DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Tesis de Licenciatura

Clasificación de aplicaciones recubridoras

Laura Pezzatti

Director: Eduardo Dubuc

Marzo 2009

"¿Hasta cuándo los pobres jóvenes estarán obligados a escuchar o repetir todo el día? ¿Cuándo se les dejará tiempo para meditar sobre ese montón de conocimientos, para coordinar esa multitud de proposiciones sin continuación, de cálculos sin relación?... Pero no, se enseña minuciosamente teorías truncadas y cargadas de reflexiones inútiles, mientras que se omiten las proposiciones más simples y más brillantes del álgebra, en lugar de eso, se demuestra con gran coste de cálculos y con razonamientos siempre largos y a veces falsos, corolarios cuya demostración se hace sola. Por otra parte, ¿por qué los examinadores no hacen las preguntas a los candidatos más que de manera enredadora?, pareciera que temieran ser entendidos sobre lo que preguntan. El alumno esta menos ocupado en instruirse que en aprobar su exámen"

Evariste Galois

Índice

Agradecimientos

En este espacio quiero nombrar a todas las personas que han influido para formarme, tanto como matemática como persona, espero no olvidarme de nadie...

A mi familia por apoyarme en mis decisiones. A Susana y Carlos porque con sus errores y aciertos hoy he llegado hasta acá. A mi hermano, Patrick, por estar siempre, por sus consejos, por su inteligencia y practicidad.

A mis hermanos de la vida, Sergio, Lucas y Mariano, por compartir conmigo tantos momentos, por las charlas, la alegría, optimismo y dulzura. Y a mejor cuñada Chole por ser tan sabia.

A mis amigas nicoleñas, por estar desde hace tantos años conmigo y ser tan especiales, muy especialmente a Guille, Eri, Mariana, Ana, Anita, Gui, Chuchu, Vicky y Maia.

A mis amigas porteñas, Silvis y Romi, porque a pesar de que ahora están lejos, siempre me acompañan con su optimismo.

A mis amigos, porque realmente son los mejores, muy especialmente a Martín Pando, Juanma Meis, Fede Larco, Javi Mattioli, Martín Avendaño, Luis Surnyak, Seba Cuello, Lean Lombardi y Pablo Schimdberg.

A mis amigos y compañeros de la facu, por haber hecho que las "cursadas" sean más llevaderas, especialmente a Lean, Pablo, Camilo, Juliana, Fran, Eze, Tinch, Sergio, Fede, Matías, Yuri, Angie, Jony, Miguel, César, Nico, René, Abigail, Eliana, Romina, Daniel, Seba.F, Ariel, Gaby, Guille, Pablo, Martina, Martín.S, Magali, Vicky, Isa y Marcelo.

A mis compañeros de colegio, porque cada mañana con ellos fue realmente inolvidable, especialmente a Mauro, Diego, Pablo y Hernán.

A mis profes de E.N.R.O, especialmente a Susana Marful, Adrián Ferrero, Doris Floriani, Cristina Garavaglia y Elsa Went, porque en sus materias nos hacían pensar.

A Claudia Conde y Teresa Silicani por engancharme con la matemática cuando era muy chiquita. A Julia Seveso, Graciela Ferrarini, Flora Gutierrez, Patricia Fauring y todo el equipo de Olimpíadas Matemática Argentina, porque me enseñaron a pensar y porque creo que la actividad que realizan es la mejor.

A Eduardo Dubuc y Martín Avendaño por compartir conmigo su profunda y original visión de la matemática y enseñarme mucho de lo que sé.

A Fernando Cukierman, Alicia Dickenstein y Cristina López porque además de ser buenos profesores, son excelentes personas.

A Juan Sabia, Pablo Solernó, Guillermo Cortiñas, Javier Etcheverry y Gabriel Minian por sus excelentes clases.

A Pablo De Napoli, Pablo Amster y Ricardo Testoni por los consejos y lo mucho que me enseñaron.

A mis compañeros de trabajo del C.B.C, especialmente a Adri, Ma.Silvia, Andrea, Mónica, Paula, Alejandra, Tomás y mis coordinadores Walter, Bety, Cecilia y María porque la paso muy bien laburando con ellos.

A mis compañeros de trabajo del Huergo, especialmente a Silvia, Marisa, Caro, Pau, Ricardo, Ramiro, Lucio y Héctor por lo que me enseñan y aconsejan. A Silvina y a Estela por la libertad que me dan para realizar mi labor.

A GrupoMat, especialmente a Eva Salanova, por confiar en mi para tantos proyectos educativos. A mi hermano por ayudarme a llevarlos a cabo. Y a todos los chicos que han ido participando a lo largo de todos estos años, especialmente a Mariano, Sergio, Lucas, Juli, Pablo, Damián, Maru, Marianela, Vicky, Marcos.H, Meli, Nacho, Marcos.O y Lu.

A Mile, Seba, Mariano y Andre porque gracias a la motivación de trabajar con ellos en MateMarote, hoy me recibo.

A todos los chicos de Expedición Ciencia, porque me hizo muy bien conocerlos y saber que hay gente, con muy buenas ideas, poniéndole pilas a la enseñanza de las ciencias.

A mis alumnos, porque no hay nada mejor que aprender junto a ellos, especialmente a mis alumnis de 4to química y de olimpíadas de matemática del Huergo. Muy especialmente a Agus, Bruno, Matías y Emilio por las charlas compartidas; a Fran, Seba, Naty, Lucas y Tyn por los lindos momentos y a Tincho y Tyn por todo lo que me hacen reir.

A toda la banda 303 por la fuente inagotable de diversión, especialmente a Pepo, Pablo, Mati, Facu, Euge, Nico y Juli.

A Lili, Marina, Susi y Mercedes por ayudarme a crecer.

A mis compañeros de Runa.

A mi novio, por su amor incondicional y porque estando a su lado todo es más fácil.

A Marco Farinati, por las observaciones realizadas.

A todos, muchas muchas gracias.

Laura Pezzatti

Introducción

El objetivo de este trabajo es demostrar el teorema de clasificación de aplicaciones recubridoras en el caso de un espacio topológico cualquiera B, usando el método de descenso de Grothendiek (ver [4]).

Es bien conocido el teorema de clasificación de revestimientos si B es localmente arcoconexo y semi localmente simplemente conexo. En este resultado se utiliza el grupoide $\pi_1(B)$ de Poincaré, cuyos objetos son los puntos de B, y cuyas flechas son las clases de homotopía de caminos. El teorema establece una equivalencia entre la categoría de revestimientos de B y la categoría de familias de conjuntos munidos de una acción de $\pi_1(B)$. Bajo esta equivalencia, los conjuntos de la familia son las fibras del revestimiento.

Para poder generalizar este resultado a contextos más generales se necesita una defnción adecuada de aplicación recubridora, y una construcción completamente diferente del grupoide $\pi_1(B)$. Esto ha sido desarrollado por Hernández Paricio en [5].

En este trabajo desarrollamos una nueva demostración de los resultados de [5] utilizando la teoría del descenso de Grothendieck y técnicas de colímite filtrante, según los lineamientos presentados en [2].

En este trabajo se considera una definición de aplicaciones recubridoras asociadas a un cubrimiento fijo del espacio (ver 2.7 y 2.10) y luego (omitimos detalles en esta introducción) tomamos el colímite dirigido por el conjunto de cubrimientos ordenados por refinamiento. Al tomar el colímite nos queda la misma categoría de aplicaciones recubridoras definidas en [5].

Esto nos permite hacer una demostración del teorema de clasificación más clara y conceptual. La llave para esta prueba consiste en la demostración de la equivalencia entre los datos que determinan una aplicación recubridora y los datos sobre una familia de conjuntos que determinan un dato de descenso del nervio de Cech del cubrimiento (teorema 3.5).

El teorema de clasificación que se prueba en este trabajo (teorema de Hernández Paricio) generaliza el concepto del Π_1 de Poincaré, es decir, para el caso en el que el espacio sea localmente arcoconexo y semi localmente simplemente conexo, probamos en la sección 5.2, que el Π_1 que le asignamos vía nuestro teorema de clasificación coincide con el Π_1 de Poincaré.

Si bien la definición de aplicación recubridora con la que trabajamos, no coincide, en principio, en el caso localmente conexo con la definición usual de revestimiento (contrariamente a lo afirmado en [5]), se puede probar que dichas definiciones si coinciden en el caso en que el espacio sea además metrizable ([3]). En ese mismo trabajo también se prueba que si el espacio es metrizable y la fibra de la aplicación es finita, también las definiciones coinciden.

Además en el último capítulo hacemos en detalle el ejemplo del círculo de Varsovia, que vía nuestro teorema de clasificación se le asigna el Π_1 esperado, mientras que el Π_1 de Poincaré es trivial.

Como hemos dicho anteriormente, en la realización de este trabajo hemos encontrado que la afirmación de [5] que dice que el concepto de aplicación recubridora coincide con el de revestimiento en el caso de un espacio localmente conexo no está bien fundamentada, y todo hace presumir que pueden tenerse revestimientos que no serían aplicaciones recubridoras (ver 5.18).

Surge entonces el interrogante sobre la posibilidad de dar una definición de aplicación recubridora (más general que la de Hernández Paricio) que si coincida con la definición usual de revestimiento en el caso localmente conexo, y para la cual sea válido también un teorema de clasificación.

Teniendo en cuenta la observacion 2.6 creemos que una solución a este problema es posible utilizando la noción de hipercubrimiento de Artin-Mazur (ver [1]), pero ello ya escapa el alcance de este trabajo.

1. Preliminares Categóricos

1.1. Definiones y propiedades básicas

En esta sección fijamos notación y terminología.

Notación 1.1. *Dada $\mathcal{C}$ una categoría (se encuentra la definición completa en [6] pág.7) usamos la siguiente notación,*

- $Obj(\mathcal{C})$*: objetos de* $\mathcal{C}$ *y* $Fl(\mathcal{C})$*: flechas de* $\mathcal{C}$*.*
- ∂_0 *y* ∂_1 *son el dominio y codominio de una flecha, i.e*

$$Fl(\mathcal{C}) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} Ob(\mathcal{C})$$

- $\circ : Fl(\mathcal{C}) \times Fl(\mathcal{C}) \to Fl(\mathcal{C})$ *la operación parcial de composición y se tiene que* $f \circ g$ *está definida* $\Leftrightarrow \partial_1(g) = \partial_0(f)$

  y se verifica $\partial_0(f \circ g) = \partial_0(g)$ *y* $\partial_1(f \circ g) = \partial_1(f)$*.*
- *Dados* $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, $[X, Y] = \{f \in Fl(\mathcal{C}) / \partial_0(f) = X, \partial_1(f) = Y\}$
- $\mathcal{C}^{op}$ *es la categoría opuesta de* $\mathcal{C}$*, i.e* $Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C})$ *y* $Fl(\mathcal{C}^{op})=$ *invertir dominio y codominio de* $Fl(\mathcal{C})$*.*

Observación 1.2. *Dada una categoría* $\mathcal{C}$ *y la notación anterior, se tiene el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} Fl(\mathcal{C})\widetilde{\times}Fl(\mathcal{C}) \arrow[r, shift left=2, "\pi_1"] \arrow[r, "\circ"] \arrow[r, shift right=2, "\pi_2"'] & Fl(\mathcal{C}) \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & Ob(\mathcal{C}) \arrow[l, bend left=60, "id"] \end{tikzcd}$$

donde $Fl(\mathcal{C})\widetilde{\times}Fl(\mathcal{C})$ *es el pull-back entre* ∂_0 *y* ∂_1*, y* π_1*,*π_2 *las proyecciones.*

Observar que esto forma los tres últimos términos de un conjunto simplicial.

Ejemplos 1.3. *(de categorías)*

- $\mathcal{E}ns$*: Conjuntos y funciones de conjuntos.*
- $\mathcal{T}op$*: Espacios topológicos y funciones continuas.*
- *Conjunto ordenado: donde* $[X, Y] =$ *singleton* $\Leftrightarrow X \leq Y$ *y* $[X, Y] = \emptyset$ *caso contrario. La reflexividad equivale a tener* id_X *y la transitividad equivale a la composición.*

- *Dado B, un espacio topológico, $\mathcal{O}(B)$ son los conjuntos abiertos de B con las inclusiones como flechas.*

Notación 1.4.

1. *Si $\partial_0(f) = X$ y $\partial_1(f) = Y$ notamos $X \xrightarrow{f} Y$.*

2. *Si $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ y $X \xrightarrow{h} Z$ son tales que $g \circ f = h$, decimos que se tiene el siguiente triángulo conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

.

Definición 1.5. *$C \in Ob(\mathcal{C})$ es un objeto final en $\mathcal{C} \iff \forall X \in Ob(\mathcal{C})$ $\exists!\ f_X : X \to C$. Escribimos $C = 1$. Dualmente C' es un objeto inicial en $\mathcal{C} \iff$ es un objeto final en $\mathcal{C}^{op}$,i.e $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ $\exists! f_x : C' \to X$. Escribimos $C' = 0$.*

Definición 1.6. *Sea $X \xrightarrow{f} Y$, decimos que f es un isomorfismo si existe $Y \xrightarrow{g} X$ tal que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$. Notar que g queda unívocamente determinada.*

Definición 1.7. *Sean $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, decimos que X e Y son isomorfos, que notamos $X \simeq Y$ si existe $f : X \to Y$ isomorfismo.*

Lema 1.8. *1 y 0 son únicos salvo isomorfismos.*

Demostración. Supongamos que C y D son objetos finales en $\mathcal{C}$ entonces como C es objeto final y D $\in Ob(\mathcal{C})$ $\exists!\ f_D : D \to C$. Análogamente usando que D es objeto final $\exists!\ f_C : C \to D$. Entonces se tienen $f_D \circ f_C : C \to C$ y $f_C \circ f_D : D \to D$ y por axioma de categoría se tiene que existen id_C y id_D, por lo tanto (usando nuevamente que C y D son objetos finales) se tiene $f_D \circ f_C = id_C$ y $f_C \circ f_D = id_D \Rightarrow C \simeq D$ □

Observación 1.9. *La demostración anterior es la prueba usual de unicidad salvo isomorfismos de objetos definidos por propiedad universal.*

Definición 1.10. *Dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, un funtor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una asignación que le hace corresponder a cada $X \in Ob(\mathcal{C})$ un $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$ y a cada $f \in Fl(\mathcal{C})$ un $F(f) \in Fl(\mathcal{D})$. Además respeta la estructura anteriormente definida. Más precisamente, se satisface:*

1. $F(id_X) = id_{F(X)}$ *para todo* $X \in Ob(\mathcal{C})$

2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ *para todas* $f,g \in Fl(\mathcal{C})$

3. $F(\partial_0(f)) = \partial_0(F(f))$ *y* $F(\partial_1(f)) = \partial_1(F(f))$ *para toda* $f \in Fl(\mathcal{C})$

Observación 1.11. *Según la definición anterior, se tiene que un funtor queda caracterizado por el hecho de llevar triángulos conmutativos en triángulos conmutativos.*

Definición 1.12. *Un funtor* $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *es contravariante si* G *es un funtor covariante con* $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$*, o equivalentemente* $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$*. (es decir, invierte el sentido de las flechas)*

Ejemplos 1.13.

- *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría de conjuntos con estructura adicional ,el funtor que le asigna a cada* $X \in Ob(\mathcal{C})$ *el conjunto subyancente y a cada flecha, la función subyacente, es un ejemplo de funtor* $\mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ *(llamado olvido).*

Notación 1.14. $\mathcal{C}at$ *es la categoría cuyos objetos son las categorías y sus flechas son los funtores.*

1.2. Construcciones en $\mathcal{E}ns$

En la categoría de conjuntos existen construcciones esenciales como la unión disjunta y el conjunto de gérmenes que usaremos en todo el trabajo. Dichas construcciones son básicas para entender algunos conceptos categóricos, por eso en esta sección construiremos dichos ejemplos.

- Unión disjunta

  Dada una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$, la unión disjunta de esta familia, que notaremos $\coprod_{i\in I} X_i$, es el siguiente conjunto

  $$\coprod_{i\in I} X_i = \{(x,i)/i \in I, x \in X_i\}$$

  .

- Conjunto de gérmenes

  Definición 1.15. *Sea* Γ *una categoría no vacía.* Γ *se dice filtrante si y solo si se satisfacen:*

1. *Dados $i, j \in Ob(\Gamma)$ existe $k \in Ob(\Gamma)$, $\alpha : i \to k$ y $\beta : j \to k$ (existe un elemento más lejos)*

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & k \\ j \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Para todo $i \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} j$ existe $j \xrightarrow{\gamma} k$ tal que $\gamma\alpha = \gamma\beta$ (se hacen iguales más lejos).*

Sea Γ una categoría filtrante y sea $\{X_i\}_{i\in\Gamma}$ un diagrama de conjuntos indexado por Γ.

Para $i \in Ob(\Gamma)$, llamemos $X_i = X(i)$ y dada $i \xrightarrow{\alpha} j$, $X_\alpha = X(\alpha)$ (luego se tiene $X_i \xrightarrow{X_\alpha} X_j$).

Usando la construcción anterior, consideramos la unión disjunta de esta familia. Definimos una relación de equivalencia en esta unión.

Dados (x, i) y (y, j), se dicen equivalentes $\iff$ "se hacen iguales más lejos". En símbolos,

$(x, i) \sim (y, j) \iff$ existe k y $\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & k \\ j \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$ tal que $X_\alpha(x) = X_\beta(y)$ en X_k

El conjuto de gérmenes de $X = \{X_i\}_{i\in\Gamma}$ es el cociente

$$S = \coprod_{i\in\Gamma} X_i \big/ \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida anteriormente.

Así, el par (x, i) es un representante del germen $\xi = \overline{(x, i)}$. Frecuentemente abusaremos notación y escribiremos $\xi = (x, i)$.

.

1.3. Límites y colímites

Definición 1.16. *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{X}$ funtor (diagrama o sistema en $\mathcal{X}$ indexado por $\mathcal{D}$). Sea $X \in Ob(\mathcal{X})$, decimos que $FD \xrightarrow{\chi_D} X$*

es un cono $\iff \forall\ D \xrightarrow{f} C$ *el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} FD \arrow[dr, "\chi_D"] \arrow[d, "Ff"'] & \\ & X \\ FC \arrow[ur, "\chi_C"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 1.17. *El cono universal se llama el colímite de F y lo notamos Colim F. El colímite de F es un cono* $(\{\lambda_C\}, X)$ *que verifica que para todo cono* $(\{f_C\}, Y)$ $\exists! f : X \to Y$ *tal que* $\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\lambda_C"] \arrow[dr, "f_C"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$ *es conmutativo, i.e* f *es un morfismo de conos.*

Definición 1.18. *El límite en una categoría* $\mathcal{X}$ *es el colímite en la categoría opuesta.*

Definición 1.19. *Si en la definición anterior se tiene que la categoría* $\mathcal{D}$ *es filtrante entonces decimos que es un colímite filtrante.*

Ejemplos 1.20.

- $\coprod$ *definida en la sección anterior es un colímite (discreto).*
- *El conjunto de gérmenes construido en la sección anterior es el colímite filtrante de* Γ.
- *Si* $\mathcal{D}$ *es una categoría tal que* $Ob(\mathcal{D}) = I$ *con* I *conjunto y* $Fl(\mathcal{D})$ *son solamente las identidades, entonces el límite es el producto en* $\mathcal{X}$ *y el colímite es el coproducto.*
- *si* $\mathcal{D} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr] & \\ & \bullet \\ \bullet \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ *entonces el límite es el pull-balk.*
- *si* $\mathcal{D} = \begin{tikzcd} & \bullet \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \bullet \end{tikzcd}$ *entonces el colímite es el push-out.*

Observación 1.21. *Los colímites y límites son objetos finales o iniciales en la categoría de conos. En particular, de existir, son únicos salvo isomorfismos usando el lema 1.8.*

1.4. Equivalencia de categorías

Definición 1.22. *Dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y* $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ *funtores. Una transformación natural η,* $F \xrightarrow{\eta} G$ *es una familia de flechas de $\mathcal{D}$ indexada por los objetos de $\mathcal{C}$, $\eta X : FX \to GX$ que verifica para toda* $X \xrightarrow{f} Z$ *en $\mathcal{C}$ la conmutatividad del siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\eta X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FZ \arrow[r, "\eta X"] & GZ \end{tikzcd}$$

η se dice isomorfismo natural si ηX es un isomorfismo en $\mathcal{D}$ para cada X en $\mathcal{C}$.

Definición 1.23. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Decimos que (F, G, η_1, η_2) es una equivalencia si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ son funtores y η_1 y η_2 son isomorfismos naturales $\eta_1 : GF \to id_{\mathcal{C}}$ y $\eta_2 : FG \to id_{\mathcal{D}}$. Usualmente haremos el siguiente abuso de notación $(F, G, \eta_1, \eta_2) = (F, G)$.*

Definición 1.24. *Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen equivalentes si existe una equivalencia.*

Definición 1.25. *Sea F un funtor,* $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$.

- *F se dice fiel $\iff$ $[X, X'] \xrightarrow{F} [FX, FX']$ es una función inyectiva.*
- *F se dice pleno $\iff$ $[X, X'] \xrightarrow{F} [FX, FX']$ es una función suryectiva.*
- *F se dice plenamente fiel (full and faithfull) $\Leftrightarrow$ es pleno y fiel, i.e $\forall \phi : FX \to FX'$ $\exists\,!$ $X \xrightarrow{f} X'$ tal que $F(f) = \phi$*
- *F se dice esencialmente suryectivo si $\Leftrightarrow$ $\forall Y \in Ob(\mathcal{D})$ $\exists X \in Ob(\mathcal{C})$ y un iso tal que $FX \approx Y$*

Proposición 1.26. *Sea* $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ *funtor. Son equivalentes:*

1. *F es plenamente fiel y esencialmente suryectivo.*
2. *$\exists$ G funtor* $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$, *η_1,η_2 tal que (F, G, η_1, η_2) es una equivalencia.*

Demostración. Ver teorema 1, pág 93.[6]. □

1.5. Categoría Slice

Definición 1.27. *Sea I un conjunto. Definimos la categoría Slice, que notamos $\mathcal{E}ns/I$, de la siguiente manera:*

- $Obj(\mathcal{E}ns/I) = \; X \xrightarrow{p} I$

- $Fl(\mathcal{E}ns/I) = \; X \xrightarrow{f} X'$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Observación 1.28. *Un conjunto I puede pensarse como una categoría cuyos objetos son los elementos de I y las flechas son sólo las identidades.*

Tiene sentido entonces tomar la categoría $\mathcal{E}ns^I$ cuyos objetos serán los funtores $F : I \to \mathcal{E}ns$ y las flechas las transformaciones naturales.

Ahora para cada $i \in I$ se tiene que $F(i) = X_i$ con X_i conjunto, con lo cuál tener un funtor F es lo mismo que tener una familia de conjuntos indexadas por I y las transformaciones naturales, serán familias de funciones.

Con lo cuál $\mathcal{E}ns^I$ es la categoría de familias indexadas por I, formalmente:

- $Obj(\mathcal{E}ns^I) = (X_i)_{i\in I}$ *y* $X_i \in Obj(\mathcal{E}ns)$.

- $Fl(\mathcal{E}ns^I) = \{ \; (X_i)_{i\in I} \xrightarrow{f} (Y_i)_{i\in I} \; \}$ *donde* $f = \{ \; X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \; \}$

En particular, dado un conjunto S, se tiene la familia constante $S \times I \xrightarrow{\pi_2} I$ cuyas fibras son todas iguales a S.

Proposición 1.29. $\mathcal{E}ns^I \approx \mathcal{E}ns/I$

Demostración. Basta tomar los funtores $\psi : \mathcal{E}ns^I \to \mathcal{E}ns/I$ donde $\psi=$ tomar unión disjunta y $\varphi : \mathcal{E}ns/I \to \mathcal{E}ns^I$ donde $\varphi =$ tomar las fibras.

Se tiene que el par ψ, φ es una equivalencia y por lo tanto las categorías $\mathcal{E}ns^I$ y $\mathcal{E}ns/I$ son equivalentes. $\square$

Observación 1.30. *En esta equivalencia, que*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo, es lo mismo que f respete las fibras.

Dado que estas categorías son equivalentes, en todo momento a lo largo de este trabajo tener una flecha $X \to I$ será lo mismo que tener una familia de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$ indexados por I, vía el abuso de notación avalado por la proposición anterior. De la misma manera, tener un diagrama conmutativo
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$
será lo mismo que tener una flia $\{f_i : X_i \to X'_i\}_{i\in I}$

Observación 1.31. *Podemos generalizar parte de lo anterior para una categoría cualquiera, para esto sea $\mathcal{X}$ una categoría y sea $C \in Ob(\mathcal{X})$. La categoría slice $\mathcal{X}/C$ está definida por*

- $Ob(\mathcal{X}/C) = X \xrightarrow{p} C$
- $Fl(\mathcal{X}/C) = X \xrightarrow{f} X'$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Entonces podemos imaginar que los objetos de la categoría son "familias" de objetos de $\mathcal{X}$ "indexadas por C" y las flechas son "familias" de funciones.

1.6. Colímites filtrantes en $\mathcal{C}at$

Para poder demostrar el teorema de clasificación necesitamos saber cómo se construyen los colímites filtrantes en la categoría $\mathcal{C}at$.

Por eso, en esta sección, haremos una construcción en detalle, que demuestra que existen dichos colímites. Además sabremos explícitamente cómo construirlo, fundamental para el desarrollo de este trabajo.

Proposición 1.32. *(Construcción de colímites filtrantes en $\mathcal{C}at$).*

Sea $\Gamma \xrightarrow{X} \mathcal{C}at$ un funtor, con Γ filtrante. Entonces existe $\underset{\longrightarrow i\in\Gamma}{Colim} X$ en $\mathcal{C}at$.

Demostración. Esta demostración es constructiva, es decir probaremos la existencia diciendo que es $\underset{\longrightarrow i\in\Gamma}{Colim}\, X$.

Fijamos la siguiente notación: $X_i = X(i)$ y $X_\alpha = X(\alpha)$, y sea $(\mathcal{X}, \{\tau_i\}_{i\in\Gamma})$, $X_i \xrightarrow{\tau_i} X$, el cono colímite en $\mathcal{C}at$. Entonces:

- $Obj(\mathcal{X}) = \coprod_{i\in\Gamma} Obj(X_i)/\sim = \{(x,i)/x \in Obj(X_i), i \in Obj(\Gamma)\}/\sim$ donde $(x,i) \sim (y,j) \Leftrightarrow \exists$ $\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & k \\ j \arrow[ur, "\beta"] & \end{tikzcd}$ en Γ tal que $X_\alpha(x) = X_\beta(y)$.

- $Fl(\mathcal{X}) = \coprod_{i\in\Gamma} Fl(X_i)/\sim = \{(x \xrightarrow{f} y , i)/i \in Obj(\Gamma), f \in Fl(X_i)\}/\sim$ donde $(f,i) \sim (g,j) \Leftrightarrow \exists$ $\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & k \\ j \arrow[ur, "\beta"] & \end{tikzcd}$ en Γ tal que $X_\alpha(f) = X_\beta(g)$.

Notar que está bien pensar a las flechas sólo como flechas en una misma categoría X_i: ya que Γ es filtrante, dados dos elementos en diferentes categorías, se tienen objetos equivalentes a los dados, en una misma categoría más lejos.

- Veamos que $\mathcal{X}$ es una categoría:
  - La composición parcial de flechas se hace en cada X_i
  - $id : Obj(\mathcal{X}) \to Fl(\mathcal{X})$ se define como $id(\overline{(x,i)}) = \overline{(id_x, i)}$.
  - $\partial_0, \partial_1 : Fl(\mathcal{X}) \to Obj(\mathcal{X})$ se definen por:

    $\partial_0(\overline{(x \xrightarrow{f} y , i)}) = \overline{(x,i)}$ y

    $\partial_1(\overline{(x \xrightarrow{f} y , i)}) = \overline{(y,i)}$.
  - Los axiomas esperados se satisfacen pues se satisfacen en cada X_i.

  $\therefore \mathcal{X} \in \mathcal{C}at$.

- Veamos que $(\mathcal{X}, \{\tau_i\}_{i\in\Gamma})$, donde $\tau_i : X_i \to \mathcal{X}$ es la clase de la inclusión en la i-ésima coordenada, es un cono:

  Hay que ver que $\forall\, i \xrightarrow{\alpha} k$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "X_\alpha"'] \arrow[dr, "\tau_i"] & \\ X_k \arrow[r, "\tau_k"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

- (en los objetos)
  Sea $x \in Obj(X_i) \Rightarrow \tau_i(x) = \overline{(x,i)}$ y $\tau_k(X_\alpha(x)) = \tau_k(k, X_\alpha(x)) = \overline{(X_\alpha(x),k)}$.
  Además $\overline{(x,i)} = \overline{(X_\alpha(x),k)}$, pues $\exists$
  $$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & k \\ k \arrow[ur, "id"] & \end{tikzcd}$$
  en Γ tal que $X_\alpha(x) = X_{id}(X_\alpha(x))$, ya que $X_{id}(X_\alpha(x)) = id(X_\alpha(x)) = X_\alpha(x)$.
- (en las flechas)
  Sea $f \in Fl(X_i) \Rightarrow \tau_i(f) = \overline{(f,i)}$ y $\tau_k(X_\alpha(f)) = \tau_k(X_\alpha(f),k) = \overline{(X_\alpha(f),k)}$.
  Además $\overline{(f,i)} = \overline{(X_\alpha(f),k)}$, pues $\exists$
  $$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & k \\ k \arrow[ur, "id"] & \end{tikzcd}$$
  en Γ tal que $X_\alpha(f) = X_{id}(X_\alpha(f)$, ya que $X_{id}(X_\alpha(f) = id(X_\alpha(f) = X_\alpha(f)$

▪ Veamos que $(\{\tau_i\}_{i\in\Gamma}, \mathcal{X})$ es un cono universal:

Sea $(\{\xi_i\}_{i\in\Gamma}, \mathcal{Y})$ un cono, hay que ver que $\exists! F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tal que

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[dr, "\xi_i"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "F"] \\ & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Para que el diagrama anterior sea conmutativo se tienen que verificar:

$$F(\tau_i(x)) = \xi_i(x) \forall i \in \Gamma \tag{1}$$

y

$$F(\tau_i(f)) = \xi_i(f) \forall i \in \Gamma \tag{2}$$

Con lo cual la única posibilidad de definir F es del siguiente modo:

- (en los objetos)
  $F(\overline{(x,i)}) = \xi_i(x)$ para que se verifique (1)
- (en las flechas)
  $F(\overline{(f,i)}) = \xi_i(f)$ para que se verifique (2)

Veamos que F está bien definida (y luego existe y es única):

- (en los objetos)
  Hay que ver que si $\overline{(x,i)} = \overline{(y,j)}$ entonces $\xi_i(x) = \xi_j(y)$
  $\overline{(x,i)} = \overline{(y,j)} \Rightarrow \exists$
  $$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & k \\ j \arrow[ur, "\beta"] & \end{tikzcd}$$ en Γ tal que
  $$X_\alpha(x) = X_\beta(y) \tag{3}$$
  Usando que $(\{\xi_i\}, \mathcal{Y})$ es un cono y la existencia de α y β, se tienen los dos siguientes diagramas conmutativos:
  $$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "X_\alpha"'] \arrow[dr, "\xi_i"] & \\ X_k \arrow[r, "\xi_k"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{4}$$
  $$\begin{tikzcd} X_j \arrow[d, "X_\beta"'] \arrow[dr, "\xi_j"] & \\ X_k \arrow[r, "\xi_k"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{5}$$
  Tenemos entonces las siguientes tres igualdades:
  - $\xi_i(x) = \xi_k(X_\alpha(x)$, usando (4)
  - $\xi_k(X_\alpha(x)) = \xi_k(X_\beta(y))$, usando (3)
  - $\xi_k(X_\beta(y)) = \xi_j(x_k)$, usando (5).

  Pegando las tres igualdades se obtiene $\xi_i(x) = \xi_j(y)$
- (en las flechas)
  Es totalmente análoga.

$\therefore$ F está bien definida y entonces $(\{\tau_i\}_{i\in\Gamma}, \mathcal{X}) = \underset{\longrightarrow i\in\Gamma}{Colim}(X)$

$\square$

Observación 1.33. *Notar que*

- $Obj(\mathcal{X}) = \underset{\longrightarrow i\in\Gamma}{Colim}(Obj(X_i))$
- $Fl(\mathcal{X}) : [\overline{(x,i)}, \overline{(y,j)}] = \underset{(\alpha,\beta)}{Colim}([X_\alpha(x), X_\beta(y)])$ *con*
  $(\alpha,\beta) =$ $$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & k \\ j \arrow[ur, "\beta"] & \end{tikzcd}$$ *y* $[X_\alpha(x), X_\beta(x)]$ *se mira en* X_k.

  Notar que los pares (α,β) *forman un conjunto ordenado filtrante.*

2. Revestimientos y aplicaciones recubridoras

2.1. Observaciones y definiciones

Notación 2.1. *Sea B un espacio topológico y sea U un abierto de B. Dados X un espacio topológico y $p : X \to B$ una función continua, notaremos $X\mid_U$ al pullback del diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

Notar que por construcción del pull-back en $\mathcal{T}op$ se tiene que $X\mid_U \subset X$, $X\mid_U = p^{-1}(U)$.

Definición 2.2. *Sean $p : X \to B$ continua y $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de B. Decimos que $\mathcal{U}$ trivializa a X si existen $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos (que consideramos con la topología discreta) y $\{\theta_i\}_{i\in I}$ familia de homeomorfismos tal que para todo i se tiene el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & X\mid_{U_i} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, "p"] \\ S_i \times U_i \arrow[ur, "\theta_i", "\simeq"'] \arrow[r, "\pi_2"'] & U_i \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

Diremos que S_i, θ_i es una trivialización de $X \xrightarrow{p} B$.

Observación 2.3.

- *Dada $p : X \to B$ continua, si existe $\mathcal{U}$ que trivializa a X, entonces $p : X \to B$ es un revestimiento (ver def. de espacio recubridor en [7], pág. 382). En efecto, dado $b \in B$, existe $i \in I$ tal que $b \in U_i$ con lo cual basta tomar como entorno parejamente cubierto a U_i, ya que $X\mid_{U_i} \simeq S_i \times U_i$ y $S_i \times U_i = \coprod_{S_i} U_i$ (porque S_i tiene la topología discreta) y $p : \{*\} \times U_i \to U_i$ es claramente un homeomorfismo.*

- *Recíprocamente, dado $p : X \to B$ un revestimiento, tomando $\mathcal{U} = (U_b)_{b\in B}$ donde U_b es algún entorno abierto de b parejamente cubierto por p y $S_b = E_b$ (fibra de b, que es un conjunto discreto); se tiene que $\mathcal{U}$ trivializa a X.*

$\therefore$ $p : X \to B$ continua es revestimiento $\Leftrightarrow$ existe $\mathcal{U}$ cubrimiento por abiertos de B que trivializa a X

Para el caso general en el que el espacio B no es localmente conexo esta definición de revestimiento no es la adecuada. En particular, no se puede obtener la clasificación de revestimientos por el grupo fundamental.

Para poder hacer la clasificación en el caso general tenemos que encontrar una correcta definición de revestimiento.

Para no confundir la definición usual con la de nuestro trabajo, a esta nueva definición la llamaremos aplicación recubridora. Las aplicaciones recubridoras serán revestimientos que satisfacen una condición adicional.

Observación 2.4. *Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ cubrimiento por abiertos de B que trivializa a X y supongamos que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Entonces tenemos el siguiente diagrama (usando la existencia de los homeomorfismos θ_i y θ_j):*

$$\begin{tikzcd}
S_i \times (U_i \cap U_j) \arrow[r, "\theta_i"'] \arrow[rr, bend left, "\sigma_{ji}"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & X \mid_{U_i \cap U_j} \arrow[r, "\theta_j^{-1}"'] \arrow[d, "p"] & S_j \times (U_i \cap U_j) \arrow[dl, "\pi_j"] \\
& U_i \cap U_j &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $\sigma_{ji} = \theta_j^{-1} \circ \theta_i : S_i \times (U_i \cap U_j) \to S_j \times (U_i \cap U_j)$ y para cada $x \in U_i \cap U_j$ fijo tenemos $\sigma_{ji}(-, x) : S_i \to S_j \times (U_i \cap U_j)$. Proyectando sobre S_j tenemos una función de conjuntos $\pi_{S_j}(\sigma_{ji}(-, x)) : S_i \to S_j$ para cada $x \in U_i \cap U_j$.

Veamos que si $U_i \cap U_j$ es conexo estas funciones de conjuntos que en principio dependen de x son siempre las mismas cualquiera sea $x \in U_i \cap U_j$.

Lema 2.5. *(caracterización de espacios conexos)*

Sean S_1 y S_2 conjuntos con la topología discreta. Sea T un espacio topológico y $f : S_1 \times T \to S_2 \times T$ continua tal que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
S_1 \times T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & S_2 \times T \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Si T es conexo, entonces $f_x = f_y$, $\forall x, y \in T$, donde $f_x = \pi_1(f(-, x)) : S_1 \to S_2$ (ver observación 1.28). Recíprocamente, si $f_x = f_y$, $\forall x, y \in T$, para toda elección de S_1, S_2 y f en las condiciones anteriores, entonces T es conexo.

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que no. Entonces $\exists f : S_1 \times T \to S_2 \times T$ continua, $s \in S_1$ y $x, y \in T$ tales que $f_x(s) \neq f_y(s)$.

Supongamos que $f_x(s) = s_2$. Por lo anterior, se tiene que $f^{-1}(\{s_2\} \times T) \cap \{s\} \times T \subsetneq \{s\} \times T$, ya que $(s, y) \notin f^{-1}(\{s_2\} \times T)$.

Consideramos $U = \pi_2(f^{-1}(\{s_2\} \times T) \cap \{s\} \times T)$. Veamos que U es abierto y cerrado.

- Como $\{s_2\} \times T \subseteq S_2 \times T$ es abierto (S_2 tiene la topología discreta) y f es continua, la preimagen $f^{-1}(\{s_2\} \times T)$ es un abierto. Además $\{s\} \times T \subseteq S_1 \times T$ es abierto. Luego, como intersección de dos abiertos es un abierto, se concluye que U es abierto.
- Como $\{s_2\} \times T \subseteq S_2 \times T$ es cerrado (S_2 tiene la topología discreta) y f es continua, la preimagen $f^{-1}(\{s_2\} \times T)$ es un cerrado y en consecuencia $\{s\} \times T \subseteq S_1 \times T$ es cerrado. Luego, como intersección de cerrados es un cerrado, se concluye que U es cerrado.

Como T conexo, esto es un absurdo.

($\Leftarrow$) Supongamos que no, entonces existen abiertos no vacíos U y V tales que $T = U \cup V$ y $U \cup V \neq \emptyset$. Sea $f : \{1\} \times T \to \{1, 2\} \times T$ definida por:

$$f(1, x) = \begin{cases} (1, x) & x \in U \\ (2, x) & x \in V \end{cases}.$$

f es continua y verifica la conmutatividad del diagrama anterior, $\pi = \pi \circ f$ y dados $x \in U$ y $y \in V$ se tiene que

$f_x = \pi_1(f(-, x)) = \pi_1(1, x) = 1 \neq 2 = f_y = \pi_1(f(-, y)) = \pi_1(2, y)$. Absurdo, pues por hipótesis, $f_x = f_y \forall x, y \in T$.

$\square$

Observación 2.6. *Si $U_i \cap U_j$ es conexo entonces por lo anterior se tiene que $\pi_{S_j}(\sigma_{ij}(-, x)) = \pi_{S_j}(\sigma_{ij}(-, y))$ para todo $x, y \in U_i \cap U_j$.*

Si B es localmente conexo, se puede tomar un cubrimiento por abiertos conexos, pero no necesariamente $U_i \cap U_j$ será conexo.

Si bien no podemos garantizar que la intersección sea conexa, las funciones $\pi_{S_j}(\sigma_{ij}(-, x))$ serán iguales para todo $x \in W$, donde W es un abierto conexo contenido en la intersección.

En conclusión si el espacio B es localmente conexo, se puede obtener un cubrimiento de la intersección tal que en cada abierto del cubrimiento las funciones $\pi_{S_j}(\sigma_{ij}(-, x))$ coinciden para todo x.

Como esta igualdad de funciones se tiene para el caso en el que $U_i \cap U_j$ sea conexo y se verifica localmente en el caso en el que $\mathcal{U}$ sea un cubrimiento por abiertos conexos es de esperar que sea necesario pedir esta condición adicional para el caso general. Tenemos entonces la siguiente definición.

Definición 2.7. *Sea $p : X \to B$ continua. Diremos que p es una aplicación recubridora si existe $\mathcal{U}$ que trivializa a X y ademas, si σ_{ji} son como en la definición de trivialización, se verifica $\pi_{S_j}(\sigma_{ji}(-, x)) = \pi_{S_j}(\sigma_{ji}(-, y))$ para todo $x, y \in U_i \cap U_j$.*

Al pedir esta condición adicional, esta claro que no serán equivalentes en un contexto general las definiciones de revestimiento y aplicación recubridora.

Si bien estas definiciones no son equivalentes en general, veremos que si lo son en dos casos fundamentales: espacios topológicos localmente conexos y metrizables o en espacios topológicos localmente conexos y tal que la fibra de la aplicación es finita. En [5] se afirma que ambas definiciones son equivalentes en el caso localmente conexo general, pero esta afirmación no está correctamente fudamentada (ver observación 5.18).

Lema 2.8. *Sean $p : X \to B$ una aplicación recubridora y σ_{ji} como en la definición. Sean i, j tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\pi_{S_j}(\sigma_{ji}(-, x)) = \pi_{S_j}(\sigma_{ji}(-, y))$, para todo $x, y \in U_i \cap U_j \Leftrightarrow \sigma_{ji} = \lambda_{ji} \times id_{U_i \cap U_j}$, con $\lambda_{ji} : S_i \to S_j$ una función de conjuntos biyectiva. Notar que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ implican que λ_{ji} queda unívocamente determinada por σ_{ji}.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Tenemos que $\pi_{S_j}(\sigma_{ji}(-, x)) = \pi_{S_j}(\sigma_{ji}(-, y))$, $\forall\ x, y \in U_i \cap U_j$ (esta condición lo que nos dice es que cada rebanada va a parar a otra rebanada a traves de f, dependiendo solo de la rebanada inicial, i.e no puede ir una rebanada a dos rebanadas diferentes). Entonces claramente se tiene que $\sigma_{ji} = \lambda_{ji} \times g$. Veamos que $g = id\mid_{U_i \cap U_j}$. Para esto analizamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
S_i \times (U_i \cap U_j) \arrow[r, "\theta_i"'] \arrow[rr, bend left, "\sigma_{ji}"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & X\mid_{U_i \cap U_j} \arrow[r, "\theta_j^{-1}"'] \arrow[d, "p"] & S_j \times (U_i \cap U_j) \arrow[dl, "\pi_j"] \\
& U_i \cap U_j &
\end{tikzcd}$$

- De la conmutatividad del lado izquierdo sale que

$$p \circ \theta_i(s, x) = x. \tag{6}$$

- De la conmutatividad del lado derecho sale que

$$\pi_j \circ \theta_j^{-1}(t) = p(t) \tag{7}$$

Luego:
$g(x) = \pi_j \circ \sigma_{ji}(s,x) = \pi_j \circ (\theta_j^{-1} \circ \theta_i)(s,x) = (\pi_j \circ \theta_j^{-1}) \circ \theta_i(s,x) p \circ \theta_i(s,x)$ (usando (6)) y $p \circ \theta_i(s,x)) = x$ (usando (7)).

Resta ver que cada λ_{ji} es biyectiva, pero esto sale usando que $\sigma_{ji} = \theta_i \circ \theta_j^{-1}$ y θ_i es un homeo.

($\Leftarrow$) Si $\sigma_{ji} = \lambda_{ji} \times id_{U_i \cap U_j}$, entonces $\sigma_{ji}(-,x) = \lambda_{ji}(-) \times x$, y luego, $\pi_{S_j}(\sigma_{ji}(-,x) = \lambda_{ji}(-)$ no depende de x, con lo cual es constante en $U_i \cap U_j$. □

Observación 2.9. *Sean $p : X \to B$ una aplicación recubridora, σ_{ij} y λ_{ji} como en el lema. Entonces,*

- $\lambda_{ii} = id_{S_i}$.

  Demostración.
  $\lambda_{ii} \times id_{U_i} = \sigma_{ii} = \theta_i \circ \theta_i^{-1} = id_{S_i \times U_i} \Rightarrow \lambda_{ii} = id_{S_i}$ □

- *Si $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ entonces $\lambda_{jk} \circ \lambda_{ki} = \lambda_{ji}$ (condición de cociclo) .*

  Demostración.
  $(\lambda_{jk} \circ \lambda_{ki}) \times id_{U_i \cap U_j} = \lambda_{jk} \times id_{U_k \cap U_j} \circ \lambda_{ki} \times id_{U_i \cap U_i} = \sigma_{jk} \circ \sigma_{ki} = (\theta_j \circ \theta_k^{-1}) \circ (\theta_k \circ \theta_i^{-1}) = \theta_j \circ (\theta_k^{-1} \circ \theta_k) \circ \theta_i^{-1} = \theta_j \circ \theta_i^{-1} = \sigma_{ji} = \lambda_{ji} \times id_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \lambda_{jk} \circ \lambda_{ki} = \lambda_{ji}$ □

2.2. Categoría de aplicaciones recubridoras trivializadas por $\mathcal{U}$

Definición 2.10. *Sea B un espacio topológico y $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de B. Definimos la categoría de aplicaciones recubridoras trivializadas por $\mathcal{U}$, que notamos $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$, de la siguiente manera.*

- *Obj $\mathcal{R}_{\mathcal{U}} = (X, S \to I, \{\theta_i\}_{i \in I})$ (con el abuso de notación $X = X \xrightarrow{p} B$), y S_i, θ_i una trivialización de $X \xrightarrow{p} B$.*

- *Fl* $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$= *funciones compatibles, i.e dados* $(X, S \to I, \{\theta\}_{i\in I})$ *y* $(X', T \to I, \{\eta\}_{i\in I}) \in$ *Obj* $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$*; un morfismo es una función* f *sobre* B

  $$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

  tal que $\eta_i^{-1} \circ f \circ \theta_i : S_i \times U_i \to T_i \times U_i$ *es de la forma* $\gamma_i \times id_{U_i}$*, donde* $\gamma_i : S_i \to T_i$ *es una función de conjuntos. Observar que* γ_i *está unívocamente determinada por* f*.*

Observación 2.11. *En el caso en el que* $\mathcal{U}$ *sea un cubrimiento por abiertos conexos, la condición se satisface automáticamente. Entonces, en este caso, toda* f *continua sobre* B *es un morfismo. Esto da la definición usual de morfismo de revestimientos (ver [7], pág. 540).*

Si B *es localmente conexo, basta considerar cubrimientos por abiertos conexos y entonces estaremos en la situación anterior.*

3. Datos de descenso de Grothendiek

3.1. Teorema de descenso

La teoría del descenso de Grothendiek [4] surge al querer generalizar situaciones en dónde los objetos geométricos pueden ser "pegados".

El resultados básico (que luego se generaliza a un topos cualquiera), es el teorema que se enuncia a continuación, que se puede encontrar enunciado (sin demostración) en pág. 145 de [4].

Como este resultado es fundamental para la prueba de un teorema esencial en este trabajo, haremos la demostración en detalle.

Definición 3.1. *Sea B un espacio topológico y $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de B. Se define el nervio de Cech de $\mathcal{U}$, que notamos $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ (y en el caso de que sea necesario $\mathcal{N}(\mathcal{U})$) de la siguiente manera: $\mathcal{N}_k = \{(i_0, ..., i_k)/U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_k} \neq \emptyset\}$. (Notar que $\mathcal{N}_0 = I$ y que $\mathcal{N}_k \subset I^{k+1}$).*

Definición 3.2. *Sean $(Z_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, B un espacio topológico, $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ cubrimiento por abiertos de B y $p_i : Z_i \to U_i$ funciones continuas y suryectivas. Un dato de descenso es una familia $\{\sigma_{ji}\}_{(i,j)\in\mathcal{N}_1}$ de funciones continuas que cumplen*

$$\begin{tikzcd}
Z_i \mid_{U_i\cap U_j} \arrow[rr, "\sigma_{ji}"] \arrow[dr, "p_i"'] & & Z_j \mid_{U_i\cap U_j} \arrow[dl, "p_j"] \\
& U_i \cap U_j &
\end{tikzcd} \tag{8}$$

y que verifican:

1. $\sigma_{ii} = id_{Z_i}$
2. $\sigma_{ji} = \sigma_{jk} \circ \sigma_{ki}\ \forall (i,j,k) \in \mathcal{N}_2$

Con esta definición ya se empieza a vislumbrar que existe una fuerte relación entre la categoría de aplicaciones recubridoras definidas en la sección anterior y los datos de descenso de Grothendieck.

Teorema 3.3. *(Teorema de descenso)*

Dado un dato de descenso (según la definición 3.2), $\exists\ X \xrightarrow{p} B$, X espacio topológico, p continua y $\{\theta_i\}_{i\in I}$, $\theta_i : Z_i \to X \mid_{U_i}$ homeos que verifican $\sigma_{ji} = \theta_j^{-1} \circ \theta_i$ y tal que se tiene la siguiente familia diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[rr, "\theta_i"] \arrow[dr, "p_i"'] & & X\mid_{U_i} \arrow[dl, "p"] \\
& U_i &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

Más aún, el par (X, θ) es único salvo isomorfismos, i.e dado un par (X', θ') que satisface lo anterior se tiene que existe un homeomorfismo sobre B

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

que satisface $\psi = \theta_i' \circ \theta_i^{-1} : X\mid_{U_i} \to X'\mid_{U_i}$

Demostración.

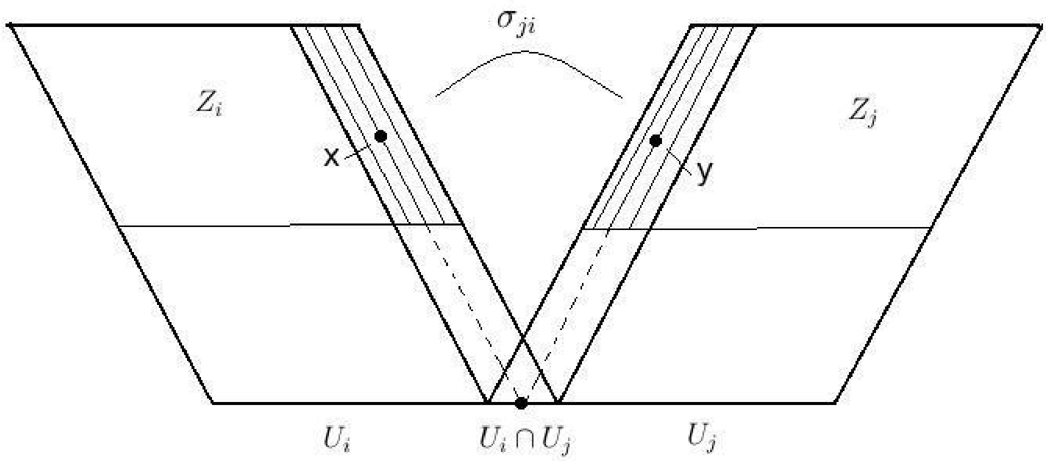
La unicidad resulta clara definiendo $\psi : X \to X'$ sobre el cubrimiento abierto $X\mid_{U_i} \hookrightarrow X$ como $\psi = \theta_i' \circ \theta_i^{-1}$. Así se obtiene que $X\mid_{U_i} \simeq X'\mid_{U_i}$ para todo $i \in I$ y además usando que $\sigma_{ji} = \theta_j^{-1} \circ \theta_i = \theta_j'^{-1} \circ \theta_i'$ sale que se "pegan bien" en la intersección $X\mid_{U_i \cap U_j} = X\mid_{U_i} \cap X\mid_{U_j}$.

Veamos la existencia. Lo haremos en 2 pasos:

- Paso 1: Construcción del X

  Sea $Z = \coprod Z_i = \{(x,i)/x \in Z_i\}$ con la topología final respecto de la familia $\{Z_i \hookrightarrow Z\}_{i \in I}$.

  La relación de equivalencia que queremos definir está ilustrada en la siguiente figura donde x se identifica con y:



Formalmente, definimos en Z la siguiente relación: $(x, i) \sim (y, j) \Leftrightarrow \sigma_{ji}(x) = y$.

Notar que si $\sigma_{ji}(x) = y \Rightarrow p_j(\sigma_{ji}(x)) = p_j(y)$ y usando la noción de compatibilidad dada en (8) se tiene que $p_j(\sigma_{ji}(x)) = p_i(x)$. Uniendo ambas igualdades se obtiene que $\sigma_{ji}(x) = y \Rightarrow p_i(x) = p_j(y)$. Tenerlo en mente pues se usa en toda la demostración.

Veamos que $\sim$ es de equivalencia:

1. (Reflexividad) $\sigma_{ii}(x) = x$ (definición de dato de descenso).
2. (Simetría) Supongamos que $(x, i) \sim (y, j)$ y queremos ver que $(y, j) \sim (x, i)$. Hay que ver que $\sigma_{ij}(y) = x$.
   Por hipótesis vale que $\sigma_{ji}(x) = y$ y por definición de dato de descenso vale que $\sigma_{ij} \circ \sigma_{ji} = \sigma_{ii}$, pues $(i, j) \in \mathcal{N}_1$ ($\Rightarrow (i, j, j) \in \mathcal{N}_2$).
   Usando además que $\sigma_{ii} = id$, nos queda $\sigma_{ij}(\sigma_{ji}(x)) = x$. Luego, $\sigma_{ij}(y) = x$, que es lo que queríamos.
3. (Transitividad) Supongamos que $(x, i) \sim (y, j)$ y $(y, j) \sim (z, k)$. Queremos ver que $(x, i) \sim (z, k)$.
   Como vimos antes, se tiene que $p_i(x) = p_j(y) = p_k(z)$. Esto implica que $(i, j, k) \in \mathcal{N}_2$.
   $(i, j, k) \in \mathcal{N}_2$ implica por la definición de dato de descenso que se verifica $\sigma_{ki}(x) = \sigma_{kj} \circ \sigma_{ji}(x) = \sigma_{kj}(y) = z$ (usando las dos hipótesis).

$\therefore \sim$ es una relación de equivalencia.

Tomamos $X = Z/\sim$ con la topología cociente. Notar que $\amalg p_i$ pasa al cociente, pues, como ya observamos, si $(i, x) \sim (j, y) \Rightarrow p_i(x) = p_j(y)$.

Entonces usando la propiedad del cociente se tiene que $\exists! p : X \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\coprod p_i"'] & & X \arrow[dl, dashed, "\exists! p"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{10}$$

- Paso 2: existencia de $\theta_i' s$

  Por lo anterior se tiene el siguiente pull-back de espacios topológicos:

$$\begin{tikzcd} X \mid_{U_i} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, "p"] \\ U_i \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd} \tag{11}$$

Dado Z_i, se tiene el siguiente diagrama ($\forall i \in I$):

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[drr, bend left, "\pi \circ i"] \arrow[ddr, bend right, "p_i"'] & & \\ & X \mid_{U_i} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, "p"] \\ & U_i \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

donde $i : Z_i \to Z$ es la inclusión, es decir $i(z_i) = (z_i, i)$ y $\pi : Z \to X$ es la proyección al cociente. Usando el diagrama (10) tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "p_i"] & & Z \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\coprod p_i"] & & X \arrow[dl, "\exists! p"] \\
& U_i \arrow[rr, hook, "i"] & & B &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $p \circ \pi \circ i = i \circ p_i$ con lo cuál por la propiedad universal del pull-back se tiene que existe una única $\theta_i : Z_i \to X \mid_{U_i}$ tal que valen las conmutatividades:

$$\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[dr, dashed, "\exists! \theta_i"] \arrow[drr, bend left, "\pi \circ i"] \arrow[ddr, bend right, "p_i"'] & & \\
& X \mid_{U_i} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, "p"] \\
& U_i \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

De la conmutatividad de la izquierda se obtiene el diagrama (9) que queríamos.

De la conmutatividad de la derecha podemos interpretar $\{\theta_i\}_{i \in I}$:

$\theta_i(z_i) = \pi \circ i(z_i)$ (mirado en X) con $z_i \in Z_i$, $\theta_i(z_i) = \pi(z_i, i) =$ clase de (z_i, i) en $X = Z/\sim$, es decir que los morfismos θ_i, mirando su imagen en X, no son otra cosa que tomar clase.

Resta ver que los θ_i son homeos:

- θ_i es abierta:
  - $i : Z_i \to Z$ es abierta pues Z_i es abierto en la unión disjunta.
  - $\pi : Z \to X$ es abierta:
    Sea $V \subset Z$ abierto. Quiero ver que $\pi(V) \subset X$ es abierto. Como X tiene la topología cociente se tiene que $\pi(V)$ es abierto $\Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto y $\pi^{-1}(\pi(V)) = \{z \in Z/\pi(z) = \overline{v} y v \in V\} = \cup_i \cup_j \sigma_{ji}(V \cup Z_i) = \cup_i \cup_j \sigma_{ij}^{-1}(V \cup Z_i)$. Como σ_{ij} es continua y $V \cup Z_i$ es abierto, usando la igualdad anterior se tiene que $\pi(V)$ es abierto.

  Sea $V \subset Z_i$ abierto. Usando la conmutatividad de la derecha del diagrama anterior se tiene que $i' \circ \theta_i = \pi \circ i$ donde $i' : X \mid_{U_i} \to X$ es la inclusión. Entonces $\theta_i(V)$ es abierto $\Leftrightarrow (\pi \circ i(V)) \cup U_i$ es abierto. Como π y i son abiertas, se tiene que $\pi \circ i(V)$ es abierto. Como además U_i es abierto, usando que la intersección de dos abiertos es abierto, se tiene lo deseado.

- θ_i es inyectiva:

  Sean $x, y \in Z_i$ tales que $\theta_i(x) = \theta_i(y)$. Entonces, $i(\theta_i(x)) = i(\theta_i(y))$ y usando la conmutatividad de la derecha del diagrama anterior, se tiene que $\pi(i(x)) = \pi(i(y)) \Rightarrow \pi(x,i) = \pi(y,i)$.

  Mirando la relación de equivalencia se tiene que $\pi(x,i) = \pi(y,i) \Leftrightarrow x = \sigma_{ii}(x) = y$.

- θ_i es suryectiva:

  Sea $\overline{(j, x_j)} \in X \mid_{U_i}$. Queremos ver que $(j, x_j) = \theta_i(x_i) = \overline{(i, x_i)}$.

  $p(\overline{(j, x_j)}) = p_j(x_j) \in U_i$ pues $\overline{(j, x_j)} \in X \mid_{U_i}$. Además, como $p_j : Z_j \to U_j$, se tiene que $p_j(x_j) \in U_j$.

  Entonces $p_j(x_j) \in U_i \cap U_j \Rightarrow x_j \in Z_j \mid_{U_i \cap U_j}$. Sea $x_i = \sigma_{ji}(x_j)$, con lo cuál se tiene lo querido.

Veamos que $\sigma_{ji} = \theta_j^{-1} \circ \theta_i$:

$\theta_j^{-1} \circ \theta_i(z_i) = \theta_j^{-1}(\overline{z_i, i})$ = tomar un representante en Z_j de la clase de $(\overline{(i, z_i)})$ (que existe pues ya probamos que son homeos).

Ahora $\theta_j^{-1}(\overline{((i, z_i))}) = z_j \Leftrightarrow p_i(z_i) = p_j(z_j)$ y $\sigma_{ji}(z_i) = z_j$ con lo cuál hemos probado que $\theta_j^{-1} \circ \theta_i(z_i) = \sigma_{ji}(z_i)$.

Como este razonamiento vale para todo $z_i \in Z_i$, se tiene lo que queríamos.

$\square$

3.2. Categoría de datos de descenso

Definición 3.4. *Sea B un espacio topológico y $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de B, $\mathcal{N}$ el nervio de Cech de ese cubrimiento. Definimos la categoría de datos de descenso (en $\mathcal{E}ns$), que notaremos $\mathcal{S}_\mathcal{U}$ como la categoría tal que:*

- *Obj($\mathcal{S}_\mathcal{U}$) $= (S \to I, \{\lambda_{ji}\}_{(j,i)\in\mathcal{N}_1})$, donde $\lambda_{ji} : S_i \to S_j$ y se verifica:*

  - $\lambda_{ii} = id_{S_i}$
  - $\lambda_{ji} = \lambda_{jk} \circ \lambda_{ki}\ \forall (j,k,i) \in \mathcal{N}_2$

  Decimos que las funciones $\{\lambda_{ji}\}_{(j,i)\in\mathcal{N}_1}$ forman un dato de descenso en la familiad de conjuntos $(S_i)_{i\in I}$.

- *Fl($\mathcal{S}_\mathcal{U}$)= morfismos compatibles, i.e dados*

  $(S \to I, \{\lambda_{ji}\}_{(j,i)\in\mathcal{N}_1})$ y $(T \to I, \{\eta_{ji}\}_{(j,i)\in\mathcal{N}_1})$, un morfismo en $\mathcal{S}_\mathcal{U}$ es una función sobre I

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & T \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd} , \qquad \{ S_i \xrightarrow{\phi_i} T_i \}_{i\in I} \tag{12}$$

tal que para todo $(i,j) \in \mathcal{N}_1$ *se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\lambda_{ji}"] \arrow[d, "\phi_i"'] & S_j \arrow[d, "\phi_j"] \\ T_i \arrow[r, "\eta_{ji}"'] & T_j \end{tikzcd} \tag{13}$$

3.3. Aplicaciones recubridoras y datos de descenso

Para terminar con esta sección probaremos que efectivamente las categorías $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$, como se iba intuyendo a lo largo de esta sección, son categorías equivalentes.

Esta equivalencia nos dice que para el caso de un cubrimiento $\mathcal{U}$ fijo podemos olvidar la parte topológica (aplicaciones recubridoras) y quedarnos solo con la parte combinatoria (el dato de descenso respecto al nervio), que ya contiene toda la información necesaria.

En efecto, dado un dato de descenso como arriba, queda determinado un dato de descenso en espacios topológicos $Z_i = S_i \times U_i$, y el espacio X del teorema 3.3 resulta una aplicación recubridora que demuestra la equivalencia.

En esta sección probamos esto en detalle.

Teorema 3.5. $\mathcal{R}_{\mathcal{U}} \approx \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$

Demostración. Sea $d^* : \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ definida de la siguiente manera:

- (en los objetos)

  $d^*(X, S \to I, \{\theta_i\}_{i\in I}) = (S \to I, \{\lambda_{ji}\}_{(j,i)\in\mathcal{N}_1})$ donde $\sigma_{ji} = \theta_j^{-1} \circ \theta_i$ y por 2.8 se tiene $\sigma_{ji} = \lambda_{ji} \times id$. Entonces la familia λ_{ji} es la que se obtiene por el lema 2.8.

  La familia $\{\lambda_{ji}\}_{(j,i)\in\mathcal{N}_1}$ es efectivamente un dato de descenso en $\mathcal{E}ns$ pues se verifica:

- $\lambda_{ii} = \theta_i^{-1} \circ \theta_i = id_{S_i}$
- $\lambda_{jk} \circ \lambda_{ki} = (\theta_j^{-1} \circ \theta_k) \circ (\theta_k^{-1} \circ \theta_i) = \theta_j^{-1} \circ (\theta_k \circ \theta_k^{-1}) \circ \theta_i = \theta_j^{-1} \circ \theta_i = \lambda_{ji}$

- (en las flechas)

  Dada $f \in Fl(\mathcal{R}_{\mathcal{U}})$ se tiene por las condiciones de morfismos compatibles (12) y (13) que existen $\gamma_i : S_i \to T_i$ funciones de conjuntos. Definimos $d^*(f) = \gamma$, donde $\gamma_i : S_i \to T_i$ es la que existe por lo anterior. (Recordar que tener una $\gamma : S \to T$ es tener una familia $\gamma_i : S_i \to T_i$).

  Veamos la buena definición de d^* en las flechas. Para esto hay que ver que se tienen los dos siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & T \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\lambda_{ji}"] \arrow[d, "f_i"'] & S_j \arrow[d, "f_j"] \\ T_i \arrow[r, "\eta_{ji}"] & T_j \end{tikzcd}$$

  Lo único que dice el primer diagrama es que $\gamma_i : S_i \to T_i$, lo cuál se verifica por definición de γ.

  Veamos que se verifica la conmutatividad en el segundo diagrama:

  Se tiene el siguiente diagrama conmutativo para $(j,i) \in \mathcal{N}_1$,

$$\begin{tikzcd} S_i \times (U_i \cap U_j) \arrow[r, "\lambda_{ji} \times id_{U_i \cap U_j}"] \arrow[d, "\gamma_i \times id_{U_i \cap U_j}"'] & S_j \times (U_i \cap U_j) \arrow[d, "\gamma_j \times id_{U_i \cap U_j}"] \\ T_i \times (U_i \cap U_j) \arrow[r, "\beta_{ji} \times id_{U_i \cap U_j}"] & T_j \times (U_i \cap U_j) \end{tikzcd}$$

  Mirando solamente la parte conjuntista se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\lambda_{ji}"] \arrow[d, "\gamma_i"'] & S_j \arrow[d, "\gamma_j"] \\ T_i \arrow[r, "\beta_{ji}"] & T_j \end{tikzcd}$$

  que es lo que queríamos.

Con lo cuál d^* está bien definida y es claro que es un funtor covariante.

Queremos ver ahora que tenemos una equivalencia entre $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$. Para esto, usando la proposición 1.26 nos basta ver que:

- d^* es plenamente fiel:

  Queremos ver que para toda $\phi : d^*(X, S \to I, \{\theta_i\}_{i\in I}) \to d^*(Y, T \to I, \{\eta_i\}_{i\in I}), \exists! f : (X, S \to I, \{\theta_i\}_{i\in I}) \to (Y, T \to I, \{\eta_i\}_{i\in I})$ tal que $d^*(f) = \phi$.

  Si $\phi : S \to T$ se tiene usando (12) $\phi_i : S_i \to T_i$.

  Ahora necesariamente por las condiciones de compatibilidad dadas en 2.10 para $f \in Fl(\mathcal{R}_{\mathcal{U}})$, se tiene que $g_i = \eta_i^{-1} \circ f \circ \theta_i : S_i \times U_i \to T_i \times U_i$ tiene que ser de la forma $g_i = \phi_i \times id_{U_i}$. Además se tiene el siguiente esquema

  $$X \mid_{U_i} \xrightarrow[\simeq]{\theta_i^{-1}} S_i \times U_i \xrightarrow{g_i} T_i \times U_i \xrightarrow[\simeq]{\eta_i} Y \mid_{U_i}$$

  con lo cuál componiendo las funciones tenemos $f_i : X \mid_{U_i} \to Y \mid_{U_i}$, donde $f_i = \eta_i \circ g_i \circ \theta_i^{-1}$. Tomamos $f : X \to Y$ tal que $f \mid_{X|_{U_i}} = f_i$.

  La función f está bien definida pues las condiciones de datos de descenso nos garantizan que se pegan bien en la intersección.

  Resta ver que la función f es única. Supongamos que existe $h \in Fl(\mathcal{R}_{\mathcal{U}})$ tal que $d^*(h) = \phi$. Por las condiciones de morfismos compatibles dadas en 2.10, se tiene que $\eta_i^{-1} \circ h \circ \theta_i = \phi_i \times id_{U_i}$. Luego, $h = \eta_i \circ (\phi_i \times id_{U_i}) \circ \theta_i^{-1} = f$.

- d^* es esencialmente suryectivo, i.e quiero ver que $\forall Y \in Obj(\mathcal{S}_{\mathcal{U}}) \exists X \in Obj(\mathcal{R}_{\mathcal{U}})$ tal que $d^*(X) \approx Y$:

  Dado $Y = (S \to I, \{\lambda_{ji}\}_{(j,i)\in\mathcal{N}_1}) \in Obj(\mathcal{S}_{\mathcal{U}})$.

  Sean $Z_i = S_i \times U_i$, $\pi_i : S_i \times U_i \to U_i$ y $\sigma_{ji} : S_i \times U_i \to S_j \times U_j$ definidas como $\sigma_{ji} = \lambda_{ji} \times id_{U_i \cap U_j}$ cada vez que $(i, j) \in \mathcal{N}_1$.

  Veamos que estamos en las hipótesis del teorema 3.3:

  - Z_i son espacios topológicos y $p_i : Z_i \to U_i$ funciones continuas y suryectivas.
  - $\sigma_{ji} : Z_i \to Z_j$ cada vez que $(i, j) \in \mathcal{N}_1$ y verifican:
    - $\sigma_{ii} = \lambda_{ii} \times id_{U_i} = id_{S_i} \times id_{U_i} = id_{S_i \times U_i}$ (usamos que los λ_{ji}'s son datos de descenso en $\mathcal{E}ns$).
    - $\sigma_{jk} \circ \sigma_{ki} = \lambda_{jk} \times id_{U_j \cap U_k} \circ \lambda_{ki} \times id_{U_k \cap U_i} = (\lambda_{jk} \circ \lambda_{ki}) \times (id_{U_j \cap U_k} \circ id_{U_k \cap U_i}) = \lambda_{ji} \times id_{U_j \cap U_i} = \sigma_{ji}$ (usando nuevamente que λ_{ji}'s son datos de descenso en $\mathcal{E}ns$)

- Hay que ver que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z_i \mid_{U_i \cap U_j} \arrow[rr, "\sigma_{ji}"] \arrow[dr, "p_i"'] & & Z_j \mid_{U_i \cap U_j} \arrow[dl, "p_j"] \\ & U_i \cap U_j & \end{tikzcd}$$

  Usando las definiciones anteriores se tiene que:

  - $p_i(z_i) = \phi(s_i, u_i) = u_i$,
  - $p_j(\sigma_{ji}(z_i)) = p_j(\sigma_{ji}(s_i, u_i)) = p_j(\lambda_{ji}(s_i), id(u_i)) = p_j(\lambda_{ji}(s_i), u_i) = u_i$.

  Con lo cuál se verifica la compatibilidad deseada.
  $\therefore$ Aplicando el teorema 3.3, existe un único par $(X, \{\theta_i\}_{i \in I})$, con X espacio topológico y θ_i homeos, tal que se tiene la siguiente familia diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} S_i \times U_i \arrow[rr, "\theta_i"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & X \mid_{U_i} \arrow[dl, "p"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

  Además, por el teorema 3.3, también se verifica que $\lambda_{ji} = \theta_j^{-1} \circ \theta_i$.
  $X = (X, S \to I, \{\theta_i\}_{i \in I})$ es el objeto que buscamos.

$\square$

4. Aplicaciones recubridoras y acciones de grupoides

4.1. Categoría de acciones de un grupoide

Definición 4.1. *Sea* $G \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} I$ *un grupoide, i.e una categoría* G *donde todas las flechas son isomorfismos (ver 1.1), (*I *es el conjunto de objetos del grupoide y* G *el conjunto de flechas). Denotaremos* e_x *a la identidad en el objeto* x.

Definición 4.2. *Sea* G *un grupoide, una acción (a izquierda) de* G *es:*

- *una familia* $\omega : S \to I$ *donde* $I = Obj(G)$*, notamos* $S_x = \omega^{-1}(x)$.
- *una función parcial* $\sigma : Fl(G) \times S \to S$*. Denotamos* $\sigma(g,s) = g.s$ *para cada* $g \in G[x,y]$*;* $s \in S_x$ *y* $g.s \in S_y$.

  Para resumir la información a esto lo notaremos de la siguiente forma: $\sigma. : G[x,y] \times S_x \to S_y$*. Si* $g \in G[x,y]$ *entonces* $\sigma_g : S_x \to S_y$*,* $\sigma_g(x) = g.x$*. Esta función además satisface:*

  1. $\sigma_{e_x} = id_{S_x}$*. Con la notación anterior* $e.s = s \ \forall s \in S_x$.
  2. *Si* $f \in G[x,y]$ *y* $g \in G[y,z]$ *entonces* $g \circ f \in G[x,z]$ *y se verifica* $\sigma_g \circ \sigma_f = \sigma_{g\circ f}$.
     Con la notación anterior, $(g \circ f).s = g.(f.s) \ \forall s \in S_x$.

También se dice que G *actúa en la familia* $S \to I$ *o que* S *es un* G*-conjunto.*

Definición 4.3. *Categoría de acciones de un grupoide*

Sea G *un grupoide y sea* $I = Obj(G)$*. Definimos la categoría de acciones en* G*, que notaremos* βG *como:*

$Obj(\beta G) = (S \to I, \{\sigma_f\}_{f\in G[i,j]})$ *donde* σ *es una acción de* G *en* S.

$Fl(\beta G)$ *= morfismos compatibles, i.e dados*
$(S \longrightarrow I \ , \{\sigma_f\}_{f\in G[i,j]})$ *y* $(T \longrightarrow I \ , \{\xi_f\}_{f\in G[i,j]})$*, un morfismo entre ambos objetos es*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & T \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd} \tag{14}$$

Es decir, $\psi = \{\psi_i\}_{i\in I}$ *con* $S_i \xrightarrow{\psi_i} T_i$ *(ver 1.29).*
tal que

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\sigma_f"] \arrow[d, "\psi_i"'] & S_j \arrow[d, "\psi_j"] \\ T_i \arrow[r, "\xi_f"] & T_j \end{tikzcd} \tag{15}$$

conmuta, es decir para todo $s \in S_i$ *y* $i \xrightarrow{f} j$ *se satisface* $\psi_j(f.s) = f.\psi_i(s)$.

Observación 4.4. *Notar que con la definición dada en 4.2 es claro que* $\beta G \approx \mathcal{E}ns^G$ *donde* $\mathcal{E}ns^G$= *categoría de funtores* $\psi : G \to \mathcal{E}ns$ *y transformaciones naturales. Es conveniente tener esta equivalencia en mente para facilitar la comprensión de algunos resultados.*

4.2. Gropoide asociado al nervio de un cubrimiento

En esta sección veremos como asociarle un grupoide al nervio $\mathcal{N}$ de un cubrimiento $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, de forma tal que un dato de descenso resulte ser lo mismo que una acción del grupoide.

Llamaremos a este grupoide, que depende del cubrimiento $\mathcal{U}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ y lo construimos de la siguiente manera:

Obj($\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$)= I (conjunto de índices de $\mathcal{U}$).

Para definir Fl($\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$) hacemos lo siguiente:

Los premorfismos $f : i \to j$ son de (k+1)-tuplas $f = (i_0 i_1 ... i_k)$ donde $i_0 = i$; $i_k = j$ y $(i_s, i_{s+1}) \in \mathcal{N}_1$ $\forall 0 \leq s < k$.

La composición es la juxtaposición, que notamos * ("pegamos los caminos"). Notar que juxtaponer caminos es asociativo.

Notar también que como $(i_s, i_l) \in \mathcal{N}_1 \Rightarrow (i_l, i_s) \in \mathcal{N}_1$, si tenemos un camino de $i \to j$, también tenemos el camino opuesto $j \to i$.

Definimos la siguiente relación en el conjunto de los premorfismos:

$(i_0 i_1 ... i_{s-1} i_s i_{s+1} ... i_k) \sim (i_0 i_1 ... i_{s-1} i_{s+1} ... i_k) \Leftrightarrow (i_{s-1}, i_s, i_{s+1}) \in \mathcal{N}_2$

Consideramos la relación de equivalencia generada por esta relación y definimos los morfismos de G como las respectivas clases de equivalencia.

Hay que ver que efectivamente $G_{\mathcal{U}}$ es un grupoide:

- $(ii) = e_i$:

  Supongamos un morfismo $f : i \to i$, veremos que $f * (ii) = f$ y que $(ii) * f = f$.

  Veamos que $f * (ii) = f$:

  Supongamos que $f = (i_0 i_1 ... i_k)$ donde $i_0 = i_k = i$ entonces $f * (ii) = (ii_1 ... i_{k-1} iii)$.

  $(i, i, i) \in \mathcal{N}_2$ $\forall i \in I$, con lo cuál por la equivalencia definida podemos "tachar el del medio" y nos queda que:

  $(ii_1 ... i_{k-1} iii) = (ii_1 ... i_{k-1} ii)$

  Ahora, por como construimos los premorfismos, se tiene que $(i_{k-1}, i) \in \mathcal{N}_1$, con lo cuál $(i_{k-1}, i, i) \in \mathcal{N}_2$ y entonces podemos "tachar el del medio" y nos queda:

  $(ii_1 ... i_{k-1} ii) = (ii_1 ... i_{k-1} i) = f$.

  Análogamente sale que $(ii) * f = f$.

- Hay que ver que los morfismos son isomorfismos:

  Sea $f \in Fl(G)$, $f = (i_0 i_1 ... i_k)$. Queremos ver que existe $g \in Fl(G)$ tal que $f * g = id_{i_0}$ y $g * f = id_{i_k}$. Sea $g = (i_k i_{k-1} ... i_1 i_0)$ el camino opuesto.

  Veamos que $f * g = e$:

  $f * g = (i_0 i_1 ... i_k) * (i_k i_{k-1} ... i_0) = (i_0 i_1 ... i_{k-1} i_k i_k i_{k-1} ... i_0)$

  Por construcción se tiene que $(i_{k-1} i_k) \in \mathcal{N}_1$ entonces $(i_{k-1} i_k i_k) \in \mathcal{N}_2$ con lo cuál podemos "tachar el del medio" y nos queda:

  $(i_0 i_1 ... i_{k-1} i_k i_k i_{k-1} ... i_0) = (i_0 i_1 ... i_{k-1} i_k i_{k-1} ... i_0)$

  Con el mismo argumento $(i_{k-1} i_k i_{k-1}) \in \mathcal{N}_2$ entonces

  $(i_0 i_1 ... i_{k-1} i_k i_{k-1} ... i_0) = (i_0 i_1 ... i_{k-1} i_{k-1} ... i_0)$.

  Repitiendo este proceso nos queda que $f * g = (i_0 i_0)$ y anteriormente vimos que $(i_0 i_0) = e_{i_0}$.

  Análogamente se obtiene que $g * f = e_{i_k}$.

Observación 4.5. *Notar que la asignación en la construcción anterior es funtorial.*

4.3. Datos de descenso y acciones de grupoide

Teorema 4.6. $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} \approx \beta G_{\mathcal{U}}$

Demostración. Definimos $F : \beta G_{\mathcal{U}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ de la siguiente manera:

- (en los objetos)

  Dado $(i,j) \in \mathcal{N}_1$, por construcción de $G_{\mathcal{U}}$ se tiene que hay una flecha $f = (ij)$. Definimos,

  $F(S \to I, \{\sigma_f\}_{f \in G_{\mathcal{U}}(i,j)}\}) = (S \to I, \{\lambda_{ji}\}_{(i,j)\in\mathcal{N}_1})$ donde $\lambda_{ji} = \sigma_f$

  Para ver la buena definición hay que chequear que efectivamente la familia $\{\lambda_{ji}\}_{(i,j)\in\mathcal{N}_1}$ verifica las condiciones de cociclo:

  - $\lambda_{ii} = \sigma_{id} = id$ (usando las condiciones de transitividad de la acción).
  - Si $(i,j,k) \in \mathcal{N}_2$ entonces $\lambda_{jk} \circ \lambda_{kj} = \sigma_g \circ \sigma_f = \sigma_{gf}$ y $gf = (jkki) \sim (jki) \sim (ji)$ usando que $(k,k,i),(j,k,i) \in \mathcal{N}_2$. Entonces nos queda que efectivamente $\lambda_{ji} = \sigma_{gf}$ y luego, usando la condición de asociatividad de las acciones, tenemos que $\lambda_{jk} \circ \lambda_{ki} = \lambda_{ji}$.

- (en las flechas)

  $f \in Fl(\mathcal{S}_{\mathcal{U}}) \Rightarrow f = (f_i)_{i\in I}$. Análogamente vimos que $\psi \in Fl(\beta G_{\mathcal{U}}) \Rightarrow \psi = (\psi_i)_{i\in I}$.

  Definimos $F(\psi) = f$, con f tal que $f_i = \psi_i, \forall i \in I$.

  Hay que ver que f es un morfismo compatible lo cuál se verifica trivialmente al observar las definiciones dadas en 3.4 y 4.3.

  Más explícitamente la conmutatividad de (14) implica la conmutatividad de (12) y la conmutatividad de (15) implica la conmutatividad de (13).

$\therefore$ F esta bien definido y claramente es funtorial.

Veamos ahora que es un equivalencia, para esto usando la proposición 1.26 hay que verificar:

- F es plenamente fiel lo cuál es inmediato pues como vimos las flechas en ambas cateogorías son las mismas.

- F es esencialmente suryectivo, i.e $\forall Y \in Obj(\mathcal{S}_{\mathcal{U}})$ $\exists X \in Obj(\beta G_{\mathcal{U}})$ tal que $FX \approx Y$:

  Sea $(S \to I, \{\lambda_{ji}\}_{(i,j)\in\mathcal{N}_1})$. Queremos construir $(S \to I, \{\sigma_f\}_{f\in G(i,j)}) \in Obj(\beta G_{\mathcal{U}})$.

  Solo hay que definir σ_f. lo definimos primero sobre los premorfismos.

  Dados $i, j \in I$ y un camino f entre i y j $f = (i_0 i_1 ... i_k)$ donde $i_0 = i$ y $i_k = j$, definimos σ_f.

  Por construcción de $G_{\mathcal{U}}$ se tiene que $(i_n, i_{n+1}) \in \mathcal{N}_1$ $\forall 0 \leq l < k$ con lo cual existen $\lambda_{i_n i_{n+1}} : S_n \to S_{n+1}$, definimos entonces $\sigma_f = \lambda_{i_{k-1} i_k} \circ \lambda_{i_{k-2} i_{k-1}} \circ ... \circ \lambda_{i_1 i_0}$.

  Hay que ver que esta definición pasa al cociente, para esto basta ver que si $\overline{(i_0 i_1 i_2)} = \overline{(i_0 i_2)}$ (notar que esto implica que $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap U_{i_2} \neq \emptyset$) entonces $\sigma_{i_0 i_1 i_2} = \sigma_{i_0 i_2}$

  $\sigma_{i_0 i_1 i_2} = \lambda_{i_2 i_1} \circ \lambda_{i_1 i_0} = \lambda_{i_2 i_0} = \sigma_{i_0 i_2}$ (usando las condiciones de cociclo).

  Por lo tanto σ_f está bien definida en el cociente.

  Con esta definición claramente se verifican las condiciones de transitividad (pues estamos componiendo morfismos que la tienen).

  Restaría ver que $F(S \to I, \{\sigma_f\}_{f\in G(i,j)}) \approx (S \to I, \{\lambda_{ji}\}_{(i,j)\in\mathcal{N}_1})$.

  Si $(i, j) \in \mathcal{N}_1 \Rightarrow f = (ij) \in G(i, j)$. Por lo anterior, $\sigma_f = \lambda_{ji}$. Por otro lado, al hacer la construcción de F, definimos $\lambda_{ji} = \sigma_f$ con lo cual se tiene que $F(S \to I, \{\sigma_f\}_{f\in G(i,j)}) = (S \to I, \{\lambda_{ji}\}_{(i,j)\in\mathcal{N}_1})$.

Podemos concluir entonces que ambas categorías son equivalentes. □

Teorema 4.7. $\mathcal{R}_{\mathcal{U}} \approx \beta G_{\mathcal{U}}$

Demostración. Es un corolorio inmediato de 3.5 y 4.6 □

Hemos conseguido la equivalencia entre la categoría de acciones sobre un grupoide (que depende de $\mathcal{U}$) y la categoría de accciones recubridoras trivializadas por $\mathcal{U}$. Para cada cubrimiento por abiertos fijo tenemos la equivalencia deseada.

Una vez obtenido el resultado para un cubrimiento fijo, lo que queremos hacer ahora es conseguir la equivalencia sobre todos los cubrimientos de B.

Tomando colímites vamos a lograr una equivalencia entre la categoría de acciones de un sistema (cofiltrante) de grupoides y la categoría de todas las aplicaciones recubridoras de B.

Para ello es necesario definir adecuadamente la categoría de todas las aplicaciones recubridoras. Lo haremos en forma tal que resulta una categoría equivalente a la considerada en [5].

5. Teorema de clasificación de aplicaciones recubridoras

5.1. Caso general

Definición 5.1. *Sean $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{W} = (W_j)_{j\in J}$ dos cubrimientos por abiertos de B. Decimos que $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{W}$, que notaremos $\mathcal{U} \to \mathcal{W}$ si existe $\phi : I \to J$ función de conjuntos tal que $U_i \hookrightarrow W_{\phi(i)}$.*

Proposición 5.2. *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ dos cubrimientos de B, tal que $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{W}$ entonces si $p : X \to B$ es una aplicación recubridora trivializada por $\mathcal{W}$ se tiene que $p : X \to B$ es una aplicación recubridora trivializada por $\mathcal{U}$.*

Demostración.

Si $p : X \to B$ es una aplicación recubridora trivializada por $\mathcal{W} = (W_j)_{j\in J}$ entonces se tiene que existen $S \to J$ y $\theta_j : S_j \times W_j \to X\ |_{W_j}$ homeomorfismos tal que $\sigma_{ji} = \theta_j^{-1} \circ \theta_i = \lambda_{ji} \times id_{W_i\cap W_j}$ para todo $(i,j) \in \mathcal{N}_1$.

Queremos ver que también es una aplicación recubridora trivializada por $\mathcal{U}$.

Como $\mathcal{U} \to \mathcal{W}$ entonces existe $\phi : I \to J$ entonces se tiene que $\phi(I) \subseteq J$ y $U_i \hookrightarrow W_{\phi(i)}$ con lo cuál $\theta_{\phi(i)}\ |_{U_i}: S_{\phi(i)} \times U_i \to X\ |_{U_i}$ es homeomorfismo para todo i y como son restricciones de los morfismos anteriores se tiene que verifican $\sigma_{ji} = \theta_j^{-1} \circ \theta_i = \lambda_{ji} \times id_{U_i\cap U_j}$ para todo $(i,j) \in \mathcal{N}_1$. □

Observación 5.3. *Esto define un funtor fiel $\mathcal{R}_{\mathcal{W}} \to \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$. Observar que este funtor no es pleno. Es decir, sobre un refinamiento pueden aparecer más morfismos.*

Observación 5.4. *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ cubrimientos de B tal que $\mathcal{U}$ refina $\mathcal{W}$. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset \Rightarrow W_{\phi_i} \cap W_{\phi_j} \neq \emptyset$. Y esto mismo vale para la intersección de cualquier cantidad de abiertos.*

Lema 5.5. *Si $\mathcal{U}$ refina $\mathcal{W}$ entonces existe un morfismo de grupoides $\phi : G_{\mathcal{U}} \to G_{\mathcal{W}}$.*

Demostración.

- (en los objetos)

  Supongamos $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{W} = (W_j)_{j\in J}$. Como $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{W}$ se tiene $\phi : I \to J$ entonces basta tomar $\phi : Obj(G_{\mathcal{U}}) \to Obj(G_{\mathcal{W}})$ pues por construcción del grupoide asociado a un cubrimiento se tiene que $Obj(G_{\mathcal{U}}) = I$ y $Obj(G_{\mathcal{W}}) = J$.

- (en las flechas)

  Primero lo definimos sobre los premorfismos, luego veremos la buena definición.

  Si $(i,j) \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \Rightarrow (\phi(i), \phi(j)) \in \mathcal{N}(\mathcal{W})$ (observación anterior)

  Si tengo $i \xrightarrow{f} j$ con $f = (i_0 i_1 ... i_k)$ con $i_0 = i$ y $i_k = j$ camino entre i y j. Entonces por lo visto anteriormente se tiene que $(\phi(i_l), \phi(i_{l+1})) \in \mathcal{N}(\mathcal{W})$ con lo cuál $(\phi(i_0)\phi(i_1)...\phi(i_k))$ es un camino entre $\phi(i) = \phi(i_0)$ y $\phi(j) = \phi(i_k)$. Definimos entonces $\phi(f) = (\phi(i_0)\phi(i_1)...\phi(i_k))$

  Veamos la buena definición:

  Sean $i \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} j$ dos caminos equivalentes entre i y j. Basta probarlo para caminos de la forma $f = (i_0 i_1 ... i_{l-1} i_l i_{l+1} ... i_k)$ y $g = (i_0 i_1 ... i_{l-1} i_{l+1} ... i_k)$ (pues los demás se obtienen de aplicar esto sucesivamente)

  Lo anterior implica que $(i_{l-1} i_l i_{l+1}) \in \mathcal{N}_2(\mathcal{U})$, usando la observación anterior se tiene que $(\phi(i_{l-1})\phi(i_l)\phi(i_{l+1})) \in \mathcal{N}_2(\mathcal{W})$ entonces se tiene que

  $\phi(f) = (\phi(i_0)\phi(i_1)...\phi(i_{l-1})\phi(i_l)\phi(i_{l+1})...\phi(i_k))$ y

  $\phi(g) = (\phi(i_0)\phi(i_1)...\phi(i_{l-1})\phi(i_{l+1})...\phi(i_k))$.

  $(\phi(i_{l-1})\phi(i_l)\phi(i_{l+1})) \in \mathcal{N}_2(\mathcal{W}) \Rightarrow \overline{\phi(f)} = \overline{\phi(g)}$.

La funtorialidad sale usando la observación 4.5 □

Definición 5.6. *Un progrupoide $\mathbb{G} = (G_i)_{i \in \Gamma}$ es un sistema filtrante (inverso) de grupoides $(G_i)_{i \in \Gamma}$. Es decir Γ es una categoría filtrante y dado $i \xrightarrow{\alpha} j$ se tiene $G_j \xrightarrow{G(\alpha)} G_i$ morfismo de grupoides.*

Observación 5.7. *Sean G y F dos grupoides y $\phi : G \to F$ un funtor (morfismo de grupoides) entonces se tiene una flecha de $\beta F \to \beta G$ que se obtiene componiendo: (pensar en 4.4)*

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[r, "\phi \times id"] \arrow[rr, bend right, "\chi"'] & F \times S \arrow[r, "\psi"] & S \end{tikzcd}$$

Es claro que χ es una acción a izquierda en G.

Esto nos dice que sistemas inversos de grupoides $(G_i)_{i \in \Gamma}$ nos dan un sistema directo de categorías $(\beta G_i)_{i \in \Gamma}$.

Definición 5.8. *Sea $\mathbb{G} = (G_i)_{i \in I}$ un progrupoide, definimos $\beta\mathbb{G} = \underset{\longrightarrow i \in I}{Colim} \beta G_i$.*

Observación 5.9. *Por la definición de progrupoide dada en 5.6 se tiene que $(G_i)_{i\in I}$ es un sistema filtrante (inverso) de grupoides. Usando además la observación 5.7 se tiene que el sistema $(\beta G_i)_{i\in I}$ es un sistema filtrante (directo) de categorías, con lo cuál por la proposición 1.32 se tiene que existe dicho colímite. Más aún por la demostración de la proposición sabemos como se construye.*

Ahora lo que nos resta es conseguir una categoría de índices que sea filtrante para poder usar lo anterior y concluir el teorema de clasificación.

Observación 5.10. *Dado B espacio topológico la categoría de los cubrimientos $\mathcal{U}$ de B, y cuyos morfismos son los refinamientos no es filtrante.*

Demostración. Lo que no se va a verificar es que dadas dos flechas $\mathcal{U} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \mathcal{V}$

exista una flecha $\mathcal{W} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{U}$ tal que $\phi\gamma = \psi\gamma$.

Basta pensar en el siguiente ejemplo: $\mathcal{U} = \{A\setminus(A\cap C), C\setminus(A\cap C), A\cap C\}$ y $\mathcal{V} = \{A, C\}$ con $A \cap C \neq \emptyset$.

Los índices los considero ordenados (es decir $U_1 = A \setminus (A \cap C)$ y así siguiendo...) entonces podemos hacer dos flechas de $\{1, 2, 3\}$ en $\{1, 2\}$ dependendiendo cuál es la imagen de 3 (puede ir a cualquiera de los dos pues $A\cap C$ está contenido tanto en A como en C).

Dado cualquier cubrimiento que refine a $\mathcal{U}$ necesariamente para ser cubrimiento de B tendrá que cubrir $A \cap B$, con lo cuál $3 \in Im(\gamma)$ y entonces ya no tendré manera de igualar las funciones. □

Definición 5.11. *Dado un cubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$, decimos que el cubrimiento es sieve (la traducción al castellano sería "tamiz") si dado $U \in \mathcal{U}$ y $W \subset U$ es abierto entonces necesariamente $W \in \mathcal{U}$.*

Observación 5.12. *No es necesario tener un cubrimiento de B para definir el concepto de sieves, la definición es válida para cualquier familia de abiertos de B.*

Observación 5.13.

1. *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ dos cubrimientos sieves de B tal que $\mathcal{U}$ refina $\mathcal{W}$ entonces $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{W}$ con la inclusión canónica, en este caso diremos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$.*

2. *Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ entonces $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{W}$.*

Demostración.

1. Supongamos que $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{W} = (W_j)_{j\in J}$. Como $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{W}$ entonces existe $\phi : I \to J$ tal que $\forall i \in I$ se tiene que $U_i \hookrightarrow W_{\phi(i)}$.

   U_i abierto y $U_i \subset W_{\phi(i)} \Rightarrow U_i \in \mathcal{W}$ (pues $\mathcal{W}$ es cubrimiento sieves), entonces existe $j \in J$ tal que $U_i = W_j$.

   $\therefore \mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ (en el sentido de que los abiertos de $\mathcal{U}$ son abiertos de $\mathcal{W}$).

2. Basta con mandar cada abierto de $\mathcal{U}$ a él mismo en $\mathcal{W}$.

$\square$

Lema 5.14.

1. *La categoría de cubrimientos sieves ordenados por inclusión (canónica) es filtrante.*

2. *Dado $\mathcal{U}$ cubrimiento por abiertos de B entonces existe $\mathcal{W}$ cubrimiento sieves que refina a $\mathcal{U}$.*

Demostración.

1.
   - Sean $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ dos cubrimientos sieves de B. Queremos ver que hay un refinamiento (sieves) común.

     Para esto basta tomar $\mathcal{W} = (U_i \cap V_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

     - $\mathcal{W}$ es cubrimiento de B:
       Usamos que si $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ es cubto de B entonces para todo conjunto $Y \subset B$ se tiene que $Y = Y \cap B = Y \cap (\cup_{i\in I} U_i) = \cup_{i\in I}(Y \cap U_i)$.
       Entonces $B = \cup_{i\in I}(B \cap U_i) = \cup_{i\in I} \cup_{j\in J} ((B \cap U_i) \cap U_j) = \cup_{(i,j)\in I\times J} B \cap (U_i \cap U_j)$.
     - $\mathcal{W}$ es sieves:
       Sea $W \in \mathcal{W}$ entonces $W = U_i \cap V_j$ y sea W' abierto tal que $W' \subset W \Rightarrow W' \subset U_i$ y $W' \subset V_j$ entonces como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son sieves se tiene que $W' \in \mathcal{U} \Rightarrow W' = U_k$ y $W' \in \mathcal{V} \Rightarrow W' = V_l$
       $\therefore W' = U_k \cap V_l \Rightarrow W' \in \mathcal{W}$.
   - Sean $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ dos cubrimientos sieves de B y supongamos que se tienen $\mathcal{U} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \mathcal{V}$ entonces trivialmente se tiene que $\phi = \psi$ pues en la categoría de cubtos sieves

     $$Hom(\mathcal{U}, \mathcal{W}) = \begin{cases} i & \mathcal{U} \subset \mathcal{W} \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

     donde $i : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{W}$ es la inclusión canónica.

2. Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ cubrimiento por abiertos de B. Defino $s(\mathcal{U}) = \{V$ abiertos tal que $V \subset U_i$ para algún i $\}$ (sieve generado por $\mathcal{U}$). Tomando $\mathcal{W} = s(\mathcal{U})$ se tiene lo querido.

$\square$

Definición 5.15. ***Categoría de aplicaciones recubridoras***

Dado B espacio topológico, llamamos $\mathcal{R}$ = categoría de aplicaciones recubridoras de B. Por definición se tiene que

$Obj(\mathcal{R}) = \coprod_{\mathcal{U}} Obj(\mathcal{R}_{\mathcal{U}})$ *donde $\mathcal{U}$ es un cubrimiento por abiertos de B.*

$Fl(\mathcal{R}) = \coprod_{\mathcal{U}} Fl(\mathcal{R}_{\mathcal{U}})$ *donde $\mathcal{U}$ es un cubrimiento por abiertos de B.*

Notar que esto es suficiente ya que dada una $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p'} & \\ & B & \end{array}$ *entre aplicaciones recubridoras trivializadas por cubrimientos distintos, siempre la puedo mirar en un refinamiento común, usando la observación 5.2.*

Teorema 5.16. *(Teorema de clasificación de aplicaciones recubridoras)*

$\mathcal{R} = \varinjlim_{\mathcal{U} sieve} \beta G_{\mathcal{U}}$ *donde el colímite se toma sobre la categoría filtrante de cubrimientos sieves de B. Es decir, $\mathcal{R} = \beta\mathbb{G}$ donde $\mathbb{G} = \{G_{\mathcal{U}}\}_{\mathcal{U} sieve}$ usando la definición 5.8.*

Demostración.

Usando el lema 5.14 se tiene $\{\mathcal{U}\}_{\mathcal{U} sieves}$ es una categoría filtrante.

Además usando el lema 5.5 se tiene que $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{W}$ induce $G_{\mathcal{U}} \to G_{\mathcal{W}}$.

Finalmente usando la observación 5.7 se tiene que una flecha $G_{\mathcal{U}} \to G_{\mathcal{W}}$ induce una flecha $\beta G_{\mathcal{W}} \to \beta G_{\mathcal{U}}$.

Uniendo los tres resultados anteriores se tiene que $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{W}$ induce una flecha $\beta G_{\mathcal{W}} \to \beta G_{\mathcal{U}}$ con lo cuál tenemos un sistema directo de categorías, usando la proposición 1.32 se tiene que existe $\varinjlim_{\mathcal{U} sieve} \beta G_{\mathcal{U}}$.

Por lo observado en 5.3 se tiene que $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{W}$ induce $\mathcal{R}_{\mathcal{W}} \to \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ entonces usando la proposición 1.32 se tiene que existe $\varinjlim_{\mathcal{U} sieve} \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$.

Por el corolario 4.7 se tiene que para todo $\mathcal{U}$ cubrimiento por abiertos de B, $\mathcal{R}_{\mathcal{U}} \approx \beta G_{\mathcal{U}}$. En particular esta equivalencia vale para todo $\mathcal{U}$ cubrimiento sieves.

Con lo cuál $\varinjlim_{\mathcal{U} sieve} \beta G_{\mathcal{U}} = \varinjlim_{\mathcal{U} sieve} \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$.

Restaría ver que efectivamente $\varinjlim_{\mathcal{U} sieve} \mathcal{R}_{\mathcal{U}} = \mathcal{R}$:

- en los objetos

  Veamos que $Obj(\mathcal{R}) = \coprod_{\mathcal{U} sieve} \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$:

  - Si $P : X \to B$ es una aplicación recubridora, se tiene que existe un cubrimiento $\mathcal{V}$ que trivializa a X. Luego, usando el lema 5.14 se tiene que existe un cubrimiento sieve $\mathcal{U}$ que refina a $\mathcal{V}$. Usando ahora la observación 5.2 se tiene que $\mathcal{U}$ trivializa a X y entonces $P : X \to B \in Obj(\mathcal{R}_{\mathcal{U}})$.
  - Análogamente si $P : X \to B \in Obj(\mathcal{R}_{\mathcal{U}})$ para algún $\mathcal{U}$ sieve entonces $P : X \to B$ es claramente una aplicación recubridora.

  Por como construímos el colímite filtrante en $\mathcal{C}at$ en 1.32 se tiene que $Obj(\underset{\longrightarrow \mathcal{U} sieve}{Colim}) = \coprod_{\mathcal{U} sieve} \mathcal{R}_{\mathcal{U}} / \sim$, esto prueba lo afirmado. Además, los isomorfismos en esta categoría determinan una relación de equivalencia de aplicaciones recubridoras, que nos dice que dos aplicaciones recubridoras son equivalentes si coinciden en un refinamiento común. Notar que esta es la noción de equivalencia que se define en pág. 13 de [5].

- en las flechas

  Son los morfismos definidos en 5.15 sólo que mirados en un refinamiento común sieve. Esto es siempre posible pues la categoría de cubrimientos sieves es cofinal (lema 5.14).

$\square$

Notación 5.17. *Llamamos $\widetilde{\Pi_1}(B) = \mathbb{G}$ obtenido por el teorema anterior, i.e $\widetilde{\Pi_1}(B) = \{G_{\mathcal{U}}\}_{\mathcal{U} sieves}$, con lo cuál nos queda que el $\widetilde{\Pi_1}(B)$ es un progrupoide, que no será constante en general.*

Observación 5.18.

Si $\mathcal{R}ev$ es la categoría de revestimientos (como en [7]) se tiene, por la observación 2.11, que el funtor $i : \mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{R}ev$ es un funtor plenamente fiel en el caso de que el espacio B sea localmente conexo.

Sin embargo no es cierto lo afirmado en [5] de que estas dos categorías sean equivalentes en este caso. En principio podrían existir revestimientos que no sean equivalentes a una aplicación recubridora.

En [5], el autor afirma que las definiciones de aplicación recubridora y de revestimiento coinciden en el caso localmente conexo. Para argumentar esto, muestra en la pág.13 que si el espacio es localmente conexo todos los atlas son equivalentes. Lo que no muestra es la existencia de un tal atlas.

Mostrar la existencia de un tal atlas (teniendo en cuenta la caracterización hecha en 2.5) significaría mostrar la existencia de un cubrimiento por abiertos conexos de B (que estamos suponiendo localmente conexo) tal que todas las intersecciones de a dos sean también conexas, resultado que no tiene por qué ser cierto en general.

En las secciones siguientes, veremos que si pedimos algunas hipótesis extras si se tendrá la equivalencia de dichas categorías.

5.2. Caso clásico

En esta sección veremos que el progrupoide que clasifica las aplicaciones recubridoras en el caso general coincide con el π_1 de Poincaré en el caso de que el espacio tenga buenas condiciones locales. Esto significa que la clasificación hecha en la sección anterior generaliza la noción del π_1 de Poincaré.

La demostración dada en [5] no es completamente correcta, ya que cuando define $\eta : *s(\mathcal{U}_0) \to X$ (con la notación de [5]) solo define un camino entre x_U y x_V para el caso en el que U y V sean trivials. (ver pág 25. de [5]). Si suponemos que lo hace del mismo modo, mirando a este abierto dentro de un trivial, para cualesquiera U y V no es verdadero que la aplicación η resulta funtorial.

Observación 5.19. $\eta : *s(\mathcal{U}_0) \to X$ *definida como antes no es funtorial.*

Demostración. Introducimos la notación de [5]:

- $\mathcal{U}_0 = \{U$ abiertos/ $U \neq \emptyset, U$ es arcoconexo y trivial $\}$.
- $*s(\mathcal{U}) = \{V/V \neq \emptyset, V$ abierto y existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U\}$
- $\eta(U) = x_U$ donde $x_U \in U$ y dados $U, V \in \mathcal{U}_0$ tal que $U \hookrightarrow V$ la inclusión, $\eta(i) =$ camino en V entre x_U y x_V.

  En este punto no queda claro como lo define en el resto de los abiertos, pero suponemos que mira los abiertos en un abierto trivial y lo define del mismo modo.

Supongamos $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos cualesquiera (no necesariamente trivials) entonces tenemos x_U , x_V y x_W (como antes) y supongamos que $i_2 : U \to V$ la inclusión de U en V y $i_1 : V \to W$ la inclusión de V en W, entonces $i_1 o i_2 : U \to W$ es la inclusión de U en W.

Cuando definimos η en las flechas, asignamos

- $\eta(i_1) = \gamma_1$ que es un camino (en algun H trivial) entre x_V y x_W.

- $\eta(i_2) = \gamma_2$ que es un camino (en algun H' trivial) entre x_U y x_V.
- $\eta(i_3) = \gamma_3$ que es un camino (en algun H'' trivial) entre x_U y x_W.

Para ver que es funtorial, ahora habría que probar que $\gamma_1 * \gamma_2$ es homotópico a γ_3 y como los fui mirando en diferentes triviales no puedo garantizarlo. □

Por eso en esta sección haremos otra demostración del caso clásico en todo detalle.

Observación 5.20. *Si $S \subset B$ abierto entonces la inclusión induce una flecha $\Pi_1(S) \hookrightarrow \Pi_1(B)$ que es ver a los lazos en S como lazos en X, pero dos lazos diferentes en $\Pi_1(S)$ pueden ser iguales mirados en $\Pi_1(B)$ pues hay más homotopías.*

Definición 5.21. *Decimos que $\Pi_1(S) \hookrightarrow \Pi_1(B)$ es trivial si todo lazo en S va a la identidad en $\Pi_1(B)$. Si U es un abierto que verifica lo anterior, diremos que U es un abierto trivial.*

Definición 5.22. *(Cubrimientos triviales)*

Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de B, decimos que el cubrimiento es trivial si se verifican:

1. *$U \in \mathcal{U} \Rightarrow U$ es arcoconexo y $\Pi_1(U) \hookrightarrow \Pi_1(B)$ es trivial.*
2. *$V \subset B$ abierto no vacío arcoconexo y que verifica $\Pi_1(V) \hookrightarrow \Pi_1(B)$ es trivial entonces $V \in \mathcal{U}$.*

Observación 5.23. *No es necesario que sea cubrimiento para definir el concepto de trivial.*

Observación 5.24. *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{U}$ dos cubrimientos triviales. Si $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$ entonces $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U}$*

Demostración. Análogo a la de cubrimientos sieves. □

Lema 5.25. *Sea B un espacio topológico arcoconexo y semi localmente simplemento conexo entonces:*

1. *La categoría de cubrimientos trivial es filtrante.*
2. *Dado $\mathcal{U}$ un cubrimiento sieve, existe un refinamiento $\mathcal{V}$ trivial.*

Demostración.

1. Sean $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ dos cubrimientos trivial. Sea $\mathcal{W} = (U_i \cap V_j)_{(i,j)\in I\times J}$. Por lo visto en 5.14 se tiene que $\mathcal{W}$ es un refinamiento común. Pero este cubrimiento no es necesariamente trivial.

   Considero $\mathcal{W}' = \{U$ abierto/ U es no vacio, arcoconexo, trivial y existe (i,j) tal que $U \subseteq W_{(i,j)}\}$.

   Por construcción $\mathcal{W}'$ es trivial.

   Resta ver que cubre B. Como B es localmente arcoconexo y semi localmente simplemente conexo se tiene que dado $x \in B$ y U_x entorno abierto de x, entonces existe V abierto trivial y arcoconexo tal que $x \in V \subseteq U_x$. Como $\mathcal{W}$ cubre a B, para cada $x \in B$ existe $U_x \in \mathcal{W}'$ y usando lo anterior se tiene que $\mathcal{W}'$ es cubriemiento.

2. Basta tomar la construcción hecha anteriormente.

$\square$

Observación 5.26. *Este lema nos dice que $\mathcal{U}_{trivial} \hookrightarrow \mathcal{U}_{sieve}$ es cofinal. Se tiene entonces el siguiente corolario.*

Corolario 5.27. $\underset{\longrightarrow \mathcal{U}sieve}{Colim}\ \beta G_{\mathcal{U}} = \underset{\longrightarrow \mathcal{U}trivial}{Colim}\ \beta G_{\mathcal{U}}$.

Teorema 5.28. *Sea B espacio topológico conexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo entonces $\widetilde{\Pi_1}(B) \approx \Pi_1(B)$ donde Π_1 es el de Poincaré vía e identificando al progrupoide constante $\widetilde{\Pi_1}(B) = \{\Pi_1(B)\}_{\mathcal{U}}$ cuyas flechas son las identidades con el grupoide $\Pi_1(B)$.*

Demostración. Usando el corolario anterior se tiene que $\underset{\longrightarrow \mathcal{U}sieve}{Colim}\ \beta G_{\mathcal{U}} = \underset{\longrightarrow \mathcal{U}trivial}{Colim}\ \beta G_{\mathcal{U}}$.

Veamos que para todo $\mathcal{U}$ trivial se tiene que $G_{\mathcal{U}} \approx \Pi_1(B)$.
Veamos entonces que $G_{\mathcal{U}} \approx \Pi_1(B)$ para $\mathcal{U}$ trivial:
Para esto definimos un funtor $\psi : G_{\mathcal{U}} \to \Pi_1(B)$ de la siguiente manera

- (en los objetos)

  $\psi(u) = x_u$ tal que $x_u \in U$ (elijo cualquiera).

- (en las flechas)

  Lo hacemos primero en los premorfismos, después veremos que pasa bien al cociente.

  Para todo $(i,j) \in \mathcal{N}_1$ elijo un punto $x_{i\cap j} \in U_i \cap U_j$.

Sea $f = (i_o i_1 ... i_n)$ un premorfismo en $G_{\mathcal{U}}$ entonces $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ para todo $k = 0, ..., n-1$ y en cada intersección tenemos un punto elejido por lo anterior.

Para cada $x, y \in U$ elijo un camino γ_{xy} de x a y, existe pues U es arcoconexo. Además como $i^* : \Pi_1(U) \to \Pi_1(B)$ es trivial se tiene que cualesquiera dos caminos en U entre x e y son homotópicos.

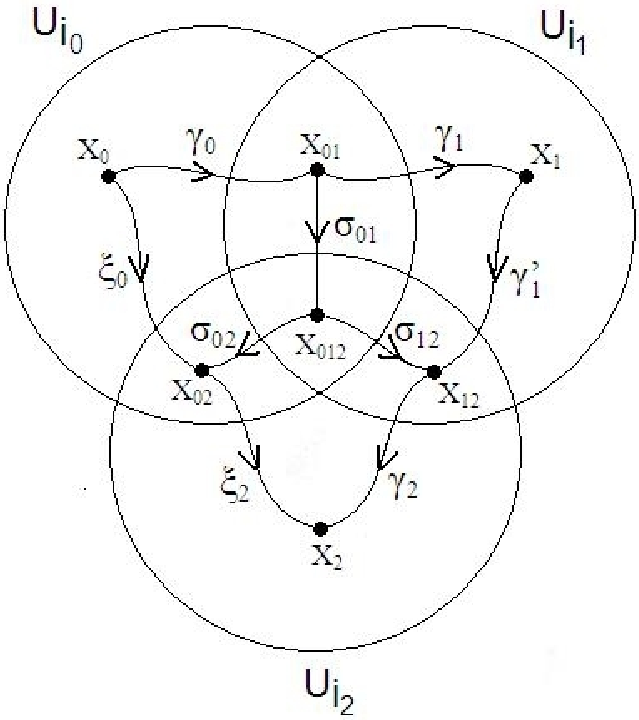
Defino $\psi(f) = \gamma_{i_0 i_0 \cap i_1} * \gamma_{i_1 \cap i_2 i_2 \cap i_3} * ... * \gamma_{i_{n-1} \cap i_n i_n}$ donde $\gamma_{i_{k-1} \cap i_k i_k \cap i_{k+1}}$ es una camino entre $x_{U_{i_{k-1}} \cap U_{i_k}}$ (punto elegido en la intersección de U_{i_k} y $U_{i_{k+1}}$ y $x_{U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}}}$.

Por lo visto anteriormente ψ está bien definido sobre los premorfismos.

Ahora hay que ver que pasa bien al cociente (a los morfismos). Para esto basta ver que si $\overline{(i_0 i_1 i_2)} = \overline{(i_0 i_2)}$ entonces $\psi(i_0 i_1 i_2) = \psi(i_0 i_2)$.

$\overline{(i_0 i_1 i_2)} = \overline{(i_0 i_2)} \Leftrightarrow (i_0 i_1 i_2) \in \mathcal{N}_2$.

Entonces se tiene el siguiente esquema:



Quiero ver que $\gamma_0 * \gamma_1 * \gamma_1' * \gamma_2 \simeq \xi_0 * \xi_2$

Elijo $x_{012} \in U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap U_{i_2}$ y sean σ_{01}, σ_{12} y σ_{02} como en el dibujo. (caminos entre los puntos elegidos entre cada punto de una doble intersección y x_{012}).

1. U_{i_0} trivial $\Rightarrow \xi_0 \simeq \gamma_0 * \sigma_{01} * \sigma_{02}$.
2. U_{i_2} trivial $\Rightarrow \xi_2 \simeq \sigma_{02}^{-1} * \sigma_{12} * \gamma_2$.

Usando 1. y 2. se tiene que $\xi_0 * \xi_2 \simeq \gamma_0 * \sigma_{01} * \sigma_{02} * \sigma_{02}^{-1} * \sigma_{12} * \gamma_2 \simeq \gamma_0 * \sigma_{01} * \sigma_{12} * \gamma_2$. (*)

Usando ahora que U_{i_1} es trivial se tiene que $\sigma_{01} * \sigma_{12} \simeq \gamma_1 * \gamma_1'$.

Reemplazando esto en (*) se obtiene que $\xi_0 * \xi_2 \simeq \gamma_0 * \gamma_1 * \gamma_1' * \gamma_2$.

Con lo cuál ψ está bien definido y es claramente funtorial.

Veamos que ψ es una equivalencia, para esto usando la proposición 1.26 basta ver:

1. $\psi : G_{\mathcal{U}} \to \Pi_1(B)$ es esencialmente suryectivo:

   Sea $x \in B$, entonces como $\mathcal{U}$ es cubrimiento de B, se tiene que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Por como definimos ψ existe $U \in Obj(G_{\mathcal{U}})$ tal que $\psi(U) = x_U$ con $x_U \in U$ y como U es arcoconexo existe un camino entre x y x_U, con lo cuál $x \approx x_U$ (todos los caminos tienen caminos opuestos y componerlos me da homotópico a la identidad).

2. $\psi : G_{\mathcal{U}} \to \Pi_1(B)$ es plenamente fiel $\Leftrightarrow \forall \gamma' : x_U \to x_V \exists! f : U \to V$ tal que $\psi(f) = \gamma'$.

   $\gamma' : [0,1] \to B$ es compacto entonces lo cubro con finitos abiertos de $\mathcal{U}$.

   Para cada U abierto, sea $t_U = inf_{t \in [0,1]}\{\gamma(t) \in U\}$.

   $t_U \in [0,1] \forall U \in \mathcal{U}$ entonces puedo ordenar los abiertos de acuerdo al orden en $\mathbb{R}$ de los t_U asociados.

   Sean V_1, V_2, ..., V_k los abiertos que cubren γ' ordenados tal que $t_{V_i} \leq t_{V_{i+1}}$ para todo $i = 1, ..., k-1$.

   Como estos abiertos cubren γ' se tiene que $V_j \cap V_{j+1} \neq \emptyset$ entonces existe un morfismo $(v_1 v_2 ... v_k)$ en $G_{\mathcal{U}}$ y $\psi(v_1 v_2 ... v_k) = \gamma_{v_1 v_1 \cap v_2} * ... * \gamma_{v_{k-1} \cap v_k v_k} = \gamma$ (como la definimos anteriormente).

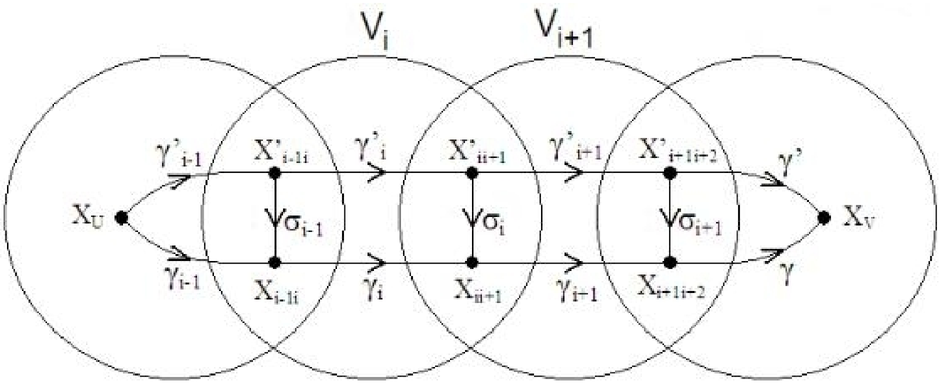
   Veamos que $\gamma' \simeq \gamma$:

   Sea $x'_{ii+1} \in \gamma' \cap V_i \cap V_{i+1}$ y llamemos γ_i' a la restricción de la curva γ entre x'_{i-1i} y x'_{ii+1} donde $x'_{01} = x_U$ y $x'_{kk+1} = x_V$.

   Llamamamos $x_{ii+1} = x_{V_i \cap V_{i+1}}$ (punto elegido anteriormente en $V_i \cap V_{i+1}$) y $\gamma_i = \gamma_{v_{i-1} \cap v_i v_i \cap v_{i+1}}$ y como antes $\gamma_1 = \gamma_{v_1 v_1 \cap v_2}$ y $\gamma_k = \gamma_{v_{k-1} \cap v_k v_k}$.

   Sea σ_i un camino en V_i entre x'_{ii+1} y x_{ii+1} (existe pues V_i es arcoconexo.

   Tenemos entonces el siguiente esquema



- V_1 es trivial entonces $\gamma_1' * \sigma_1 \simeq \gamma_1$
- Para $i = 2, ..., k-1$, V_i es trivial entonces $\sigma_{i-1}^{-1} * \gamma_i' * \sigma_i \simeq \gamma_i$.
- V_k es trivial entonces $\sigma_k^{-1} * \gamma_k' \simeq \gamma_k$.

Concatenando los tres resultados anteriores y usando que $\sigma_i * \sigma_i^{-1} \simeq id$ se tiene que $\gamma' \simeq \gamma$.

Resta ver que es única:

Supongamos que cubrimos γ de dos maneras diferentes V_1, ... ,V_k y W_1, ..., W_j y sean $(v_1 ... v_k)$ y $(w_1, ..., w_j)$ los morfismos asociados en el paso anterior. Quiero ver que $\overline{(v_1 ... v_k)} = \overline{(w_1 ... w_j)}$.

Para esto basta ver que ambas clases coinciden con la clase asociada al cubrimiento que se obtiene de pegar todos los abiertos V_i y W_l.

Sean $t_{V_i} \in [0, 1]$ como antes.

Ordeno los abiertos V_1, ... ,V_k, W_1, ..., W_j de acuerdo al orden de los t_U.

Quiero ver entonces que $\overline{(v_1 ... v_k)} = \overline{(v_1 w_1 v_2 v_3 ... w_j v_k)}$ (en algún orden).

Notar que $t_{V_1} = t_{W_1} = 0$ y supongamos primero que $t_{V_k} \geqslant t_{W_j}$. Con lo cuál quiero ver que se pueden tachar todos los W_i's que se encuentran todos "en el medio".

Para esto basta ver que si tengo $(v_i w_l w_{l+1})$ o $(v_i w_l v_{1+1})$ entonces hay intersecciones triples y puedo tachar el del medio.

- Analizamos primero el caso $(v_i w_l w_{l+1})$
  Por como ordenamos los abiertos se tiene que $t_{V_i} \leq t_{W_l} \leq t_{W_{l+1}} \leq t_{V_{i+1}}$.

Entonces $V_i \cap W_l \cap W_{l+1} \neq \emptyset$ ya que los 3 cubren la curva $\gamma' \mid_{(t_{W_{l+1}}, t_{W_{l+1}}+\varepsilon)}$ (curva γ' restringida al intervalo $(t_{W_{l+1}}, t_{W_{l+1}}+\varepsilon)$) para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente chico.
$\therefore \overline{(v_i w_l w_{l+1})} = \overline{(v_i w_{l+1})}$.

- Analizamos $(v_i w_l v_{i+1})$
  Por como ordenamos los abiertos se tiene que $t_{V_i} \leq t_{W_l} \leq t_{V_{i+1}} \leq t_{W_{l+1}}$.
  Entonces $V_i \cap W_l \cap V_{i+1} \neq \emptyset$ ya que los 3 cubren la curva $\gamma' \mid_{(t_{V_{i+1}}, t_{V_{i+1}}+\varepsilon)}$ para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente chico.
  $\therefore \overline{(v_i w_l v_{i+1})} = \overline{(v_i v_{i+1})}$.

Resta ver que pasa si $t_{V_k} < t_{W_j}$

En este caso primero como $W_{j-1} \cap V_k \cap W_j \neq \emptyset$ entonces tacho w_j y luego continuo como en el caso anterior.

□

5.3. Caso metrizable

Anteriormente mencionamos que a pesar de lo afirmado en [5] no coincidirían en el caso localmente conexo general las definiciones de revestimiento (ver [7]) y de aplicación recubridora.

Motivados por esta laguna, hemos investigado en que otros contextos esto puede ser cierto y hemos encontrado en [3] que si además de ser localmente conexo el espacio topológico es metrizable entonces estas definiciones coinciden.

Teorema 5.29. *Sea B espacio localmente conexo y metrizable entonces $p : X \to B$ es aplicación recubridora $\Leftrightarrow p : X \to B$ es revestimiento.*

Demostración.
($\Rightarrow$) es trivial.

($\Leftarrow$) ver teoremas 3 y 5 en [3] teniendo en cuenta que nuestra definición de aplicación recubridora coincide con la definición de overlay (ver pág. 75 de [3]). □

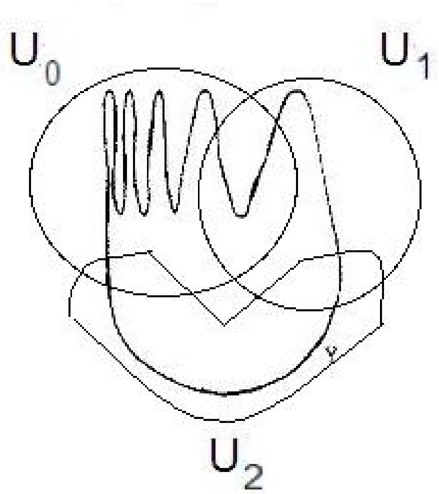
Observación 5.30. *En los teoremas mencionados anteriormente también se demuestra que ambas definiciones coinciden para el caso metrizable y tal que la fibra de p sea finita.*

5.4. Un ejemplo

En esta sección calcularemos el $\widetilde{\pi_1}(B)$ del círculo de Varsovia, lo llamamos Y (ver [7] capítulo 10, sección 61, ejercicio 2). Este espacio si bien es arco conexo, no es localmente arco conexo, es decir que no van a coincidir nuestro $\widehat{\Pi_1}$ con el Π_1 de Poincaré.

Justamente uno de los "problemas" que presenta el Π_1 de Poincaré es que el $\Pi(Y) = 0$, lo cuál se contrapone con la intuición y con el hecho de que este espacio tiene un "agujero".

Hallemos $\mathcal{G}_\mathcal{U}$ para $\mathcal{U}$ el siguiente cubrimiento por abiertos de Y.



Claramente $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ es un cubrimiento por abiertos de Y.

Entonces $Obj(\mathcal{G}_\mathcal{U}) = \{0, 1, 2\}$.

Como se tienen todas las intersecciones de a dos

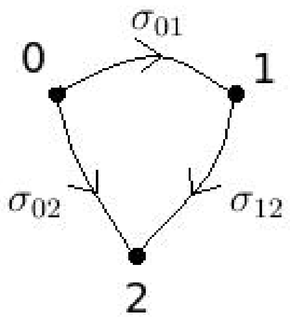
$\mathcal{N}_1 = \{(0,1); (1,2); (0,2); (0,1); (2,1); (2,0); (0,0); (1,1); (2,2)\}$ con lo cuál se tienen los morfismos identidades $id_i = (ii)$ con $i = 0, 1, 2$ y $\sigma_{01} = (01)$; $\sigma_{02} = (02)$; $\sigma_{12} = (12)$ y sus inversas.

Además mirando $\mathcal{N}_2$ se tienen las siguientes relaciones:

$(01) * (12) = (0112) = (012)$, llamamos $\sigma_{012} = (012)$ con su respectiva inversa.

Por último como $(0, 1, 2) \notin \mathcal{N}_2$ tenemos que $\sigma_{012} \neq \sigma_{02}$, lo mismo vale para su inversa.

Podemos pensar a toda esta información con el siguiente esquema:



Y pensamos al triangulito vacío ya que $\sigma_{01} * \sigma_{12} \neq \sigma_{02}$.

Veamos que $\mathcal{G}_{\mathcal{U}} \approx \mathbb{Z}$:

Notar que estamos mirando a $\mathbb{Z}$ como grupoide, es decir $Obj(\mathbb{Z}) = \{*\}$ y $Fl(\mathbb{Z}) = \{z \in \mathbb{Z}\}$ (cantidad de vueltas para un lado o para el otro).

Definimos $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{G}_{\mathcal{U}}$ como

- $\psi(*) = 0$
- $\psi(z) = ((01) * (12) * (20))^z = (0120)^z =$ (dar z vueltas) donde sabemos que $(0120)^0 = id_0$ y $\sigma_{012}^{-1} = \sigma_{210}$ (dar las vueltas en el otro sentido).

Veamos que ψ es una equivalencia:

- ψ es plenamente fiel

  Quiero ver que para toda $\sigma : 0 \to 0$ $\exists!$ $z \in Fl(\mathbb{Z})$ tal que $\psi(z) = \sigma$.

  Pero justamente una flecha $\sigma : 0 \to 0$ es dar una cierta cantidad z de vueltas, entonces $\psi(z) = \sigma$.

- ψ es esencialmente suryectivo

  Como $\mathbb{G}_{\mathcal{U}}$ es un grupoide se tiene que todos los elementos son isomorfos, y se cumple trivialmente.

$\therefore \mathcal{G}_{\mathcal{U}} \approx \mathbb{Z}$.

Observar que esta misma demostración muestra que $\mathcal{G}_{\mathcal{U}} \approx \mathbb{Z}$ para la circunferencia usual S^1.

Ahora tendríamos que hacer esta construcción para todo $\mathcal{U}$ cubrimiento por abiertos de Y.

Para esto basta observar que si tengo n abiertos, pero todos sólo se intersecan dos a dos, me queda un polígono de n lados (en este caso como eran 3 abiertos me quedó el triángulo anterior), donde no se tienen relaciones (salvo las inversas) y es una demostración totalmente análoga (mirando la cantidad de vueltas) que $\mathcal{G}_{\mathcal{U}} \approx \mathbb{Z}$.

Si los abiertos se intersecan de a tres, "tachando las relaciones" vuelvo al caso anterior, debido a que no hay abiertos distinguidos.

Con lo cuál $\widehat{\Pi_1}(Y) \approx \mathbb{Z}$ como queríamos ver. Esta equivalencia es compatible con la intuición y con el hecho de que Y tiene "un agujero" $\blacksquare$.

Hemos visto entonces que el teorema de clasificación 5.16, enunciado en la sección 5.1, generaliza el teorema de clasificación clásico 5.28 cuando el espacio tiene buenas condiciones locales. Más aún, la definición dada para poder hacer dicha generalización coincide con la usual de revestimiento en el caso de que el espacio topológico sea además metrizable.

Lo que nos preguntamos a partir de lo que ha surgido en este trabajo, es si no podremos dar otra definición que nos permita generalizar el teorema clásico de clasificación de revestimientos 5.28 pero que además esta coincida con la definición usual de revestimiento en el caso de un espacio localmente conexo arbitrario.

Teniendo en cuenta lo observado en 2.6 creemos que una posible solución a este problema puede obtenerse vía el concepto de hipercubrimiento de Artin-Mazur (ver [1]), pero esto será desarrollado en otro trabajo.

Referencias

[1] M.Artin and B.Mazur, *Étale Homotopy*, Lectures Notes in Math. 100, Springer, Berlin, 1970

[2] E. J. Dubuc, *Covering Projections via descent Theory*, SECA III, Santiago de Compostela, 2005 (abstract in Google SECA III).

[3] R.H.Fox, *Shape theory and covering spaces*, Lectures Notes in Math. 375, Springer, 1974, 71-90.

[4] A.Grothendiek, *Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA1)*, Lectures Notes in Math. 222, Springer, Berlín 1971.

[5] L.J Hernández-Paricio, *Fundamental pro-groupoids and covering projections*, Fund. Math., 156 (1998), 1-31.

[6] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, segunda edición, Springer-Verlag,New York 1971.

[7] J.Munkres, *Topología*, segunda edición, Prentice Hall, Madrid 2002.