frac{\partial \widehat{x}_k}{\partial x_i} = (B^{-1})_{ki}$, tenemos que $|\nabla v| \leq C\|B^{-1}\||\nabla \widehat{v}|$. Si seguimos derivando vamos a obtener que $|D^\alpha v| \leq C\|B^{-1}\|^j |D^\alpha \widehat{v}|$, donde $j = |\alpha|$. Usando esto junto con el teorema de cambio de variables podemos acotar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |v|^p_{j,p,T} &= \sum_{|\alpha|=j} \int_T |D^\alpha v|^p \, dx \leq \sum_{|\alpha|=j} \int_{\widehat{T}} C\|B^{-1}\|^{jp} |D^\alpha \widehat{v}|^p |\det(B)| \, d\widehat{x} \\ &= C\|B^{-1}\|^{jp} |\det(B)| |\widehat{v}|^p_{j,p,\widehat{T}}. \end{aligned}$$

Resta elvar a la $1/p$ para obtener la primera acotación del enunciado. La otra acotación es análoga. □

Dados los triángulos T y $\widehat{T}$, usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} h_T &= \sup\{|x - y| : x, y \in T\} = \text{ diámetro de } T, \\ \rho_T &= \sup\{diam(S) : S \text{ bola}, \, S \subset T\}. \end{aligned}$$

Análogamente se definen $h_{\widehat{T}}$ y $\rho_{\widehat{T}}$.

Lema 3.2. *$\|B\| \leq \frac{h_T}{\rho_{\widehat{T}}}$ y $\|B^{-1}\| \leq \frac{h_{\widehat{T}}}{\rho_T}$.*

Demostración. Claramente, $\|B\| = \frac{1}{\rho_{\widehat{T}}} \sup_{|\xi|=\rho_{\widehat{T}}} |B\xi|$. Sea entonces $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| = \rho_{\widehat{T}}$. Por la definición de $\rho_{\widehat{T}}$ existen $\widehat{y}$ y $\widehat{z}$ en $\widehat{T}$ tales que $\xi = \widehat{y} - \widehat{z}$. Entonces, tenemos que

$$|B\xi| = |B\widehat{y} - B\widehat{z}| = |F(\widehat{y}) - F(\widehat{z})| = |y - z| \leq h_T$$

pues $y, z \in T$. Luego, $\|B\| \leq \frac{h_T}{\rho_{\widehat{T}}}$.

Intercambiando los papeles de T y $\widehat{T}$ se obtiene la acotación de $\|B^{-1}\|$. □

Teorema 3.4 (Error de interpolación local). *Sean k un entero no negativo, j un entero tal que $0 \leq j \leq k+1$, un número real p con $1 < p < \infty$ y un operador $\widehat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\widehat{T}), W^{j,p}(\widehat{T}))$ que deja fijos a los elementos de $\mathcal{P}_k(\widehat{T})$. Sea T un triángulo afínmente equivalente a $\widehat{T}$ (es decir, $T = F(\widehat{T})$, donde $F(\widehat{x}) = B\widehat{x} + b$, con B inversible). Definimos el operador Π_T por la relación*

$$\forall v \in W^{k+1,p}(T), \quad \widehat{\Pi_T v} = \widehat{\Pi}\widehat{v},$$

donde $\widehat{v} = v \circ F$, es decir que $\Pi_T v = \widehat{\Pi}\widehat{v} \circ F^{-1} = \widehat{\Pi}(v \circ F) \circ F^{-1}$. Luego, existe una constante $C = C(\widehat{\Pi}, \widehat{T})$ tal que

$$\forall v \in W^{k+1,p}(T), \quad |v - \Pi_T v|_{j,p,T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^j} |v|_{k+1,p,T}.$$

Demostración. Sean $v \in W^{k+1,p}(T)$ y $\widehat{p} \in \mathcal{P}_k(\widehat{T})$. Sea $\widehat{v} = v \circ F$. Podemos escribir $\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v} = (I - \widehat{\Pi})(\widehat{v} + \widehat{p})$. Como la inclusión de $W^{k+1,p}(\widehat{T})$ en $W^{j,p}(\widehat{T})$ es continua, el operador identidad $I : W^{k+1,p}(\widehat{T}) \to W^{j,p}(\widehat{T})$ es continuo. Luego,

$$|\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v}|_{j,p,\widehat{T}} \leq \|I - \widehat{\Pi}\| \inf_{\widehat{p} \in \mathcal{P}_k(\widehat{T})} \|\widehat{v} + \widehat{p}\|_{k+1,p,\widehat{T}} \leq C|\widehat{v}|_{k+1,p,\widehat{T}},$$

por el teorema 3.1. Claramente, $\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v} = \widehat{v - \Pi_T v}$ y, entonces, usando dos veces el teorema 3.3 y el lema anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
|v - \Pi_T v|_{j,p,T} &\leq C(j,n)\|B^{-1}\|^j |\det(B)|^{\frac{1}{p}} |\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v}|_{j,p,\widehat{T}} \\
&\leq C(j,n,\widehat{\Pi},\widehat{T})\|B^{-1}\|^j |\det(B)|^{\frac{1}{p}} |\widehat{v}|_{k+1,p,\widehat{T}} \\
&\leq C\|B^{-1}\|^j |\det(B)|^{\frac{1}{p}} \|B\|^{k+1} |\det(B)|^{-\frac{1}{p}} |v|_{k+1,p,T} \\
&\leq C \left(\frac{h_{\widehat{T}}}{\rho_T}\right)^j \left(\frac{h_T}{\rho_{\widehat{T}}}\right)^{k+1} |v|_{k+1,p,T} \\
&= C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^j} |v|_{k+1,p,T}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Es importante remarcar que la constante C no depende del triángulo T ni de la función v.

Observación. Si $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma$, con σ una constante independiente de T, podemos reescribir el resultado anterior del siguiente modo:

$$|v - \Pi_T v|_{j,p,T} \leq C \left(\frac{h_T}{\rho_T}\right)^j h_T^{k+1-j} |v|_{k+1,p,T} \leq C(\sigma) h_T^{k+1-j} |v|_{k+1,p,T},$$

donde la constante C sigue sin depender de T ni de v. Esta condición hace que los triángulos no se "achaten". A una triangulación que verifica esta condición se la llama **regular**.

Caso particular. Dada τ_h una triangulación admisible y regular de Ω en elementos de diámetro menor o igual a h, tomemos

$$\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1 \, \forall T \in \tau_h\}.$$

Sabemos que $\mathbb{V}_h$ es un subespacio de dimensión finita de $W^{1,p}(\Omega)$ y que una función de este subespacio queda unívocamente determinada por su valor en los vértices de la triangulación. Para cada elemento T de la partición, sea Π_T el interpolador local de Lagrange, es decir, $\Pi_T v \in \mathcal{P}_1$ y coincide con v en los vértices de T. Este operador es lineal y si suponemos que $p > n/2$ tenemos asegurada su continuidad en virtud de los teoremas de inmersión. Podemos definir globalmente el interpolador de Lagrange, $\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{V}_h$, por $\Pi_h u|_T = \Pi_T u$. Si $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ son los vértices de la triangulación y $\phi_1, \cdots, \phi_N$ son las funciones de Lagrange asociadas a ellos, entonces

$$\Pi_h v(x) = \sum_{i=1}^N v(\alpha_i)\phi(x).$$

Además, en el caso $p > n/2$ podemos asegurar que si $v \in W^{2,p}(\Omega)$, entonces está definido $\Pi_h v$. Para $n = 2$ necesitamos que $1 < p$, que es lo que estamos suponiendo, y para $n = 3$ tendremos que pedir que $3/2 < p$.

La razón por la cual nos restringimos al caso $k = 1$ es la siguiente: usaremos la teoría de interpolación para obtener estimaciones del error $|u - u_h|$ en distintas seminormas, donde u y u_h son las soluciones de un problema variacional y del problema variacional discreto asociado. Para ello necesitamos que $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$. Pero, para los problemas que estudiaremos en esta tesis, lo razonable es pedir que u pertenezca a $W^{2,p}(\Omega)$.

Ahora sí estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

TEOREMA 3.5 (Error de interpolación global). *Sean $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un poliedro abierto y acotado, $0 \le j \le 2$ un número entero, y p un número real tal que $1 < p < \infty$ y $p > n/2$. Sea τ_h una triangulación admisible de Ω en elementos finitos T. Supongamos que existe una constante $\sigma > 0$ tal que $\frac{h_T}{\rho_T} \le \sigma$ $\forall T \in \tau_h$. Sea Π_h el interpolador de Lagrange. Entonces, existe una constante $C = C(j, \sigma, \widehat{T})$ tal que*

$$\forall v \in W^{2,p}(\Omega), \quad |v - \Pi_h v|_{j,p,\Omega} \le C h^{2-j} |v|_{2,p,\Omega}. \tag{11}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in W^{2,p}(\Omega)$. Por el teorema de interpolación local junto con la observación anterior, existe una constante independiente de v y de T tal que

$$|v - \Pi_T v|_{j,p,T} \le C h_T^{2-j} |v|_{2,p,T} \le C h^{2-j} |v|_{2,p,T},$$

donde $h = \max\{h_T : T \in \tau_h\}$. Elevando a la p y sumando sobre todos los triángulos T de τ_h, tenemos que

$$|v - \Pi_h v|^p_{j,p,\Omega} = \sum_{T \in \tau_h} |v - \Pi_T v|^p_{j,p,T} \le C h^{p(2-j)} \sum_{T \in \tau_h} |v|^p_{2,p,T} = C h^{p(2-j)} |v|^p_{2,p,\Omega}.$$

Resta elevar a la $1/p$ para concluir la demostración. □

2. Aplicación al problema de autovalores

Volvamos a ponernos en la situación en la que $\mathbb{H} = L^2(\Omega)$ (con Ω un poliedro abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$), $\mathbb{V}$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1_0(\Omega) \subset \mathbb{V} \subset H^1(\Omega)$, $A = (a_{ij}) \in (L^\infty(\Omega))^{n \times n}$ es simétrica y uniformemente elíptica y $c \in L^\infty(\Omega)$ verifica $c(x) \ge 0$ en casi todo punto de Ω. Para garantizar la coercitividad de la forma bilineal $a(u,v) = \int_\Omega (A\nabla u \nabla v + cuv)$ en el caso en que estemos resolviendo el problema de Neumann, nos restringiremos a las funciones de integral 0, es decir, a las funciones ortogonales a las constantes: trabajaremos en el espacio $\mathbb{V} = \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v = 0\}$. Se sabe que vale la desigualdad de Poincaré para las funciones de este espacio. Para el problema de Dirichlet, tomamos $\mathbb{V} = H^1_0(\Omega)$. Así resulta que a es simétrica, continua y coercitiva. En el capítulo anterior estudiamos los problemas de Dirichet y Neumann:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que la norma asociada a la forma bilineal a es equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega)$. Consideraremos, entonces, el espacio $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{1,\Omega})$. Sea τ_h una triangulación regular de Ω; eso quiere decir que existe una constante $\sigma > 0$ independiente de la partición tal que $\frac{h_T}{\rho_T} \le \sigma$ $\forall T \in \tau_h$. Tenemos el siguiente subespacio de $\mathbb{V}$ de dimensión finita:

$$\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1 \quad \forall T \in \tau_h\}.$$

Vimos en el capítulo anterior que bajo las hipótesis del teorema 2.4 y la hipótesis de aproximación se cumplía (cf. teoremas 2.8 y 2.9), para h suficientemente chico, que

$$0 \leq \lambda_{m,h} - \lambda_m \leq c \sup_{\substack{v \in V_m \\ \|v\|_{0,\Omega}=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|_{1,\Omega}^2$$

y, si λ_m era simple,

$$\|w_{m,h} - w_m\|_{1,\Omega} \leq c \sup_{\substack{v \in V_m \\ \|v\|_{0,\Omega}=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|_{1,\Omega}$$

En particular, como el interpolador de Lagrange $\Pi_h v \in \mathbb{V}_h$,

$$0 \leq \lambda_{m,h} - \lambda_m \leq c \sup_{\substack{v \in V_m \\ \|v\|_{0,\Omega}=1}} \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega}^2$$

y, si λ_m es simple,

$$\|w_{m,h} - w_m\|_{1,\Omega} \leq c \sup_{\substack{v \in V_m \\ \|v\|_{0,\Omega}=1}} \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega}.$$

LEMA 3.3. *Existe una constante $C > 0$ tal que $\forall v \in H^2(\Omega)$,*

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch|v|_{2,\Omega}.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el teorema de estimación global con $p = 2$ tenemos, para $j = 0, 1$, que

$$|v - \Pi_h v|_{j,\Omega} \leq ch^{2-j}|v|_{2,\Omega}.$$

Luego,

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq c\left[|v - \Pi_h v|_{0,\Omega} + |v - \Pi_h v|_{1,\Omega}\right] \leq c[ch^2 + ch]|v|_{2,\Omega} \leq ch|v|_{2,\Omega}. \qquad \square$$

TEOREMA 3.6. *Sea $(\lambda_m)_{m\geq 1}$ la sucesión de autovalores del problema variacional*

$$a(u, v) = \lambda(u, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

y sea $(w_m)_{m\geq 1}$ una base de $\mathbb{V}$ ortonormal en $L^2(\Omega)$ formada por autofunciones. Sean $0 < \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \cdots \leq \lambda_{N,h}$ los autovalores del problema discreto

$$a(u_h, v_h) = \lambda(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h$$

y sea $(w_{m,h})_{m=1}^N$ una base de $\mathbb{V}_h$ ortonomal en $L^2(\Omega)$ formada por autofunciones. Luego,

$$\lim_{h\to 0} |\lambda_{m,h} - \lambda_m| = 0.$$

Si λ_m es simple entonces $\lim_{h\to 0} \|w_{m,h} - w_m\|_{1,\Omega} = 0$.
Sea V_m el subespacio formado por las primeras m autofunciones del problema continuo, $V_m = \langle w_1, w_2, \cdots, w_m\rangle$. Si $V_m \subset H^2(\Omega)$ entonces

$$|\lambda_{m,h} - \lambda_m| \leq ch^2.$$

Si, además, λ_m es simple entonces

$$\|w_{m,h} - w_m\|_{1,\Omega} \leq ch.$$

Demostración. Para probar que $\lim_{h\to 0} |\lambda_{m,h} - \lambda_m| = 0$ y que $\lim_{h\to 0} \|w_{m,h} - w_m\|_{1,\Omega} = 0$ basta con ver que se cumple la hipótesis de aproximación:

$$\forall u \in \mathbb{V}, \quad \lim_{h\to 0} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} = 0.$$

Vimos que si existen un subespacio $\mathbb{S}$ denso en $\mathbb{V}$ y una aplicación $r_h : \mathbb{S} \to \mathbb{V}_h$ tales que $\lim_{h\to 0} \|v - r_h v\|_{1,\Omega} = 0$ para toda función $v \in \mathbb{S}$, entonces la hipótesis de aproximación se satisface. Podemos tomar $\mathbb{S} = \mathbb{V} \cap H^2(\Omega)$ y $r_h = \Pi_h$. Como $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$ o $\mathbb{V} = H^1(\Omega)$ y el borde de Ω es C^1 a trozos, se cumple que $\mathbb{S}$ es denso en $\mathbb{V}$. Dado $v \in \mathbb{S}$, como $v \in H^2(\Omega)$, resulta por el lema anterior que $\|v - r_h v\|_{1,\Omega} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Supongamos ahora que $V_m \subset H^2(\Omega)$. Por el teorema 2.8,

$$0 \le \lambda_{m,h} - \lambda_m \le c \sup_{\substack{v\in V_m \\ \|v\|_{0,\Omega}=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|_{1,\Omega}^2 \le c \sup_{\substack{v\in V_m \\ \|v\|_{0,\Omega}=1}} \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega}^2 \le c \sum_{i=1}^{m} \|w_i - \Pi_h w_i\|_{1,\Omega}^2$$

y, luego, por el lema anterior,

$$0 \le \lambda_{m,h} - \lambda_m \le c \sum_{i=1}^{m} h^2 |w_i|_{2,\Omega}^2 = ch^2.$$

Supongamos, además, que λ_m es simple. Usando el teorema 2.9 tenemos que

$$\|w_{m,h} - w_m\|_{1,\Omega} \le c \sup_{\substack{v\in V_m \\ \|v\|_{0,\Omega}=1}} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|_{1,\Omega} \le c \sup_{\substack{v\in V_m \\ \|v\|_{0,\Omega}=1}} \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \le c \left(\sum_{i=1}^{m} \|w_i - \Pi_h w_i\|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

y, otra vez usando el lema anterior, obtenemos la acotación

$$\|w_{m,h} - w_m\|_{1,\Omega} \le ch \left(\sum_{i=1}^{m} |w_i|_{2,\Omega}^2 \right)^{1/2} = ch. \qquad \square$$

CAPíTULO 4

Un problema no lineal de tipo monótono

1. Existencia y unicidad de solución del problema variacional

En este capítulo vamos a estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema que aparece en varios modelos matemáticos de la física. Dados un dominio Ω conexo, abierto y acotado, un número real $1 < p < \infty$ y una función $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, se quiere hallar una solución débil de la ecuación:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

Vamos a trabajar con el espacio de Sobolev $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|)$, donde $\|v\| = \left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ coincide con la seminorma $|v|_{1,p,\Omega}$. Por la desigualdad de Poincaré sabemos que ésta es una norma equivalente a la norma usual del espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|v\|_{1,p,\Omega} = [\|v\|_{0,p,\Omega}^p + \|\nabla v\|_{0,p,\Omega}^p]^{1/p}$. Con $\|\cdot\|^*$ notaremos la norma del espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Busquemos la formulación variacional del problema. Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ una función test. Multiplicando la ecuación a ambos lados por ϕ e integrando en Ω resulta que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\phi\, dx &= \int_\Omega -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\phi\, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi\, dx - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nu\phi\, dS \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi\, dx. \end{aligned}$$

Por densidad, vale lo mismo si reemplazamos la función test ϕ por una función $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Luego, la formulación variacional del problema es la siguiente:

PV "Hallar $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$."

También nos interesa resolver el problema variacional discreto: dado un subespacio $\mathbb{V}_h$ de $W_0^{1,p}(\Omega)$ de dimensión finita, queremos resolver el siguiente problema:

PVD "Hallar $u_h \in \mathbb{V}_h$ tal que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_h|^{p-2}\nabla u_h \cdot \nabla v_h\, dx = \int_\Omega fv_h\, dx \ \forall v_h \in \mathbb{V}_h$."

Dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, definimos el operador $Au : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$Au(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\, dx.$$

El PV equivale entonces a hallar una función $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $Au = f$, es decir tal que $Au(v) = f(v)$ para todo elemento $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Estamos usando la notación $f(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fv\, dx$.

En otras palabras, lo que tenemos que probar es que el operador $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ es biyectivo.

En 1965, Leray & Lions [**15**] y Browder [**5**] probaron el siguiente teorema: si V es un espacio de Banach reflexivo y $A : V \to V^*$ es un operador que verifica las siguientes condiciones:

- A es monótono, es decir, $(Au - Av)(u - v) \geq 0\ \forall u, v \in V$,
- existe una función estrictamente creciente χ con $\lim_{t\to\infty} \chi(t) = \infty$ tal que $Au(u) \geq \chi(\|u\|)\|u\|\ \forall u \in V$, y
- dado un subespacio de dimensión finita W de V y dada una sucesión de elementos $w_k \in W$ que converge a $w \in W$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} Aw_k(v) = Aw(v)\ \forall v \in V$,

entonces la aplicación $A : V \to V^*$ es biyectiva.

Nos ocuparemos entonces de probar que A verifica las hipótesis del teorema. Vamos a usar reiteradamente la siguiente desigualdad para vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$|a|^p + |b|^p \geq C_p|a + b|^p,$$

donde $C_p = 1$ para $0 < p \leq 1$ y $C_p = 2^{1-p}$ para $p \geq 1$.

Lema 4.1.

1. *Si* $1 < p \leq 2$, *existe* $C > 0$ *tal que* $(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y) \cdot (z - y)(|z| + |y|)^{2-p} \geq C|z - y|^2$ $\forall z, y \in \mathbb{R}^n$.
2. *Si* $2 \leq p < \infty$, *existe* $C > 0$ *tal que* $(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y) \cdot (z - y) \geq C|z - y|^p\ \forall z, y \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. 1. Se puede leer en [**14**].

2. Sea $I_p = (|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y) \cdot (z - y)$. Vamos a considerar tres casos posibles teniendo en cuenta la simetría de la desigualdad respecto a los roles de y y z . En primer lugar, si $y = 0$, la desigualdad es cierta con constante igual a 1. En segundo lugar, si $|y| = |z|$ entonces $I_p = |z|^{p-2}2(|z|^2 - z \cdot y) = |z|^{p-2}|z - y|^2$. Como

$$\frac{1}{2|z|}|z - y| = \frac{1}{2}\left|\frac{z}{|z|} - \frac{y}{|y|}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{|z|}{|z|} + \frac{|y|}{|y|}\right) = 1,$$

tenemos que $|z| \geq \frac{|z-y|}{2}$ y, así, $I_p \geq (\frac{|z-y|}{2})^{p-2}|z - y|^2 = 2^{2-p}|z - y|^p$.

Finalmente, supongamos que $|z| > |y| > 0$. Escribiendo $y = \beta z + \gamma w$, con $w \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo ortogonal a z, y $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $|\beta| < 1$, tenemos que $y \cdot z = \beta|z|^2$ y que $|y|^2 = \beta^2|z|^2 + \gamma^2|w|^2$. Así, $I_p = |z|^p + |y|^p - \beta|z|^p(|z|^{p-2} + |y|^{p-2})$. Si $-1 < \beta \leq 0$, $I_p \geq |z|^p + |y|^p \geq 2^{1-p}|z - y|^p$; si $0 < \beta < 1/4$,

$$\begin{aligned} I_p &= (1 - \beta)|z|^p + |y|^p - \beta|z|^2|y|^{p-2} > (1 - 2\beta)|z|^p + |y|^p > \frac{1}{2}|z|^p = \frac{1}{4}(|z|^p + |z|^p) \\ &> \frac{1}{4}(|y|^p + |z|^p) \geq \frac{2^{1-p}}{4}|z - y|^p = \frac{1}{2^{1+p}}|z - y|^p; \end{aligned}$$

y si $1/4 \leq \beta < 1$, como $|z - y|^2 = (1 - \beta)^2|z|^2 + \gamma^2|w|^2 = (1 - 2\beta)|z|^2 + |y|^2$, resulta que

$$\begin{aligned} I_p &= (1 - \beta)|z|^p + |y|^{p-2}(|y|^2 - \beta|z|^2) \geq (1 - \beta)|z|^2|y|^{p-2} + |y|^{p-2}(|y|^2 - \beta|z|^2) \\ &= |y|^{p-2}[(1 - 2\beta)|z|^2 + |y|^2] = |y|^{p-2}|z - y|^2 = |z - y|^p\left(\frac{|y|}{|z - y|}\right)^{p-2} \geq 5^{2-p}|z - y|^p, \end{aligned}$$

porque $\frac{|z|^2}{|y|^2} \leq \frac{|z|^2}{\beta^2|z|^2} = \frac{1}{\beta^2}$ y, entonces, $\frac{|z-y|}{|y|} \leq \frac{|z|}{|y|} + 1 \leq \frac{1}{\beta} + 1 \leq 5$.

Obtuvimos que $C = \min\{1/2^{1+p}, 1/5^{p-2}\}$.

□

Proposición 4.1.

1. *Si* $1 < p \leq 2$, *existe* $\alpha > 0$ *tal que* $(Au - Av)(u - v)(\|u\| + \|v\|)^{2-p} \geq \alpha\|u - v\|^2$ $\forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. *Si* $2 \leq p < \infty$, *existe* $\alpha > 0$ *tal que* $(Au - Av)(u - v) \geq \alpha\|u - v\|^p$ $\forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Esta condición es una generalización de la condición de coercitividad que se tiene en el caso lineal $p = 2$, ya que la desigualdad $a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$ $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ puede reescribirse del siguiente modo: $a(u - v, u - v) \geq \alpha\|u - v\|^2$ $\forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. 1. Sean $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Si aplicamos la parte (1) del lema 4.1 con $z = \nabla u$ e $y = \nabla v$, obtenemos que

$$(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot \nabla(u - v)(|\nabla u| + |\nabla v|)^{2-p} \geq C|\nabla(u - v)|^2$$

en casi todo punto de Ω. Recordemos que la constante C es independiente de u y de v. Elevando a la $p/2$ e integrando en Ω llegamos a que

$$\int_\Omega [(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot \nabla(u - v)]^{p/2}(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p}{2}(2-p)} \geq C^{p/2}\int_\Omega |\nabla(u - v)|^p.$$

Como $(|\nabla u|+|\nabla v|)^{\frac{p}{2}(2-p)} \in L^{\frac{2}{2-p}}(\Omega)$, usando la desigualdad de Hölder con exponente $2/p$ obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot \nabla(u - v)\right)^{p/2} \left(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^p\right)^{\frac{2-p}{p}} \geq C^{p/2}\|u - v\|^p.$$

Elevando la desigualdad anterior a la $2/p$ y usando la desigualdad de Minkowski, podemos concluir que

$$(Au - Av)(u - v)(\|u\| + \|v\|)^{2-p} \geq C\|u - v\|^2.$$

2. Sean $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Aplicando la parte (2) del lema 4.1 con $z = \nabla u$ e $y = \nabla v$, se tiene que

$$(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot \nabla(u - v) \geq C|\nabla(u - v)|^p$$

en casi todo punto de Ω. Integrando en Ω se obtiene el resultado deseado. □

En particular, deducimos de esta propiedad que A es monótono. Además, eligiendo la función $v = 0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tenemos que $Au(u) \geq \alpha\|u\|^p$ para $1 < p < \infty$. Podemos tomar entonces $\chi(t) = \alpha t^{p-1}$ que verifica ser estrictamente creciente, $\lim_{t\to\infty} \chi(t) = \infty$ y se cumple que $Au(u) \geq \chi(\|u\|)\|u\|$.

Lema 4.2.

1. *Si* $1 < p \leq 2$, *existe* $C > 0$ *tal que* $||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq C|z - y|^{p-1}$ $\forall y, z \in \mathbb{R}^n$.
2. *Si* $2 \leq p < \infty$, *existe* $C > 0$ *tal que* $||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq C|z - y|(|z| + |y|)^{p-2}$ $\forall y, z \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. 1. Si $y = 0$, la desigualdad se verifica con $C = 1$. Supongamos, entonces, que $y, z \neq 0$. Sabemos que si $0 < r \leq 1$ y $a, b \in \mathbb{R}^n$, $||a|^r - |b|^r| \leq |a-b|^r$. Luego,

$$\begin{aligned} ||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y|^2 &= (|z|^{p-1} - |y|^{p-1})^2 + 2|z|^{p-2}|y|^{p-2}(|z||y| - z \cdot y) \\ &\leq |z-y|^{2(p-1)} + 2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1 - \frac{z \cdot y}{|z||y|}\right) \\ &= |z-y|^{2(p-1)} + 2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1 - \frac{z \cdot y}{|z||y|}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{zy}{|z||y|}\right)^{2-p}. \end{aligned}$$

Como $|z||y|\left(1 - \frac{z \cdot y}{|z||y|}\right) \leq \frac{1}{2}|z-y|^2$ y $1 - \frac{z \cdot y}{|z||y|} \leq 2$, llegamos a que

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y|^2 \leq \left(1 + \frac{2}{2^{p-1}}2^{2-p}\right)|z-y|^{2(p-1)} = 2^{2(2-p)}|z-y|^{2(p-1)}.$$

Obtuvimos que $C = 2^{2-p}$.

2. Igual que en el caso anterior, la desigualdad se satisface si $y = 0$. Supongamos, entonces, que $y, z \neq 0$. Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(t) = t^{p-1}$. Se tiene que $f'(t) = (p-1)t^{p-2}$. Por el teorema del valor medio existe $\xi = \theta|z| + (1-\theta)|y|$, con $0 < \theta < 1$, tal que

$$\begin{aligned} |z|^{p-1} - |y|^{p-1} &= f(|z|) - f(|y|) = (p-1)(\theta|z| + (1-\theta)|y|)^{p-2}(|z| - |y|) \\ &\leq (p-1)(|z| + |y|)^{p-2}(|z| - |y|). \end{aligned}$$

Usando la desigualdad anterior, el hecho de que $|z||y| - z \cdot y \leq \frac{1}{2}|z-y|^2$ y que $|z|^{p-2}, |y|^{p-2} \leq (|z| + |y|)^{p-2}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} ||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y|^2 &= (|z|^{p-1} - |y|^{p-1})^2 + 2|z|^{p-2}|y|^{p-2}(|z||y| - z \cdot y) \\ &\leq (p-1)^2(|z| + |y|)^{2(p-2)}(|z| - |y|)^2 + |z|^{p-2}|y|^{p-2}|z-y|^2 \\ &\leq (p-1)^2(|z| + |y|)^{2(p-2)}|z-y|^2 + (|z| + |y|)^{2(p-2)}|z-y|^2 \\ &= ((p-1)^2 + 1)(|z| + |y|)^{2(p-2)}|z-y|^2. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.2.

1. *Si* $1 < p \leq 2$, *existe* $M > 0$ *tal que* $\|Au - Av\|^* \leq M\|u - v\|^{p-1}$ $\forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. *Si* $2 \leq p < \infty$, *existe* $M > 0$ *tal que* $\|Au - Av\|^* \leq M(\|u\| + \|v\|)^{p-2}\|u - v\|$ $\forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Esta condición es una generalización de la condición de continuidad de A que se tiene en el caso lineal. Recordemos que

$$\|Au - Av\|^* = \sup_{\substack{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{|(Au - Av)w|}{\|w\|}.$$

Demostración. 1. Sean $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y sea $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no nula. Usando la parte (1) del lema 4.2 con $z = \nabla u$ e $y = \nabla v$, tenemos que

$$\begin{aligned} |(Au - Av)w| &= \left|\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot \nabla w\right| \\ &\leq \int_\Omega \left||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right| |\nabla w| \\ &\leq M \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p-1}|\nabla w|. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder con exponente $\frac{p}{p-1}$ obtenemos que

$$|(Au-Av)w| \le M \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla w|^p\right)^{\frac{1}{p}} = M\|u-v\|^{p-1}\|w\|,$$

de donde se deduce el resultado.

2. Sean u, v y $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, con $w \neq 0$. Aplicando la parte (2) del lema 4.2 a $z = \nabla u$ e $y = \nabla v$, obtenemos que

$$|(Au-Av)w| \le \int_\Omega \left||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right| |\nabla w| \le M \int_\Omega |\nabla(u-v)|(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2}|\nabla w|.$$

Usando la desigualdad de Hölder con exponente $\frac{p}{p-1}$ podemos afirmar que

$$|(Au-Av)w| \le M \left(\int_\Omega |\nabla(u-v)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{(p-2)p}{p-1}} |\nabla w|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

y, aplicando otra vez la desigualdad de Hölder, ahora con exponente $p-1$, llegamos a que

$$\begin{aligned}|(Au-Av)w| &\le M\|u-v\| \left[\left(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^p\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_\Omega |\nabla w|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &= M\|u-v\| \left(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^p\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla w|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le M\|u-v\|(\|u\| + \|v\|)^{p-2}\|w\|,\end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad del enunciado. □

Sea W un subespacio de dimensión finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$ y sea $(w_k)_{k\ge 1}$ una sucesión de W que converge a $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $1 < p < 2$, $\|Aw_k - Aw\|^* \le M\|w_k - w\|^{p-1}$. Por lo tanto, si $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ resulta que $|Aw_k(v) - Aw(v)| \le M\|v\|\|w_k - w\|^{p-1} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Si $2 \le p < \infty$, $|Aw_k(v) - Aw(v)| \le M\|v\|(\|w_k\| + \|w\|)^{p-2}\|w_k - w\| \to 0$ cuando $k \to \infty$ pues la sucesión $(\|w_k\|)_k$ es acotada. No necesitamos en la demostración que el subespacio W fuera de dimensión finita.

Siendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ un espacio de Banach reflexivo, resulta que $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ es biyectivo y, luego, existe una única solución del PV. Como un subespacio de dimensión finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$ es también reflexivo, el PVD también tiene solución única.

2. El problema de minimización equivalente

Asociados a los problemas variacionales tenemos los siguientes problemas de minimización:

PM "Hallar $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $J(u) = \min\limits_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v)$" y

PMD "Hallar $u_h \in \mathbb{V}_h$ tal que $J(u_h) = \min\limits_{v_h \in \mathbb{V}_h} J(v_h)$",

donde $J(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - f(v)$, y $\mathbb{V}_h$ es un subespacio de dimensión finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposición 4.3.

1. *Los problemas PV y PM son equivalentes.*
2. *Los problemas PVD y PMD son equivalentes.*

La demostración se obtiene como corolario de la próxima proposición.

Definición 4.1. *La derivada de J en $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ en la dirección de $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se define como*

$$dJ(u,v) = \lim_{h\to 0} \frac{J(u+hv)-J(u)}{h},$$

si el límite existe. Si la aplicación $J'(u) : v \mapsto dJ(u,v)$ es lineal y continua se dice que el operador J es diferenciable [1] *en u.*

Proposición 4.4. *J es diferenciable. Además $J'(u) = Au - f$.*

Demostración. Supongamos que $p > 2$. Consideremos la aplicación

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad F(\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p.$$

Tenemos que $J(v) = \int_\Omega F(\nabla v)\,dx - f(v)$. Como $F(\xi) = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{p/2}$, resulta que F es dos veces diferenciable con

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i} = |\xi|^{p-2}\xi_i, \quad 1 \le i \le n \quad \text{y}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j + |\xi|^{p-2}\delta_{ij}, \quad 1 \le i,j \le n.$$

Luego, $F(\xi+\eta) - F(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi\cdot\eta + R(\xi,\eta)$, con $|R(\xi,\eta)| \le c(p)|\xi|^{p-2}|\eta|^2$.

Sean $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Vamos a tomar $\xi = \nabla u$ y $\eta = h\nabla v$.

$$\begin{aligned}\frac{J(u+hv)-J(u)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_\Omega F(\nabla u + h\nabla v)\,dx - f(u+hv) - \int_\Omega F(\nabla u)\,dx + f(u)\right]\\ &= \frac{1}{h}\left[\int_\Omega \left(F(\nabla u + h\nabla v) - F(\nabla u)\right)\,dx\right] - f(v)\\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx - f(v) + \frac{R(h)}{h},\end{aligned}$$

donde $|R(h)| \le c(p)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|h\nabla v|^2$. Veamos que $\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h} = 0$. Usando la desigualdad de Hölder con exponente $p/2$, podemos acotar del siguiente modo:

$$\frac{|R(h)|}{h} \le c(p)h\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla v|^2 \le c(p)h\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)^{\frac{2}{p}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Fijemos ahora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y veamos que la aplicación $J'(u) : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$v \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx - f(v),$$

es lineal y continua. En efecto,

$$\begin{aligned}J'(u)(\alpha v + w) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot(\alpha\nabla v + \nabla w)\,dx - [\alpha f(v) + f(w)]\\ &= \alpha\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx - f(v)\right) + \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla w\,dx - f(w)\right)\\ &= \alpha J'(u)v + J'(u)w,\end{aligned}$$

[1] Esta noción de diferenciabilidad se conoce como “diferenciabilidad en el sentido de Gâteaux”.

y, por otro lado, usando la desigualdad de Hölder con exponente $\frac{p}{p-1}$, obtenemos que

$$\left|J'(u)v\right| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\,dx + \|f\|^*\|v\| \leq \|u\|^{p-1}\|v\| + \|f\|^*\|v\|,$$

como queríamos ver. Acabamos de probar que J es diferenciable con

$$J'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\,dx - f(v) \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \qquad \square$$

Nota de la autora: Para el caso $1 < p < 2$ no he podido adaptar esta demostración. En [**12**] se prueba la propiedad para $1 < p < \infty$ mediante otro método.

3. Estimación del error

Supongamos ahora que el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un polígono abierto y acotado. Consideremos una triangulación admisible y regular τ_h de Ω en elementos de diámetro menor o igual a h y sea

$$\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1\, \forall\, T \in \tau_h \text{ y } v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Sabemos que $\mathbb{V}_h$ es un subespacio de dimensión finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$. La razón por la cual trabajaremos con elementos lineales a trozos es la siguiente: si queremos trabajar con funciones de $W_0^{1,p}(\Omega)$ que localmente sean polinomios de grado k necesitamos, para poder usar las acotaciones del error, que la solución del problema viva en $W^{k+1,p}(\Omega)$ y, en general, la solución de (12) no va a tener más regularidad que la de pertenecer a $W^{2,p}(\Omega)$, aún cuando la función f sea infinitamente suave.

Una función de $\mathcal{P}_1(T)$ queda determinada unívocamente por su valor en $n+1$ nodos. Restringida al borde del triángulo es una función lineal en $n-1$ variables. Por lo tanto, para tener garantizada la continuidad necesitamos definir a la función en n nodos por cada lado. La única forma posible de cumplir ambas condiciones es utilizando como nodos los vértices de los elementos T. Sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ los vértices de la triangulación contando una sola vez a los que son vértices de más de un triángulo y excluyendo a los vértices que pertenecen al borde de Ω (a los que no necesitaremos por la condición de borde de tipo Dirichlet). Una base de $\mathbb{V}_h$ es la base de Lagrange $\{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$ cuyas funciones pertenecen a $\mathbb{V}_h$ y verifican $\phi_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. Con esta base queda definido el operador de interpolación de Lagrange Π_h que asigna a una función $v \in W^{2,p}(\Omega)$ la función

$$\Pi_h v(x) = \sum_{i=1}^N v(\alpha_i)\phi_i(x)$$

que, claramente, es un elemento de $\mathbb{V}_h$. El operador $\Pi_h : W^{2,p}(\Omega) \to \mathbb{V}_h \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ es lineal y deja fijos a los elementos de $\mathbb{V}_h$. Para poder asegurar que es continuo necesitamos pedir que $p > n/2$: por los teorema de inmersión de Sobolev sabemos que si $p > n/2$, $W^{2,p}(\Omega)$ está incluido de manera continua en $C(\overline{\Omega})$. Veamos que bajo esa hipótesis el operador de interpolación de Lagrange resulta continuo. En efecto, dada $v \in W^{2,p}(\Omega)$, como $\Pi_h v(x) = \sum_{i=1}^N v(\alpha_i)\phi_i(x)$, podemos acotar así:

$$\|\Pi_h v\|_{1,p,\Omega} \leq \sum_{i=1}^N |v(\alpha_i)|\|\phi_i\|_{1,p,\Omega} \leq \left(\sum_{i=1}^N \|\phi_i\|_{1,p,\Omega}\right)\|v\|_{\infty,\Omega} \leq C\left(\sum_{i=1}^N \|\phi_i\|_{1,p,\Omega}\right)\|v\|_{2,p,\Omega}.$$

En particular, en este caso podremos usar las estimaciones del error que desarrollamos en el capítulo anterior. Para $n = 2$ necesitamos que $1 < p$, que es lo que estamos suponiendo, y para $n = 3$ tenemos que pedir que $3/2 < p$.

PROPOSICIÓN 4.5. *Sean u y u_h las soluciones de los problemas PV y PVD respectivamente (y, por lo tanto, las soluciones de los problemas PM y PMD respectivamente). Entonces,*

$$\|u\|,\, \|u_h\| \leq (\|f\|^*)^{1/p-1}$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que u verifica $Au(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = f(v)\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Tomando $v = u$ como función test tenemos que

$$\|u\|^p = \int_\Omega |\nabla u|^p = f(u) \leq \|f\|^*\|u\|.$$

La acotación de la función u_h es análoga. $\square$

Para determinar que el problema de minimización PM o el problema variacional PV están bien planteados hay que ver, además de la existencia y unicidad de solución, la dependencia continua de la solución respecto del dato f. Es lo que estudiaremos en la próxima proposición. Sean f_1 y $f_2 \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ y sean u_1 y $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ las respectivas soluciones de

$$Au_1(v) = f_1(v) \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

y

$$Au_2(v) = f_2(v) \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

PROPOSICIÓN 4.6. *Existe una constante C independiente de u_1 y u_2 tal que*

1. *si $1 < p \leq 2$, $\|u_1 - u_2\| \leq C\|f_1 - f_2\|^*$, y*
2. *si $2 \leq p < \infty$, $\|u_1 - u_2\|^{p-1} \leq C\|f_1 - f_2\|^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Analicemos primero el caso $1 < p \leq 2$. Usando la monotonía del operador A tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha\|u_1 - u_2\|^2 &\leq (Au_1 - Au_2)(u_1 - u_2)(\|u_1\| + \|u_2\|)^{2-p} \\
&= (f_1 - f_2)(u_1 - u_2)(\|u_1\| + \|u_2\|)^{2-p} \\
&\leq \|f_1 - f_2\|^*\|u_1 - u_2\| \left((\|f_1\|^*)^{1/p-1} + (\|f_2\|^*)^{1/p-1}\right)^{2-p},
\end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad del enunciado. En el caso $2 \leq p < \infty$ la cuenta es similar, también se usa la monotonía de A. $\square$

OBSERVACIÓN. u y u_h verifican respectivamente $Au(v) = f(v)\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $Au_h(v_h) = f(v_h)$ $\forall v_h \in \mathbb{V}_h$. En particular, si $w_h \in \mathbb{V}_h$ entonces $(Au - Au_h)(w_h) = f(w_h) - f(w_h) = 0$. Luego,

$$(Au - Au_h)(u_h - v_h) = 0 \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h.$$

El siguiente teorema es una generalización del lema de Céa.

TEOREMA 4.1. *Existe una constante $C > 0$ independiente de u y u_h tal que*

1. *si $1 < p \leq 2$, $\|u - u_h\| \leq C \inf\{\|u - v_h\|^{\frac{1}{3-p}} : v_h \in \mathbb{V}_h\}$, y*
2. *si $2 \leq p < \infty$, $\|u - u_h\| \leq C \inf\{\|u - v_h\|^{\frac{1}{p-1}} : v_h \in \mathbb{V}_h\}$.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $v_h \in \mathbb{V}_h$. Usando la monotonía de A tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha\|u - u_h\|^2 &\leq (Au - Au_h)(u - u_h)(\|u\| + \|u_h\|)^{2-p} \\
&= (Au - Au_h)(u - v_h)(\|u\| + \|u_h\|)^{2-p} \\
&\leq \|Au - Au_h\|^*\|u - v_h\|(2(\|f\|^*)^{1/p-1})^{2-p}
\end{aligned}$$

y, por la continuidad de A, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\alpha\|u-u_h\|^2 \leq C\|u-u_h\|^{p-1}\|u-v_h\|.$$

Así vemos que $\|u-u_h\|^{3-p} \leq C\|u-v_h\|$ y, como v_h era cualquier elemento de $\mathbb{V}_h$, se obtiene la afirmación del enunciado.

2. Sea $v_h \in \mathbb{V}_h$. Usando la monotonía y la continuidad de A tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha\|u-u_h\|^p &\leq (Au-Au_h)(u-u_h) = (Au-Au_h)(u-v_h) \leq \|Au-Au_h\|^*\|u-v_h\| \\ &\leq M(\|u\|+\|u_h\|)^{p-2}\|u-u_h\|\|u-v_h\| \leq C\|u-u_h\|\|u-v_h\|,\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

Supongamos que τ_h es una triangulación regular de Ω en triángulos de diámetro menor o igual a h con $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma\ \forall T \in \tau_h$. Sea $\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1(T)\,\forall T \in \tau_h\}$. Sabemos que si $n < 2p$ (para que la inclusión de $W^{2,p}(\Omega)$ en $C(\overline{\Omega})$ sea continua), se tiene la estimación $\|u-\Pi_h u\| = |u-\Pi_h u|_{1,p,\Omega} \leq Ch|u|_{2,p,\Omega}$. Luego, en ese caso, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.2 (Acotación del error). *Si $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces*

1. *si $1 < p \leq 2$, $\|u-u_h\| = O(h^{\frac{1}{3-p}})$, y*
2. *si $2 \leq p < \infty$, $\|u-u_h\| = O(h^{\frac{1}{p-1}})$.*

4. Mejores estimaciones del error

Para obtener la estimación del error que acabamos de ver usamos la continuidad y la monotonía del operador A, pero no se usaron las propiedades del operador J ni el hecho de que u y u_h son las soluciones de los problemas de minimización PM y PMD. Usando estas propiedades se pueden obtener mejores estimaciones del error. A esto nos dedicaremos ahora.

Como u_h es el mínimo de $J(\cdot)$ sobre $\mathbb{V}_h$, tenemos que para toda $v_h \in \mathbb{V}_h$, $J(u_h) \leq J(v_h)$. Luego

$$J(u_h) - J(u) \leq J(v_h) - J(u) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h.$$

Por el teorema del valor medio se tiene que $J(v) - J(u) = \int_0^1 (J'(u+s(v-u)))(v-u)\,ds$ para $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Puesto que u es el mínimo de $J(\cdot)$ sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, debe ser $J'(u)v = 0\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned}J(v)-J(u) &= \int_0^1 (J'(u+s(v-u)) - J'(u))(v-u)\,ds \\ &= \int_0^1 (A(u+s(v-u)) - Au)(v-u)\,ds \\ &= \int_0^1 (A(u+s(v-u)) - Au)(u+s(v-u)-u)\ \frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

Consideremos primero el caso $1 < p \leq 2$. Usando la monotonía de A tenemos que

$$\begin{aligned}J(v)-J(u) &\geq \alpha\int_0^1 \|u+s(v-u)-u\|^2 \frac{1}{(\|u+s(v-u)\|+\|u\|)^{2-p}}\,\frac{ds}{s} \\ &= \alpha\|u-v\|^2 \int_0^1 \frac{s\,ds}{(\|u+s(v-u)\|+\|u\|)^{2-p}}\end{aligned}$$

y, como $\|u+s(v-u)\|+\|u\| \leq \|u\|+\|u-v\|+\|u\| \leq 3(\|u\|+\|v\|)$, resulta que

$$J(v)-J(u) \geq \alpha_1 \frac{\|u-v\|^2}{(\|u\|+\|v\|)^{2-p}}.$$

Si usamos la continuidad de A vemos que

$$\begin{aligned}
J(v)-J(u) &\leq \int_0^1 \|A(u+s(v-u))-Au\|^* \|u+s(v-u)-u\| \, \frac{ds}{s} \\
&\leq M \int_0^1 \|u+s(v-u)-u\|^{p-1} s\|v-u\| \frac{ds}{s} \\
&= M_1 \|u-v\|^p.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso $2 \leq p < \infty$. Por la monotonía de A se obtiene que

$$J(v)-J(u) \geq \alpha \int_0^1 \|u+s(v-u)-u\|^p \frac{ds}{s} = \alpha_2 \|u-v\|^p$$

y, por la continuidad de A,

$$\begin{aligned}
J(v)-J(u) &\leq \int_0^1 \|A(u+s(v-u))-Au\|^* \|u+s(v-u)-u\| \frac{ds}{s} \\
&\leq M \int_0^1 (\|u+s(v-u)\|+\|u\|)^{p-2} \|u+s(v-u)-u\|^2 \frac{ds}{s} \\
&\leq M\|u-v\|^2 \int_0^1 (3(\|u\|+\|v\|))^{p-2} s \, ds \\
&= M_2 \|u-v\|^2 (\|u\|+\|v\|)^{p-2}.
\end{aligned}$$

Acabamos de demostrar la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.7. *Sea u la solución del PM. Existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, M_1, M_2 > 0$ tales que para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

1. *si $1 < p \leq 2$, $\alpha_1 \frac{\|u-v\|^2}{(\|u\|+\|v\|)^{2-p}} \leq J(v)-J(u) \leq M_1\|u-v\|^p$, y*
2. *si $2 \leq p < \infty$, $\alpha_2\|u-v\|^p \leq J(v)-J(u) \leq M_2\|u-v\|^2(\|u\|+\|v\|)^{p-2}$.*

Estamos ahora en condiciones de probar estimaciones del error mejores a las obtenidas anteriormente.

TEOREMA 4.3. *Si $1 < p \leq 2$, existe una constante $C > 0$ independiente de u y u_h tal que*

$$\|u-u_h\| \leq C \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u-v_h\|^{p/2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v_h \in \mathbb{V}_h$. Por la parte (1) de la proposición anterior tenemos que

$$\alpha_1 \frac{\|u-u_h\|^2}{(\|u\|+\|u_h\|)^{2-p}} \leq J(u_h)-J(u) \leq J(v_h)-J(u) \leq M_1\|u-v_h\|^p.$$

Usando las acotaciones de $\|u\|$ y $\|u_h\|$ concluimos que

$$\|u-u_h\|^2 \leq C\|u-v_h\|^p \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h.$$

□

TEOREMA 4.4. *Denotemos con $\Pi_h u$ a la interpolada de u en $\mathbb{V}_h$. Si $2 \leq p < \infty$, existe una constante $c > 0$ independiente de u y de u_h (pero que puede depender de $\|\Pi_h u\|$) tal que*

$$\|u - u_h\| \leq c\|u - \Pi_h u\|^{2/p}.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la parte (2) de la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|u - u_h\|^p &\leq J(u_h) - J(u) \leq J(\Pi_h u) - J(u) \\ &\leq M_2(\|u\| + \|\Pi_h u\|)^{p-2}\|u - \Pi_h u\|^2 \\ &\leq M_2 \left((\|f\|^*)^{1/p-1} + \|\Pi_h u\| \right)^{p-2} \|u - \Pi_h u\|^2, \end{aligned}$$

de donde se sigue la desigualdad del teorema. □

Supongamos nuevamente que τ_h es una triangulación regular de Ω en triángulos de diámetro menor o igual a h y sea $\mathbb{V}_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1(T)\, \forall T \in \tau_h\}$. Para $n < 2p$ podemos enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA 4.5. *Si $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces*

1. *si $1 < p \leq 2$, $\|u - u_h\| = O(h^{p/2})$, y*
2. *si $2 \leq p < \infty$, $\|u - u_h\| = O(h^{2/p})$.*

CAPíTULO 5

Problema de autovalores para el p-Laplaciano

1. Algunos resultados conocidos sobre el problema

El problema en cuestión es el siguiente: dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y conexo, se quiere hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista una solución débil u de la ecuación

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para obtener la formulación variacional del problema tomemos una función test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Multiplicando la ecuación a ambos lados por φ, integrando en Ω y usando el teorema de la divergencia obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}u\,\varphi\,dx &= -\int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\varphi\,dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\,\varphi)\,dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\,\varphi\nu\,dS. \end{aligned}$$

El último término del lado derecho es nulo ya que $\varphi = 0$ en $\partial\Omega$. Por densidad vale lo mismo si en lugar de tomar $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se toma una función $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definición 5.1. *Decimos que λ es un autovalor si existe una función no nula $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v = \lambda\int_\Omega |u|^{p-2}u\,v \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A u se la llama autofunción.

Observación. Si u es una autofunción asociada a λ, tomando $v = u$ como función test tenemos que $\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p}{\int_\Omega |u|^p}$. Luego, los autovalores son no negativos. Además, si $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = 0$ entonces debe ser $u = cte$ por ser el dominio Ω conexo. En ese caso, por la condición de borde resultaría que $u = 0$ contradiciendo el hecho de u es una autofunción. Concluimos entonces que los autovalores son positivos.

Definición 5.2. *Dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no nula, se define su cociente de Rayleigh como*

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p}{\int_\Omega |u|^p}.$$

Proposición 5.1. *Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, no nula, minimiza el cociente de Rayleigh entre todas las funciones no nulas $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces u es una autofunción asociada a $\lambda = \mathcal{R}(u)$.*

Demostración. Dados $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $\epsilon > 0$, como $u + \epsilon\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, se tiene que la función de una variable $I(\epsilon) := \mathcal{R}(u + \epsilon\varphi)$ tiene un mínimo en $\epsilon = 0$. Por lo tanto, $I'(0) = 0$. Calculemos la derivada de I.

$$I(\epsilon) = \frac{\int_\Omega |\nabla u + \epsilon \nabla \varphi|^p}{\int_\Omega |u + \epsilon\varphi|^p}.$$

Luego,

$$I'(\epsilon) = \frac{\left[\int_\Omega p|\nabla u + \epsilon\nabla\varphi|^{p-2}(\nabla u + \epsilon\nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi\right]\left(\int_\Omega |u+\epsilon\varphi|^p\right) - \left(\int_\Omega |\nabla u + \epsilon\nabla\varphi|^p\right)\left[\int_\Omega p|u+\epsilon\varphi|^{p-2}(u+\epsilon\varphi)\varphi\right]}{\left(\int_\Omega |u+\epsilon\varphi|^p\right)^2}.$$

Evaluando en $\epsilon = 0$ tenemos que

$$0 = \frac{\left[\int_\Omega p|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\right]\left(\int_\Omega |u|^p\right) - \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\left[\int_\Omega p|u|^{p-2}u\varphi\right]}{\left(\int_\Omega |u|^p\right)^2}$$

y, luego,

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\right)\left(\int_\Omega |u|^p\right) = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\left(\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi\right).$$

Podemos reescribir esa igualdad de la siguiente manera:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi = \mathcal{R}(u)\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi.$$

Como esto vale para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene, por densidad, que u es una autofunción asociada a $\mathcal{R}(u)$. □

En este capítulo usaremos algunas de las propiedades que citamos al principio del capítulo 2 referidas a los teoremas de inmersión. Además, vamos a usar el siguiente teorema que es una generalización de la desigualdad de Poincaré.

Teorema 5.1 (Desigualdad de Poincaré). *Si $n > 1$, existe una constante $C = C(n,p)$ tal que para toda función $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se cumple que*

- *si $p < n$, $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$,*
- *si $p > n$, $u \in C(\overline{\Omega})$ y $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$, y*
- *si $p = n$, para todo $\alpha > 1$ se tiene que $u \in L^{p\alpha}(\Omega)$ y $\|u\|_{L^{p\alpha}(\Omega)} \le C(p,n,\alpha)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.*

Otra propiedad que vamos a usar repetidas veces es una versión modificada del teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov.

Lema 5.1 (Rellich-Kondrachov). *Sea $1 < p < \infty$. Supongamos que tenemos una sucesión $(u_k)_{k\ge 1} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|\nabla u_k\|_{0,p,\Omega} \le L < \infty$ para todo $k \ge 1$. Entonces, existen una subsucesión (u_{k_j}) y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tales que*

$$u_{k_j} \to u \text{ en } L^p(\Omega) \quad \text{ y } \quad \nabla u_{k_j} \xrightarrow{w} \nabla u \text{ en } L^p(\Omega).$$

Demostración. Por la desigualdad de Poincaré deducimos que la sucesión (u_k) es acotada en $W^{1,p}(\Omega)$. Como la inclusión de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$ es compacta, podemos extraer una subsucesión (u_{k_j}) que converge a una función $u \in L^p(\Omega)$. Para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ es débilmente compacto; eso quiere decir que de una sucesión acotada se puede extraer una subsucesión que coverge débilmente. Como la sucesión (∇u_{k_j}) es acotada en $L^p(\Omega)^n$, existe una subsucesión (sigamos llamándola igual) que converge débilmente a un elemento $w \in L^p(\Omega)^n$. Veamos que $\nabla u = w$ en sentido débil. Notemos con w_i la coordenada i-ésima del vector w. Veamos que dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se cumple que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega w_i \varphi.$$

Como $\frac{\partial u_{k_j}}{\partial x_i} \xrightarrow{w} w_i$ en $L^p(\Omega)$ tenemos que $\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_{k_j}}{\partial x_i}\varphi = \int_\Omega w_i \varphi$ y, como $(u_{k_j}) \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{\partial u_{k_j}}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega u_{k_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Resta tomar límite con $j \to \infty$ para concluir la demostración. □

Teorema 5.2. *El espectro es cerrado.*

Demostración. Sea $(\lambda_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{R}$ una sucesión de autovalores tal que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda < \infty$. Tenemos que probar que λ es un autovalor. Sean $u_1, u_2, \cdots$ las autofunciones asociadas a los λ_k. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$ $\forall k \geq 1$. La idea de la demostración es usar el lema anterior para conseguir una función u a la que la sucesión $(u_k)_{k\geq 1}$ converja débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y que será nuestra candidata a ser autofunción asociada a λ.

Para cada $k \geq 1$ tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \cdot \nabla v = \lambda_k \int_\Omega |u_k|^{p-2} u_k v \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y, tomando $v = u_k$ como función test, concluimos que $\lambda_k = \int_\Omega |\nabla u_k|^p$. En particular, la sucesión $(\nabla u_k)_k$ es acotada en $(L^p(\Omega))^n$. Por el lema anterior, existen una subsucesión (a la que seguiremos llamando $(u_k)_k$) y una función $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tales que

$$u_k \to u \text{ en } L^p(\Omega) \quad \text{ y } \quad \nabla u_k \xrightarrow{w} \nabla u \text{ en } L^p(\Omega).$$

Veamos que esta función u es una autofunción asociada a λ. En primer lugar, como $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$ $\forall k$ resulta que $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ y, en particular, $u \neq 0$. Tenemos que mostrar ahora que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \varphi.$$

Se tiene que

$$\int_\Omega [|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u|^{p-2}\nabla u]\cdot \nabla(u_k - u) = \lambda_k \int_\Omega |u_k|^{p-2}u_k(u_k-u) - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot (\nabla u_k - \nabla u).$$

Probemos que $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k|^{p-2}u_k(u_k-u) = 0$. Sea p' el conjugado de p, es decir, $p' = \frac{p}{p-1}$. Aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\left| \int_\Omega |u_k|^{p-2}u_k(u_k-u)\right| \leq \int_\Omega |u_k|^{p-1}|u_k - u| \leq \|u_k\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\|u_k - u\|_{L^p(\Omega)} = \|u_k - u\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Por otro lado, la convergencia débil de los gradientes implica que $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot (\nabla u_k - \nabla u) = 0$, porque la función $|\nabla u|^{p-2}\nabla u \in (L^{p'}(\Omega))^n$. Luego,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega [|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u|^{p-2}\nabla u]\cdot \nabla(u_k - u) = 0.$$

Usando esto junto con el lema 4.1 aplicado con $z = \nabla u_k$ e $y = \nabla u$, deducimos que la convergencia de los gradientes es fuerte en $L^p(\Omega)$, es decir que $\nabla u_k \to \nabla u$ en $L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Luego, podemos pasar el límite adentro de la integral en la expresión

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \cdot \nabla\varphi = \lambda_k \int_\Omega |u_k|^{p-2}u_k\varphi \quad \forall k, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

y obtener que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por densidad resulta que esto vale para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces, u es una autofunción asociada a λ y, por lo tanto, λ es un autovalor. □

2. El primer autovalor

Nos vamos a dedicar ahora al estudio del primer autovalor. Veremos que vale lo mismo que en el caso lineal: el primer autovalor es simple y la primera autofunción no cambia de signo. También se tiene que $1/\sqrt{\lambda_1}$ es la constante óptima de la desigualdad de Poincaré. Para los otros autovalores las cosas se vuelven más complicadas, hay varios problemas abiertos. Usando técnicas minimax se puede construir una sucesión $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \nearrow \infty$ de autovalores. Lo que no se sabe es si hay otros autovalores aparte de esos, ni que el espectro sea numerable ni discreto (ni aún cuando el dominio es una bola), ni que los autovalores tengan multiplicidad finita, salvo en el caso unidimensional en el que se conocen explícitamente todos los autovalores: hay una expresión para el primer autovalor y los otros se obtienen a partir de él por medio de $\lambda_k = k^p\lambda_1$, para $k \ge 1$. En particular, el espectro es discreto y todos los autovalores son simples. Análogamente, las autofunciones se obtienen a partir de la primera: se extiende a u_1 por imparidad al intervalo $(-1, 1)$ y luego se la extiende a todo $\mathbb{R}$ con la condición de que tenga período 2. Las otras autofunciones son entonces $u_k(x) = u_1(kx)$.

En el caso lineal, $p = 2$, la ecuación es

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 & \text{en } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Los autovalores son $\lambda_k = k^2\pi^2$ y las autofunciones son $u_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$. Se cumple entonces que $\lambda_k = k^2\lambda_1$, $u_k(x) = u_1(kx)$ y la primera autofunción es impar y de período 2.

El autovalor principal o la frecuencia principal se define como

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\\ \varphi\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^p}{\int_\Omega |\varphi|^p}.$$

Usando una sucesión normalizada $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ se obtiene, por el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov, una función $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p}{\int_\Omega |u|^p}$$

y, luego, por la proposición 5.1, sabemos que u es una autofunción asociada a λ_1.

De la teoría de regularidad se sabe que una autofunción puede hacerse continua cambiándola en un un conjunto de medida cero (de hecho tienen mayor regularidad, cf. [**11**] y [**22**]) y que si Ω

es suficientemente regular, $u = 0$ en $\partial\Omega$ en sentido clásico. En particular, podemos asegurar que las autofunciones son acotadas en Ω.

De la teoría de ecuaciones elípticas en derivadas parciales es conocida la siguiente desigualdad, probada por Trudinger ([**23**], Teorema 1.1 p.724) en el año 1967.

TEOREMA 5.3 (Desigualdad de Harnack). *Si u es una autofunción no negativa, entonces existe una constante $C = C(n, p)$ tal que*

$$\max_{B_r} u \leq C \min_{B_r} u \quad \forall B_{2r} \subset \Omega.$$

De esta desigualdad se deduce, como corolario, que si $u \geq 0$ es una autofunción, entonces debe ser $u > 0$. Ahora bien, si u_1 minimiza el cociente de Rayleigh entre todas las funciones no nulas $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $|u_1|$ también lo minimiza y, por lo tanto, $|u_1|$ es una autofunción asociada a λ_1. Por la desigualdad de Harnack, $|u_1| > 0$, o sea que o bien $u_1 > 0$ o bien $u_1 < 0$. Acabamos de ver que **la primera autofunción no cambia de signo**.

Para probar que el primer autovalor es simple vamos a usar el siguiente lema, cuya demostración se puede leer en [**17**].

LEMA 5.2. *Existe una constante $C = C(p) > 0$ tal que $\forall y, z \in \mathbb{R}^n$ se cumple que*

1. *si $1 < p < 2$, $|z|^p \geq |y|^p + p|y|^{p-2}y \cdot (z - y) + C\frac{|z-y|^2}{(|y|+|z|)^{2-p}}$, y*
2. *si $2 \leq p < \infty$, $|z|^p \geq |y|^p + p|y|^{p-2}y \cdot (z - y) + \frac{|z-y|^p}{2^{p-1}-1}$.*

TEOREMA 5.4. *El primer autovalor es simple.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tenemos dos autofunciones u y v asociadas a λ_1. Tenemos que probar que son una un múltiplo de la otra. Como las primeras autofunciones no cambian de signo, podemos suponer que ambas son positivas en Ω. Si $\varphi_1 = \frac{u^p - v^p}{u^{p-1}}$ y $\varphi_2 = \frac{v^p - u^p}{v^{p-1}}$ sirvieran como funciones test, haciendo algunas cuentas se obtendría el resultado. El problema es que no están definidas en el borde de Ω. Las vamos a modificar un poco para que sirvan como funciones test. Dado $\epsilon > 0$, definamos $u_\epsilon = u + \epsilon$ y $v_\epsilon = v + \epsilon$. De esta manera conseguimos dos funciones positivas en $\overline{\Omega}$ y ahora sí están bien definidas las funciones:

$$\varphi_1 = \frac{u_\epsilon^p - v_\epsilon^p}{u_\epsilon^{p-1}} \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \frac{v_\epsilon^p - u_\epsilon^p}{v_\epsilon^{p-1}}.$$

Calculemos sus gradientes:

$$\nabla\varphi_1 = \left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\epsilon}{u_\epsilon}\right)^p\right]\nabla u - p\left(\frac{v_\epsilon}{u_\epsilon}\right)^{p-1}\nabla v$$

y

$$\nabla\varphi_2 = \left[1 + (p-1)\left(\frac{u_\epsilon}{v_\epsilon}\right)^p\right]\nabla v - p\left(\frac{u_\epsilon}{v_\epsilon}\right)^{p-1}\nabla u.$$

Como u y v son acotadas se tiene que φ_1 y $\varphi_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando la defnición de autofunción tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi_1 = \lambda_1 \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi_1$$

y

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\varphi_2 = \lambda_1 \int_\Omega |v|^{p-2}v\varphi_2.$$

Sumando estas expresiones obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \int_\Omega \left[\left(\frac{u}{u_\epsilon}\right)^{p-1} - \left(\frac{v}{v_\epsilon}\right)^{p-1} \right] (u_\epsilon^p - v_\epsilon^p) = \\
&= \int_\Omega \left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\epsilon}{u_\epsilon}\right)^p\right] |\nabla u_\epsilon|^p + \left[1 + (p-1)\left(\frac{u_\epsilon}{v_\epsilon}\right)^p\right] |\nabla v_\epsilon|^p - \\
&- \int_\Omega p \left(\frac{v_\epsilon}{u_\epsilon}\right)^{p-1} |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v_\epsilon + p \left(\frac{u_\epsilon}{v_\epsilon}\right)^{p-1} |\nabla v_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v_\epsilon \\
&= \int_\Omega (u_\epsilon^p - v_\epsilon^p) \left(|\nabla \log u_\epsilon|^p - |\nabla \log v_\epsilon|^p\right) - p \int_\Omega v_\epsilon^p |\nabla \log u_\epsilon|^{p-2} \nabla \log u_\epsilon \cdot (\nabla \log v_\epsilon - \nabla \log u_\epsilon) - \\
&- p \int_\Omega u_\epsilon^p |\nabla \log v_\epsilon|^{p-2} \nabla \log v_\epsilon \cdot (\nabla \log u_\epsilon - \nabla \log v_\epsilon).
\end{aligned}
$$

Supongamos primero que $1 < p < 2$. Aplicando el lema con $y = \nabla \log u_\epsilon$ y $z = \nabla \log v_\epsilon$, y después en sentido inverso obtenemos que

$$
C \frac{|\nabla \log v_\epsilon - \nabla \log u_\epsilon|^2}{(|\nabla \log u_\epsilon| + |\nabla \log v_\epsilon|)^{2-p}} \leq (|\nabla \log v_\epsilon|^p - |\nabla \log u_\epsilon|^p) - p |\nabla \log u_\epsilon|^{p-2} \nabla \log u_\epsilon \cdot (\nabla \log v_\epsilon - \nabla \log u_\epsilon)
$$

y

$$
C \frac{|\nabla \log v_\epsilon - \nabla \log u_\epsilon|^2}{(|\nabla \log u_\epsilon| + |\nabla \log v_\epsilon|)^{2-p}} \leq (|\nabla \log u_\epsilon|^p - |\nabla \log v_\epsilon|^p) - p |\nabla \log v_\epsilon|^{p-2} \nabla \log v_\epsilon \cdot (\nabla \log u_\epsilon - \nabla \log v_\epsilon).
$$

Mutiplicando la primera desigualdad por v_ϵ^p, la segunda por u_ϵ^p y sumando las nuevas expresiones llegamos a que

$$
\begin{aligned}
C(u_\epsilon^p + v_\epsilon^p) \frac{|\nabla \log v_\epsilon - \nabla \log u_\epsilon|^2}{(|\nabla \log u_\epsilon| + |\nabla \log v_\epsilon|)^{2-p}} \leq\ & (u_\epsilon^p - v_\epsilon^p)(|\nabla \log u_\epsilon|^p - |\nabla \log v_\epsilon|^p) - \\
& - p v_\epsilon^p |\nabla \log u_\epsilon|^{p-2} \nabla \log u_\epsilon \cdot (\nabla \log v_\epsilon - \nabla \log u_\epsilon) - \\
& - p u_\epsilon^p |\nabla \log v_\epsilon|^{p-2} \nabla \log v_\epsilon \cdot (\nabla \log u_\epsilon - \nabla \log v_\epsilon),
\end{aligned}
$$

en casi todo punto de Ω. Integrando en Ω tenemos que

$$
0 \leq C \int_\Omega (u_\epsilon^p + v_\epsilon^p) \frac{|\nabla \log v_\epsilon - \nabla \log u_\epsilon|^2}{(|\nabla \log u_\epsilon| + |\nabla \log v_\epsilon|)^{2-p}} \leq \lambda_1 \int_\Omega \left[\left(\frac{u}{u_\epsilon}\right)^{p-1} - \left(\frac{v}{v_\epsilon}\right)^{p-1} \right] (u_\epsilon^p - v_\epsilon^p).
$$

Tomemos una sucesión $\epsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Usando el lema de Fatou vemos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq C \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} (u_{\epsilon_n}^p + v_{\epsilon_n}^p) \frac{|\nabla \log v_{\epsilon_n} - \nabla \log u_{\epsilon_n}|^2}{(|\nabla \log u_{\epsilon_n}| + |\nabla \log v_{\epsilon_n}|)^{2-p}} &\leq C \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (u_{\epsilon_n}^p + v_{\epsilon_n}^p) \frac{|\nabla \log v_{\epsilon_n} - \nabla \log u_{\epsilon_n}|^2}{(|\nabla \log u_{\epsilon_n}| + |\nabla \log v_{\epsilon_n}|)^{2-p}} \\
\leq \liminf_{n\to\infty} \lambda_1 \int_\Omega \left[\left(\frac{u}{u_{\epsilon_n}}\right)^{p-1} - \left(\frac{v}{v_{\epsilon_n}}\right)^{p-1} \right] (u_{\epsilon_n}^p - v_{\epsilon_n}^p) = 0.
\end{aligned}
$$

y, por lo tanto,

$$
\int_\Omega (u^p + v^p) \frac{|\nabla \log v - \nabla \log u|^2}{(|\nabla \log u| + |\nabla \log v|)^{2-p}} = 0.
$$

Como el integrando es no negativo, debe ser $(u^p + v^p)|\nabla \log v - \nabla \log u|^2 = 0$ en casi todo punto de Ω y, como u y v son positivas, entonces $\nabla \log v = \nabla \log u$. Equivalentemente, $v \nabla u = u \nabla v$ en casi todo Ω, es decir, $u = \alpha v$ en casi todo Ω para alguna constante α. Ahora bien, como estas funciones son continuas, debe ser $u = \alpha v$ en Ω, como queríamos ver.

Supongamos ahora que $2 \leq p < \infty$. De forma completamente análoga al caso $1 < p < 2$ se prueba que

$$0 \leq \frac{1}{2^{p-1}-1} \int_\Omega (u_\epsilon^p + v_\epsilon^p) |\nabla \log v_\epsilon - \nabla \log u_\epsilon|^p \leq \lambda_1 \int_\Omega \left[\left(\frac{u}{u_\epsilon}\right)^{p-1} - \left(\frac{v}{v_\epsilon}\right)^{p-1} \right] (u_\epsilon^p - v_\epsilon^p)$$

y, usando el lema de Fatou con la sucesión (ϵ_n), resulta que

$$\int_\Omega (u^p + v^p) |\nabla \log u - \nabla \log v|^p = 0.$$

Igual que antes se deduce de aquí que $u = \alpha v$ en Ω. □

Proposición 5.2. *Cualquier autofunción positiva está asociada a λ_1.*

Demostración. Sea $v > 0$ una autofunción asociada a λ y sea u una autofunción asociada a λ_1. Supongamos que $\lambda > \lambda_1$. Tomando las mismas funciones test que en la demostración anterior y repitiendo la cuenta llegamos a que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\lambda_1 \left(\frac{u}{u_\epsilon}\right)^{p-1} - \lambda \left(\frac{v}{v_\epsilon}\right)^{p-1} \right] (u_\epsilon^p - v_\epsilon^p) = \\
&= \int_\Omega (u_\epsilon^p - v_\epsilon^p) \left(|\nabla \log u_\epsilon|^p - |\nabla \log v_\epsilon|^p \right) - p \int_\Omega v_\epsilon^p |\nabla \log u_\epsilon|^{p-2} \nabla \log u_\epsilon \cdot (\nabla \log v_\epsilon - \nabla \log u_\epsilon) - \\
&- p \int_\Omega u_\epsilon^p |\nabla \log v_\epsilon|^{p-2} \nabla \log v_\epsilon \cdot (\nabla \log u_\epsilon - \nabla \log v_\epsilon) \geq 0,
\end{aligned}$$

por el lema 5.2 y, luego, para $1 < p < \infty$,

$$\int_\Omega \left[\lambda_1 \left(\frac{u}{u_\epsilon}\right)^{p-1} - \lambda \left(\frac{v}{v_\epsilon}\right)^{p-1} \right] (u_\epsilon^p - v_\epsilon^p) \geq 0.$$

Haciendo tender ϵ a 0 obtenemos que $(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u^p - v^p \geq 0$ y, por lo tanto, $\int_\Omega u^p \leq \int_\Omega v^p$. Esto no puede ser porque a u podemos cambiarla por $2u, 3u, 4u, \cdots$ ya que todas son autofunciones asociadas a λ_1. □

Otra demostración de la simplicidad del primer autovalor puede obtenerse utilizando la identidad de Picone cuya demostración se encuentra en [**3**] .

Identidad de Picone. *Sean $u \geq 0$ y $v > 0$ funciones continuas en Ω y diferenciables en casi todo punto de Ω. Sean*

$$L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla u$$

y

$$R(u,v) = |\nabla u|^p - |\nabla v|^{p-2}\nabla(\frac{u^p}{v^{p-1}}) \cdot \nabla v.$$

Entonces,

1. $L(u,v) = R(u,v)$,

2. $L(u,v) \geq 0$ *en casi todo punto de* Ω, *y*

3. *$L(u,v)=0$ en casi todo punto de Ω si y sólo si $u=kv$ para alguna constante $k\in\mathbb{R}$.*

Siguiendo la demostración de M. Cuesta (cf. [**10**]) probemos que λ_1 es simple. Sean u y v dos autofunciones positivas asociadas a λ_1, y sea $\epsilon>0$. Por los primeros dos items de la identidad de Picone,

$$0\leq\int_\Omega L(u,v+\epsilon)\,dx=\int_\Omega R(u,v+\epsilon)\,dx=\lambda_1\int_\Omega |u|^p-\int_\Omega|\nabla v|^{p-2}\nabla(\frac{u^p}{(v+\epsilon)^{p-1}})\cdot\nabla v.$$

Igual que en la otra demostración, podemos utilizar la función $\varphi=\frac{u^p}{(v+\epsilon)^{p-1}}\in W_0^{1,p}(\Omega)$ como función test en la definición de autofunción:

$$\int_\Omega|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\varphi\,dx=\lambda_1\int_\Omega|v|^{p-2}v\varphi\,dx=\lambda_1\int_\Omega v^{p-1}\varphi\,dx.$$

De esta forma obtenemos que

$$0\leq\int_\Omega L(u,v+\epsilon)\,dx=\lambda_1\int_\Omega u^p(1-\frac{v^{p-1}}{(v+\epsilon)^{p-1}})\,dx.$$

Si hacemos tender ϵ a 0 concluimos, utilizando los items 2 y 3 de la identidad de Picone, que $u=kv$ para alguna constante $k\in\mathbb{R}$.

Con un argumento similar se prueba que cualquier autofunción positiva está asociada a λ_1. En otras palabras, si u es una autofunción asociada a $\lambda>\lambda_1$, entonces u cambia de signo en Ω.

Queremos probar ahora que λ_1 es aislado. Veamos antes el siguiente lema.

Lema 5.3. *Sea u una autofunción asociada a $\lambda>\lambda_1$. Sean $\Omega^-=\{x\in\Omega: u(x)<0\}$ y $\Omega^+=\{x\in\Omega:u(x)>0\}$. Se tiene que*

$$|\Omega^-|\geq C(n,p,\Omega)\lambda^{-q}\quad y\quad |\Omega^+|\geq C(n,p,\Omega)\lambda^{-q},$$

donde $q=n/p$, si $p\neq n$, y $q=2$, si $p=n$.

Demostración. Sean u^+ y u^- las partes positiva y negativa de u respectivamente. Tomando a u^- como función test en la definición de autofunción vemos que

$$\int_{\Omega^-}|\nabla u|^p=\lambda\int_{\Omega^-}|u|^p.$$

Supongamos que $p<n$. Si usamos la desigualdad de Hölder con exponente $\frac{n}{n-p}$ tenemos que

$$\int_{\Omega^-}|u|^p\leq\left(\int_{\Omega^-}|u|^{p^*}\right)^{\frac{n-p}{n}}|\Omega^-|^{\frac{p}{n}},$$

donde $p^*=\frac{np}{n-p}$ es el conjugado de Sobolev de p. Elevando a la $1/p$ obtenemos que $\|u\|_{L^p(\Omega^-)}\leq|\Omega^-|^{1/n}\|u\|_{L^{p^*}(\Omega^-)}$. Como $u^-\in W_0^{1,p}(\Omega)$, por la desigualdad de Poincaré, existe una constante $C=C(n,p)$ tal que $\|u^-\|_{L^{p^*}(\Omega)}\leq C\|\nabla u^-\|_{L^p(\Omega)}$. Como u^- se anula afuera de Ω^- y coincide con $-u$ en Ω^-, resulta que $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega^-)}\leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega^-)}$. Juntando esto con la desigualdad anterior llegamos a que

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega^-)}\leq\lambda^{1/p}|\Omega^-|^{1/n}C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega^-)},$$

de donde deducimos que $|\Omega^-|\geq C\lambda^{-n/p}$.

Si $p > n$, la desigualdad de Poincaré dice que $\|u^-\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(n,p)|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|\nabla u^-\|_{L^p(\Omega)}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^-} |\nabla u|^p = \lambda \int_{\Omega^-} |u|^p &\leq \lambda \|u^-\|^p_{L^\infty(\Omega)}|\Omega^-| \\ &\leq C\lambda|\Omega^-|^{p/n}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega^-)},\end{aligned}$$

o sea que $|\Omega^-| \geq C\lambda^{-n/p}$.

Finalmente, si $p = n$ y tomamos $\alpha > 1$, aplicando primero la desigualdad de Hölder con exponente α y luego la desigualdad de Poincaré, vemos que

$$\|\nabla u^-\|^p_{L^p(\Omega)} = \lambda \int_{\Omega^-} |u|^p \leq \lambda|\Omega^-|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\|u^-\|^p_{L^{p\alpha}(\Omega)} \leq C\lambda|\Omega^-|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\|\nabla u^-\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Por lo tanto, $|\Omega^-| \geq C\lambda^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}$. Si elegimos $\alpha = 2$, obtenemos la afirmación del enunciado.

La acotación de $|\Omega^+|$ se obtiene tomando a u^+ como función test y procediendo de forma análoga. $\square$

Teorema 5.5. *El primer autovalor es aislado, es decir, existe $a > \lambda_1$ tal que λ_1 es el único autovalor en $[0, a]$.*

Demostración. Si λ es un autovalor, entonces $\lambda \geq \lambda_1$. Luego, basta ver que es aisaldo a derecha. Supongamos, por el contrario, que existe una sucesión $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de autovalores tal que $\lambda_k > \lambda_1$ y $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_1$. Sean u_k autofunciones asociadas a los λ_k con $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Como $\int_\Omega |\nabla u_k|^p = \lambda_k$, tenemos que la sucesión $(\nabla u_k)_k$ es acotada en $L^p(\Omega)$. Por el lema 5.1 existen una subsucesión (a la que seguiremos llamando $(u_k)_k$) y una función $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tales que

$$u_k \to u \text{ en } L^p(\Omega) \quad \text{ y } \quad \nabla u_k \xrightarrow{w} \nabla u \text{ en } L^p(\Omega).$$

Quedándonos eventualmente con una subsucesión (a la que seguiremos llamando $(u_k)_k$) tenemos que $u_k \to u$ en casi todo punto de Ω. La convergencia débil de los gradientes implica que

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)} = \liminf_{k\to\infty} \lambda_k^{1/p} = \lambda_1^{1/p}.$$

Como $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$, podemos reescribir esto así:

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^p}{\int_\Omega |u|^p} \leq \lambda_1,$$

y, luego, u es una autofunción asociada a λ_1.

Supongamos primero que u es positiva en Ω. Como la sucesión (u_k) converge a u en casi todo punto de Ω, sabemos, por el teorema de Egorov, que dado $\epsilon > 0$, existe un subconjunto $A_\epsilon \subset \Omega$ tal que $|A_\epsilon| < \epsilon$ y tal que (u_k) converge uniformemente a u en $\Omega - A_\epsilon$. Para cada $k \geq 1$, sea $\Omega_k^- = \{x \in \Omega : u_k(x) < 0\}$. Como u es positiva en Ω, debe ser $|\Omega_k^-| \leq |A_\epsilon| < \epsilon$. Por otro lado, el lema anterior nos dice que $|\Omega_k^-| \geq C(n,p,\Omega)\lambda_k^{-q} \to_{k\to\infty} C(n,p,\Omega)\lambda_1^{-q} > 0$, obteniendo un absurdo.

Si $u < 0$ en Ω, se llega a una contradicción trabajando con el conjunto $\Omega_k^+ = \{x \in \Omega : u_k(x) > 0\}$. $\square$

Observación. Ya sabíamos que esa función u que sale del lema 5.1 iba a ser una autofunción asociada a λ_1 (recordar la cuenta que hicimos para probar que el espectro es cerrado). Pero en este caso, como la sucesión $(\lambda_k)_k$ converge a λ_1 y no a otro autovalor, se puede hacer esta cuenta que es más sencilla.

3. Aproximación variacional del primer autovalor

Como $\lambda_1 = \text{ínf}\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^p}{\int_\Omega |u|^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0\right\}$, si tomamos como $\mathbb{V}_h$ cualquier subespacio de dimensión finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$ y definimos

$$\lambda_{1,h} = \underset{\substack{u_h \in \mathbb{V}_h \\ u_h \neq 0}}{\text{ínf}} \frac{\int_\Omega |\nabla u_h|^p}{\int_\Omega |u_h|^p},$$

se cumple que $\lambda_1 \leq \lambda_{1,h}$. El teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov asegura que existe una función $u_h \in \mathbb{V}_h$ donde se alcanza el mínimo. Si esperamos tener algún resultado de convergencia de la sucesión $\lambda_{1,h}$ hacia λ_1 vamos a tener que imponerles alguna restricción a los subespacios $\mathbb{V}_h$. Lo natural es hacer la hipótesis de aproximación (igual que en caso lineal) y, como vamos a trabajar sólo con el primer autovalor, sólo pedimos que se cumpla la hipótesis para u_1, la autofunción positiva y normalizada asociada a λ_1. Lo que pedimos entonces es que

$$\lim_{h \to 0} \underset{v_h \in \mathbb{V}_h}{\text{ínf}} \|u_1 - v_h\|_{1,p,\Omega} = 0.$$

Teorema 5.6. *Existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que, si h es suficientemente chico, entonces*

$$|\lambda_1 - \lambda_{1,h}| \leq C \underset{v_h \in \mathbb{V}_h}{\text{ínf}} \|u_1 - v_h\|_{1,p,\Omega}.$$

Demostración. Sea $v_h \in \mathbb{V}_h$. Sea $u_h \in \mathbb{V}_h$ una función no nula que minimiza el cociente de Rayleigh entre todas las funciones no nulas de $\mathbb{V}_h$. Tenemos entonces que

$$\lambda_{1,h}^{1/p} = \frac{\|\nabla u_h\|_{L^p(\Omega)}}{\|u_h\|_{L^p(\Omega)}} \leq \frac{\|\nabla v_h\|_{L^p(\Omega)}}{\|v_h\|_{L^p(\Omega)}} \leq \frac{\|\nabla v_h - \nabla u_1\|_{L^p(\Omega)} + \lambda_1^{1/p}}{\|v_h\|_{L^p(\Omega)}},$$

pues $\|\nabla u_1\|_{L^p(\Omega)} = \lambda_1^{1/p}$. Acotemos el denominador. Si $n > p$, vimos en la demostración del lema 5.3 que dada una función $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|w\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/n}\|w\|_{L^{p^*}(\Omega)}$. Aplicando esto a $w = u_1 - v_h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y usando la desigualdad de Poincaré tenemos que

$$\|u_1 - v_h\|_{L^p(\Omega)} \leq C|\Omega|^{1/n}\|\nabla u_1 - \nabla v_h\|_{L^p(\Omega)} = C\|\nabla u_1 - \nabla v_h\|_{L^p(\Omega)}.$$

En el caso $n < p$, la desigualdad de Poincaré nos dice que

$$\|u_1 - v_h\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/p}\|u_1 - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C|\Omega|^{1/n}\|\nabla u_1 - \nabla v_h\|_{L^p(\Omega)} = C\|\nabla u_1 - \nabla v_h\|_{L^p(\Omega)}.$$

Análogamente, en el caso $p = n$, se cumple que $\|u_1 - v_h\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u_1 - \nabla v_h\|_{L^p(\Omega)}$. Como

$$\big|\|v_h\|_{L^p(\Omega)} - 1\big| = \big|\|v_h\|_{L^p(\Omega)} - \|u_1\|_{L^p(\Omega)}\big| \leq \|u_1 - v_h\|_{L^p(\Omega)},$$

deducimos que para $1 < p < \infty$,

$$\|v_h\|_{L^p(\Omega)} \geq 1 - C|\Omega|^{1/n}\|\nabla u_1 - \nabla v_h\|_{L^p(\Omega)}.$$

Usando el desarrollo de Taylor alrededor de 0 de la función $g(x) = \left(\frac{x + \lambda_1^{1/p}}{1 - Cx}\right)^p$ podemos acotar $\lambda_{1,h}$ del siguiente modo, concluyendo la demostración:

$$\lambda_{1,h} \leq \left(\frac{\|\nabla u_1 - \nabla v_h\|_{L^p(\Omega)} + \lambda_1^{1/p}}{1 - C\|\nabla u_1 - \nabla v_h\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p \leq \lambda_1 + \tilde{C}\|\nabla u_1 - \nabla v_h\|_{L^p(\Omega)}.$$

□

En la demostración del próximo teorema usaremos una propiedad que tiene $W_0^{1,p}(\Omega)$ por ser un espacio uniformemente convexo. Recordemos la definición de estos espacios.

Definición 5.3. *Se dice que un espacio de Banach* $(E, \|\cdot\|)$ *es uniformemente convexo si dado* $0 < \epsilon \leq 2$*, existe* $\delta > 0$ *tal que si* x *e* y *son dos elementos de* E *con* $\|x\| = \|y\| = 1$ *y* $\|x - y\| \geq \epsilon$*, se cumple que* $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$*.*

Un espacio de Banach puede ser uniformemente convexo en una norma y no serlo en una norma equivalente. Por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ es uniformemente convexo con la norma $\|(x,y)\|_2 = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$ pero no con la norma $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$. El teorema de Pettis-Milman, cuya demostración puede leerse en [**4**], afirma que un espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

Para $1 < p < \infty$, los espacios $L^p(\Omega)$ son uniformemente convexos. Esto se deduce inmediatamente de las desigualdades de Clarkson (cf. [**1**]):

1. si $1 < p \leq 2$, $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p'} \leq \left(\frac{\|u\|^p + \|v\|^p}{2}\right)^{p'-1}$, y
2. si $2 \leq p < \infty$, $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p} \leq \frac{\|u\|^p + \|v\|^p}{2}$,

donde p' es el exponente conjugado de p.

De un modo similar se prueba que el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, donde $1 < p < \infty$, es uniformemente convexo (cf. [**1**]). Al ser $W_0^{1,p}(\Omega)$ un subespacio cerrado de $W^{1,p}(\Omega)$, hereda la propiedad de ser uniformemente convexo. Además, $W_0^{1,p}(\Omega)$ dotado de la norma equivalente $\|u\| = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ también es uniformemente convexo (cf. [**12**]).

Proposición 5.3. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach uniformemente convexo. Sea* $(x_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de* E *tal que* $x_n \xrightarrow{w} x$ *y* $\|x_n\| \to \|x\|$*. Entonces,* $x_n \to x$*.*

Demostración. Si $x = 0$, el resultado es trivial. Supongamos entonces que $x \neq 0$. Sea $\Lambda_n = \max\{\|x_n\|, \|x\|\} > 0$. Se cumple que $\Lambda_n \to \|x\|$. Si definimos $y_n = \frac{x_n}{\Lambda_n}$ e $y = \frac{x}{\|x\|}$, tenemos que $f(y_n) = \frac{1}{\Lambda_n} f(x_n) \to \frac{1}{\|x\|} f(x) = f(y)$, donde $f \in E^*$, es decir, $y_n \xrightarrow{w} y$. Sabemos que $\|y\| = 1$, $\|y_n\| \leq 1$ y $\|y_n\| \to 1$. Si consideramos la sucesión normalizada $\tilde{y}_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$, es evidente que $\tilde{y}_n \xrightarrow{w} y$. Como $\frac{\tilde{y}_n + y}{2} \xrightarrow{w} \frac{y+y}{2} = y$, obtenemos que $\|y\| \leq \liminf \|\frac{\tilde{y}_n + y}{2}\|$. Luego,

$$1 = \|y\| \leq \liminf_{n\to\infty} \left\|\frac{\tilde{y}_n + y}{2}\right\| \leq \limsup_{n\to\infty} \left\|\frac{\tilde{y}_n + y}{2}\right\| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\|\tilde{y}_n\| + \|y\|}{2} = 1.$$

Entonces $\|\frac{\tilde{y}_n + y}{2}\| \to 1$ y, como E es uniformemente convexo, resulta que $\|\tilde{y}_n - y\| \to 0$. No es difícil verificar que eso implica que $\|x_n - x\| \to 0$. $\square$

Observación. Sean $(u_k)_{k\geq 1}$ y u en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u_k \xrightarrow{w} \nabla u$ en $(L^p(\Omega))^n$, entonces $u_k \xrightarrow{w} u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. La demostración es trivial si se usa la siguiente caracterización del espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$: dada $\varphi \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, existen $f_0, f_1, \cdots, f_n \in L^{p'}(\Omega)$ tales que

$$\varphi(v) = \int_\Omega f_0 v + \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Las funciones f_i no son únicas y, cuando Ω es acotado (como en nuestro caso), puede tomarse $f_0 = 0$. La demostración de este hecho puede leerse en [**4**]; usa el teorema de Hahn-Banach y el teorema de representación de Riesz para $L^p(\Omega)$.

TEOREMA 5.7. *Sea* u_1 *la autofunción positiva asociada a* λ_1 *con* $\|u_1\|_{0,p,\Omega} = 1$. *Dado* $\epsilon > 0$, *existe un* $h > 0$ *tal que para alguna* $u_h \in \mathbb{V}_h$, *autofunción asociada a* $\lambda_{1,h}$ *con* $\|u_h\|_{0,p,\Omega} = 1$, *se tiene que* $\|u_h - u_1\|_{1,p,\Omega} < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $h > 0$, sea $v_h \in \mathbb{V}_h$ una función normalizada en $L^p(\Omega)$ que minimiza el cociente de Rayleigh sobre $\mathbb{V}_h$. Como $\|v_h\|_{L^p(\Omega)} = 1$, $\|\nabla v_h\|_{L^p(\Omega)} = \lambda_{1,h}^{1/p}$ y, por el teorema anterior, concluimos que la sucesión (∇v_h) es acotada en $L^p(\Omega)$. Por el lema 5.1 existen una subsucesión y una función $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tales que $v_{h_j} \to v$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla v_{h_j} \xrightarrow{w} \nabla v$ en $L^p(\Omega)$. En particular, $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$.

Por la convergencia débil de los gradientes resulta que

$$\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{h_j \to 0} \|\nabla v_{h_j}\|_{L^p(\Omega)} = \liminf_{h_j \to 0} \lambda_{1,h}^{1/p} = \lambda_1^{1/p}.$$

Luego, v es una autofunción asociada a λ_1 pues

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p}{\int_\Omega |v|^p} \leq \lambda_1.$$

Veamos que $v_{h_j} \to v$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Siendo el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ uniformemente convexo, la convergencia fuerte $v_{h_j} \to v$ en $L^p(\Omega)$, la convergencia débil $\nabla v_{h_j} \xrightarrow{w} \nabla v$ en $L^p(\Omega)$ y la convergencia de las normas $\|v_{h_j}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ implican la convergencia fuerte $v_{h_j} \to v$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Falta ver entonces la convergencia de las normas. Como

$$\|v_{h_j}\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v_{h_j}\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v_{h_j}\|^p_{L^p(\Omega)} = 1 + \|\nabla v_{h_j}\|^p_{L^p(\Omega)}$$

y

$$\|v\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v\|^p_{L^p(\Omega)} = 1 + \|\nabla v\|^p_{L^p(\Omega)},$$

tenemos que

$$\left| \|v_{h_j}\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - \|v\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \right| = \left| \|\nabla v_{h_j}\|^p_{L^p(\Omega)} - \|\nabla v\|^p_{L^p(\Omega)} \right| = |\lambda_{h_j} - \lambda_1| \xrightarrow[h_j \to 0]{} 0.$$

Ahora bien, como el primer autovalor es simple debe ser $v = \alpha u_1$ para alguna constante α y, como v y u_1 tienen norma 1 en $L^p(\Omega)$, resulta que $v = u_1$ o $v = -u_1$. Si $u = u_1$, existe un elemento v_{h_j} tal que $\|v_{h_j} - u_1\|_{1,p,\Omega} < \epsilon$. En ese caso definimos $u_h = v_{h_j}$. Supongamos que $v = -u_1$. Como $v_{h_j} \to v$ en $W^{1,p}(\Omega)$, existe un elemento v_{h_j} tal que $\|v_{h_j} - v\|_{1,p,\Omega} = \|v_{h_j} + u_1\|_{1,p,\Omega} < \epsilon$. Tomando $u_h = -v_{h_j} \in \mathbb{V}_h$ resulta que $\|u_h - u_1\|_{1,p,\Omega} = \| - v_{h_j} - u_1\|_{1,p,\Omega} < \epsilon$. $\square$

Fin

Bibliografía

[1] Adams, R.A., *Sobolev spaces,* Academic press, 1975.

[2] Agmon, S., *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems,* Van Nostrand Mathematical Studies **2**, 1965.

[3] Allegretto, W. - Huang, Y.X., *A Picone's identity for the p-Laplacian and applications,* Nonlinear Analysis TMA, Vol. 32 (7), 1998, pp. 819–830.

[4] Brezis, H., *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones.* Alianza Editorial, 1984.

[5] Browder, F.E., *Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems,* Proceedings of the American Mathematical Society. Symposia in Applied Mathematics **17**, pp. 24–49.

[6] Chow, S., *Finite element error estimates for non-linear elliptic equations of monotone type,* Numerische Mathematik **54**, 1989, pp. 373–393.

[7] Ciarlet, P., *The finite element method for elliptic problems,* North-Holland Publishing Company, 1979.

[8] Ciarlet, P. - Lions, J.P., *Handbook of Numerical Analysis, Vol II,* Elsevier Science B.V., 1991.

[9] Courant, R., *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration,* Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 1943, pp. 1–23.

[10] Cuesta, M., *Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights,* Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2001 (2001), No. 33, pp. 1–9.

[11] Di Benedetto, E., *$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations,* Nonlinear Analysis **7**, 1983, pp. 827–850.

[12] Dinca, G. - Jebelean, P. - Mawhin J., *Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian,* Portugaliae Mathematica, Vol. 58, Fac. 3, 2001.

[13] Evans, L.C., *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics, 1998.

[14] Glowinski, R. - Marrocco, A., *Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une clase de problèmes de Dirichlet non linéaires,* Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Numér. **R-2**, pp. 41–76.

[15] Leray, J. - Lions, J.L., *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder,* Bull. Soc. Math. France, 1965.

[16] Lindqvist, P., *A nonlinear eigenvalue problem,* `http://www.math.ntnu.no/ lqvist/nonlineigen.pdf`

[17] Lindqvist, P., *On the equation $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u=0$,* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 109, No 1, 1990, pp. 157–164.

[18] Peral, I., *Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian,* Second school of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, Trieste, 1997.

[19] Raviart, P.A. - Thomas, J.M., *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles,* Dunod, 1998.

[20] Rossi, J.D., *Approximation of the Sobolev trace constant,* Divulgaciones Matemáticas, Vol. 11, No. 2, 2003, pp. 109–113.

[21] Scellbach, K., *Probleme der variationsrechnung,* J. Reine Angew. Math **41**, 1851, pp. 293–363.

[22] Tolksdorf, P., *Regularity for a more general class of quasi-linar elliptic equations,* Journal of Differential Equations **51**, 1984, pp. 126–150.

[23] Trudinger, N., *On Harnack type inequalities and their applications to quasi-linear elliptic equations,* Communications on Pure and Applied Mathematics **20**, 1967, pp. 721–747.

[24] `www.wikipedia.org`

[25] Ziemer, W.P., *Weakly differentiable functions,* Springer-Verlag