

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Tesis de Licenciatura

# **Categorías de modelos y localización**

Enzo Miguel Ottina  
Director: Gabriel Minian

Marzo de 2005

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1. Pullbacks y pushouts . . . . .	4
1.2. Grupos y cogrupos en categorías punteadas . . . . .	7
1.3. Acciones . . . . .	14
1.4. Categorías sobre y bajo objetos, esquemas y retracts . . . . .	16
1.5. Fibraciones, equivalencias homotópicas débiles y complejos celulares . . . . .	23
<b>2. Localización</b>	<b>29</b>
2.1. Categorías de fracciones . . . . .	29
2.2. El cálculo de fracciones . . . . .	38
<b>3. Categorías de modelos</b>	<b>48</b>
3.1. Los axiomas . . . . .	49
3.2. Los funtores loop y suspensión . . . . .	66
3.3. Sucesiones de la fibra y la cofibra . . . . .	76
3.4. Equivalencia de teorías de homotopía . . . . .	92
3.5. Categorías de modelos cerradas . . . . .	97
3.6. Funtores de Quillen . . . . .	104
<b>4. <i>Top</i> como categoría de modelos cerrada</b>	<b>110</b>
4.1. El argumento del objeto pequeño . . . . .	111
4.2. Los espacios topológicos como categoría de modelos cerrada . . . . .	119

# Introducción

A fines de los años 40 y comienzos de los 50, J.H.C. Whitehead introdujo los hoy llamados CW-complejos y demostró algunos de los resultados más importantes de la teoría de homotopía, entre ellos los teoremas de aproximación celular. Whitehead probó también que una equivalencia débil entre CW-complejos (es decir una función continua entre CW-complejos que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía) es una equivalencia homotópica ([18]). En lenguaje moderno, estos resultados se interpretan diciendo que la categoría homotópica de los espacios topológicos (es decir, la categoría que se obtiene invirtiendo las equivalencias débiles) es equivalente a la subcategoría plena de los CW-complejos cocientada por la relación de homotopía.

Este hecho es un ejemplo particular de localización en categorías, que intenta, en cierta forma, generalizar la de anillos. Dada una categoría  $\mathcal{C}$  y una subclase de morfismos  $\Sigma$  de  $\mathcal{C}$ , se busca construir la localización de  $\mathcal{C}$  por  $\Sigma$ , es decir, una categoría que invierta los morfismos de  $\Sigma$  y sea universal con esta propiedad.

Los teoremas de Whitehead sirvieron como motivación a Gabriel y Zisman, quienes, a mediados de la década del '60, introdujeron el cálculo de fracciones para resolver el problema de la localización [3]. Ellos probaron que bajo ciertas hipótesis sobre la subclase  $\Sigma$  (específicamente, que admita cálculo de fracciones, ver pág. 39), la localización  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  (llamada categoría de fracciones) puede ser fácilmente caracterizada.

Un par de años después, inspirado por estos resultados de Whitehead y de Gabriel-Zisman y por algunos resultados de D.Kan ([6]) y Verdier ([16]), Quillen introduce las categorías de modelos ([10]). Una categoría de modelos es una categoría  $\mathcal{C}$  que tiene tres clases distinguidas de morfismos, llamados fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles y que cumplen ciertos axiomas (3.1.1). En una categoría de modelos se puede desarrollar por completo una teoría de homotopía, de la misma forma que sucede en los casos clásicos de espacios topológicos y de los conjuntos simpliciales. Como ventaja adicional, queda caracterizada en forma fácil y contundente la localización de la categoría  $\mathcal{C}$  respecto de la clase de equivalencias débiles: la localización de  $\mathcal{C}$  se denomina la categoría homotópica de  $\mathcal{C}$  y uno de los resultados principales de esta teoría afirma que esta categoría es equivalente a la subcategoría plena de  $\mathcal{C}$  formada por los objetos fibrantes y cofibrantes, cocientada por la relación de homotopía (3.1.32).

Varios matemáticos, entre ellos el mismo Quillen ([11]) han ido modificando la noción de categoría de modelos. En la actualidad, generalmente se entiende por categoría de modelos a una categoría de modelos cerrada (en el lenguaje original de Quillen) con algunos axiomas reforzados (ver 3.1.2). A partir de la teoría de Quillen, han surgido otras teorías homotópicas que se utilizan para modelar ciertos fenómenos no abarcados por las

categorías de modelos. Nombramos entre ellos a las categorías de cofibraciones de Baues ([1]) y a las Lambda-categorías de Minian ([8]).

Esta tesis consiste en un estudio detallado de las categorías de modelos y la localización y tiene tres objetivos principales.

El primer objetivo es exponer en forma clara y detallada las ideas y resultados de los trabajos de Gabriel-Zisman y de Quillen. En el caso de las categorías de modelos, hemos elegido seguir la formulación original de Quillen en lugar de las formulaciones equivalentes o alternativas aparecidas posteriormente. Varias demostraciones que aquí se exponen amplían las demostraciones originales o surgen como alternativas a ellas.

El segundo gran objetivo de esta tesis es comparar la teoría de Quillen con la teoría de homotopía clásica de espacios topológicos. Mostraremos las semejanzas y diferencias entre ambas teorías a lo largo de toda la exposición, comparando resultados, ideas y demostraciones. Este análisis no se encuentra, a nuestro entender, en la bibliografía conocida del tema.

El tercer objetivo es probar algunos resultados que, aunque son conocidos y son utilizados habitualmente, no aparece explicitada su demostración en la bibliografía (entre ellos, 1.5.6).

La tesis esta dividida de la siguiente forma. En el primer capítulo estudiamos los preliminares necesarios, introducimos la notación a usar y probamos algunos resultados que utilizaremos, cuya demostración no se encuentra detallada en la bibliografía habitual. En el segundo capítulo estudiamos las categorías de fracciones y damos algunos ejemplos y aplicaciones al estudio de espacios Hausdorff y espacios de Kelley. En los capítulos 3 y 4 desarrollamos la teoría de Quillen y la comparamos exhaustivamente con la teoría de homotopía clásica. También estudiaremos los llamados ‘funtores de Quillen’ que se utilizan para comparar distintas categorías de modelos (y por ende, distintas teorías homotópicas).

Quiero agradecer a Gabriel Minian por haber dirigido esta tesis de licenciatura.

*Enzo Miguel Ottina.*

# Capítulo 1

## Preliminares

Las primeras dos secciones de este capítulo son meramente introductorias. En ellas introducimos las notaciones que utilizamos a lo largo de esta tesis y recordamos algunos resultados básicos de categorías.

En la sección 1.3 introducimos algunos resultados sobre acciones en categorías. Estos resultados no presumen de tener gran originalidad, pero no los hemos encontrado en la literatura y por ello decidimos detallarlos aquí.

En la sección 1.4 definimos los esquemas y trabajamos con categorías sobre y bajo objetos. Probamos algunos resultados sobre límites en estas categorías. También probamos algunos resultados sobre retracts que serán de gran utilidad en el capítulo 3.

En la última sección de este capítulo trabajamos con fibraciones, equivalencias homotópicas débiles y CW-complejos. Probamos en esta sección un resultado (1.5.6) que es bastante conocido, pero cuya demostración no se encuentra explícita en la literatura.

### 1.1. Pullbacks y pushouts

Comenzaremos con un poco de notación y con algunas propiedades básicas de pullbacks y pushouts.

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. El pullback del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow \gamma & \\ X & \xrightarrow{\delta} & Y \end{array}$$

es un objeto de  $\mathcal{C}$ , que notaremos  $B \times_Y X$ , junto con morfismos  $\text{pr}_1 : B \times_Y X \rightarrow B$  y  $\text{pr}_2 : B \times_Y X \rightarrow Y$  con la siguiente propiedad universal. Dado un objeto  $A$  y morfismos  $\alpha : A \rightarrow B$  y  $\beta : A \rightarrow Y$  tales que  $\gamma\alpha = \delta\beta$  existe un único morfismo de  $A$  en  $B \times_Y X$  que notaremos  $(\alpha, \beta)_Y$ , o simplemente  $(\alpha, \beta)$ , tal que  $\text{pr}_1(\alpha, \beta) = \alpha$  y  $\text{pr}_2(\alpha, \beta) = \beta$ .

El pushout del diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \beta \downarrow & & \\ & & X \end{array}$$

es un objeto que notaremos  $B \vee_A X$  y morfismos  $\text{in}_1 : B \rightarrow B \vee_A X$  y  $\text{in}_2 : X \rightarrow B \vee_A X$  con la siguiente propiedad universal. Dado un objeto  $Y$  y morfismos  $\gamma : B \rightarrow Y$  y  $\delta : X \rightarrow Y$  tales que  $\gamma\alpha = \delta\beta$  existe un único morfismo de  $B \vee_A X$  en  $Y$  que notaremos  $\gamma +_A \delta$ , o simplemente  $\gamma + \delta$ , tal que  $(\gamma + \delta)\text{in}_1 = \gamma$  y  $(\gamma + \delta)\text{in}_2 = \delta$ .

Finalmente, dado un morfismo  $f : X \rightarrow Y$ , llamaremos morfismo diagonal de  $f$  al morfismo  $\Delta_f = (id_X, id_X) : X \rightarrow X \times_Y X$ . Si la categoría tiene objeto final  $e$  escribiremos  $\Delta_X$  si  $Y = e$ . Además, llamaremos morfismo codiagonal de  $f$  al morfismo  $\nabla_f = id_Y + id_Y : Y \vee_X Y \rightarrow Y$ . Si la categoría tiene objeto inicial  $\emptyset$  notaremos  $\nabla_Y$  si  $X = \emptyset$ .

*Observación 1.1.1.* Con las notaciones de antes sean  $\alpha : A \rightarrow B$ ,  $\beta : A \rightarrow X$ ,  $\gamma : B \rightarrow Y$  y  $\delta : X \rightarrow Y$  morfismos tales que  $\gamma\alpha = \delta\beta$  y sean  $\phi : C \rightarrow A$ ,  $\psi : Y \rightarrow Z$ . Entonces:

1.  $(\alpha\phi, \beta\phi) = (\alpha, \beta)\phi$
2.  $\psi(\gamma + \delta) = \psi\gamma + \psi\delta$

En el caso en que  $\mathcal{C}$  tenga objeto final  $e$ , notaremos  $A \times B$  al pullback (producto)

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\text{pr}_1} & A \\ \text{pr}_2 \downarrow & \text{pull} & \downarrow \\ B & \longrightarrow & e \end{array}$$

Si  $\mathcal{C}$  tiene objeto inicial  $\emptyset$ , notaremos  $A \vee B$  al pushout (coproducto)

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_1 \\ B & \longrightarrow & A \vee B \end{array}$$

Supongamos que  $\mathcal{C}$  admite productos finitos. Sean  $f : C \rightarrow A$  y  $g : D \rightarrow B$  y sean  $\text{pr}_1 : A \times B \rightarrow A$ ,  $\text{pr}_2 : A \times B \rightarrow B$ ,  $\text{pr}_3 : C \times D \rightarrow C$  y  $\text{pr}_4 : C \times D \rightarrow D$ . Notaremos  $f \times g$  al morfismo  $(f \circ \text{pr}_3, g \circ \text{pr}_4) : C \times D \rightarrow A \times B$ , es decir, al morfismo que ‘aplica  $f$  en la primer coordenada y  $g$  en la segunda’.

Supongamos ahora que  $\mathcal{C}$  admite coproductos finitos. Sean  $f$  y  $g$  como antes e  $\text{in}_1 : A \rightarrow A \vee B$ ,  $\text{in}_2 : B \rightarrow A \vee B$ ,  $\text{in}_3 : C \rightarrow C \vee D$ ,  $\text{in}_4 : D \rightarrow C \vee D$ . Notaremos  $f \vee g$  al morfismo  $\text{in}_1 \circ f + \text{in}_2 \circ g : C \vee D \rightarrow A \vee B$ , es decir, al morfismo que ‘aplica  $f$  sobre  $C$  y  $g$  sobre  $D$ ’.

Veamos otra propiedad de los pullbacks, que es la asociatividad, es decir

$$(A \times_D B) \times_E C \simeq A \times_D (B \times_E C)$$

**Proposición 1.1.2.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría,  $\alpha : A \rightarrow D$ ,  $\beta : B \rightarrow D$ ,  $\delta : B \rightarrow E$ ,  $\gamma : C \rightarrow E$  morfismos de  $\mathcal{C}$ . Consideremos los diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
A \times_D B & \xrightarrow{\text{pr}_4} & A \\
\text{pr}_5 \downarrow & \text{pull} & \downarrow \alpha \\
B & \xrightarrow{\beta} & D
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(A \times_D B) \times_E C & \xrightarrow{\text{pr}_6} & A \times_D B \\
\text{pr}_7 \downarrow & \text{pull} & \downarrow \delta \text{pr}_5 \\
C & \xrightarrow{\gamma} & E
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
B \times_E C & \xrightarrow{\text{pr}_8} & B \\
\text{pr}_9 \downarrow & \text{pull} & \downarrow \delta \\
C & \xrightarrow{\gamma} & E
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A \times_D (B \times_E C) & \xrightarrow{\text{pr}_{10}} & A \\
\text{pr}_{11} \downarrow & \text{pull} & \downarrow \alpha \\
B \times_E C & \xrightarrow{\beta \text{pr}_8} & D
\end{array}$$

Entonces,  $(A \times_D B) \times_E C \simeq A \times_D (B \times_E C)$ . Además, el límite del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha} & D \\
& \nearrow \beta & \\
B & \xrightarrow{\delta} & E \\
& \nearrow \gamma & \\
C & & 
\end{array}$$

es  $(A \times_D B) \times_E C$ .

*Demostración.* Veamos que  $(A \times_D B) \times_E C$  junto con

$$\text{pr}_4 \text{pr}_6 : (A \times_D B) \times_E C \longrightarrow A$$

$$\text{pr}_5 \text{pr}_6 : (A \times_D B) \times_E C \longrightarrow B$$

$$\text{pr}_7 : (A \times_D B) \times_E C \longrightarrow C$$

es el límite del diagrama anterior.

Tenemos  $\alpha \text{pr}_4 \text{pr}_6 = \beta \text{pr}_5 \text{pr}_6$  y  $\delta \text{pr}_5 \text{pr}_6 = \gamma \text{pr}_7$ .

Supongamos que tenemos morfismos  $f_1 : F \rightarrow A$ ,  $f_2 : F \rightarrow B$  y  $f_3 : F \rightarrow C$  tales que  $\alpha f_1 = \beta f_2$  y  $\delta f_2 = \gamma f_3$ .

$$\begin{array}{ccccc}
& & & A & \xrightarrow{\alpha} & D \\
& & & \nearrow \beta & & \\
& & & B & \xrightarrow{\delta} & E \\
& & & \nearrow \gamma & & \\
& & & C & & \\
& \nearrow f_1 & & \nearrow \text{pr}_4 \text{pr}_6 & & \\
F & \xrightarrow{\phi} & (A \times_D B) \times_E C & \xrightarrow{\text{pr}_5 \text{pr}_6} & B & \xrightarrow{\delta} & E \\
& \nearrow f_2 & & \nearrow \text{pr}_7 & & \nearrow \gamma & \\
& \nearrow f_3 & & C & & & 
\end{array}$$

Buscamos la flecha punteada  $\phi$  que haga conmutativo el diagrama anterior. Como  $\alpha f_1 = \beta f_2$ , existe un único morfismo

$$(f_1, f_2) : F \longrightarrow (A \times_D B)$$

tal que  $\text{pr}_4(f_1, f_2) = f_1$  y  $\text{pr}_5(f_1, f_2) = f_2$ . Ahora bien, como  $\delta \text{pr}_5(f_1, f_2) = \delta f_2 = \gamma f_3$ , existe un único morfismo  $((f_1, f_2), f_3)$  tal que  $\text{pr}_6((f_1, f_2), f_3) = (f_1, f_2)$  y  $\text{pr}_7((f_1, f_2), f_3) = f_3$ . Tomamos  $\phi = ((f_1, f_2), f_3)$ . Es claro que  $\text{pr}_4 \text{pr}_6 \phi = f_1$ ,  $\text{pr}_5 \text{pr}_6 \phi = f_2$  y  $\text{pr}_7 \phi = f_3$ .

Además, la unicidad de  $\phi$  se deduce de las unicidades de  $(f_1, f_2)$  y  $((f_1, f_2), f_3)$ , puesto que si  $\phi'$  es otra flecha que hace conmutativo el diagrama anterior, entonces como  $\text{pr}_4(\text{pr}_6 \phi') = f_1$ ,  $\text{pr}_5(\text{pr}_6 \phi') = f_2$  se obtiene que  $\text{pr}_6 \phi' = (f_1, f_2)$  y como  $\text{pr}_7 \phi' = f_3$  queda que  $\phi' = ((f_1, f_2), f_3) = \phi$ . Así tenemos la última parte de la proposición.

De forma análoga se prueba que  $A \times_D (B \times_E C)$  (junto con los morfismos correspondientes) también es límite del último diagrama del enunciado de la proposición. Por lo tanto se tiene

$$(A \times_D B) \times_E C \simeq A \times_D (B \times_E C)$$

□

Si  $L$  es el límite del último diagrama de la proposición anterior, llamaremos  $\text{pr}_1 : L \rightarrow A$ ,  $\text{pr}_2 : L \rightarrow B$ ,  $\text{pr}_3 : L \rightarrow C$  a los morfismos que vienen dados por la existencia del límite  $L$ . Si tenemos morfismos  $f : X \rightarrow A$ ,  $g : X \rightarrow B$ ,  $h : X \rightarrow C$ , tales que  $\alpha f = \beta g$  y  $\delta g = \gamma h$ , notaremos por  $(f, g, h) : X \rightarrow L$  al único morfismo tal que  $\text{pr}_1(f, g, h) = f$ ,  $\text{pr}_2(f, g, h) = g$  y  $\text{pr}_3(f, g, h) = h$ . De lo visto en la proposición anterior se deduce que  $(f, g, h) = ((f, g), h) = (f, (g, h))$

## 1.2. Grupos y cogrupos en categorías punteadas

**Definición 1.2.1.** Una categoría punteada es una categoría  $\mathcal{C}$  que tiene un objeto que es objeto inicial y final de  $\mathcal{C}$  a la vez, al que notaremos  $*$  y llamaremos objeto cero o nulo.

**Ejemplo 1.2.2.**

1. Sea  $\text{Set}^*$  la categoría cuyos objetos son los conjuntos con punto base y cuyos morfismos son las funciones entre conjuntos que respetan puntos base.  $\text{Set}^*$  es una categoría punteada: ‘el’ singleton es, a la vez, objeto inicial y final de  $\text{Set}^*$ .
2. Sea  $\text{Top}^*$  la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos con punto base y cuyos morfismos son las funciones continuas que respetan puntos base.  $\text{Top}^*$  es una categoría punteada: ‘el’ singleton es, a la vez, objeto inicial y final de  $\text{Top}^*$ .
3. Sea  $[\text{Top}^*]$  la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos con punto base y cuyos morfismos son las clases homotópicas de funciones continuas que respetan puntos base, donde las homotopías son relativas al punto base.  $[\text{Top}^*]$  es una categoría punteada: cualquier espacio topológico contráctil es, a la vez, objeto inicial y final de  $[\text{Top}^*]$ .



*Notación 1.2.3.* Si  $\mathcal{C}$  es una categoría punteada notaremos por  $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  a la composición  $X \rightarrow * \rightarrow Y$ .

**Definición 1.2.4.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría punteada con productos finitos. Un grupo (u objeto grupo) en  $\mathcal{C}$  es un objeto  $G$  junto con un morfismo  $\mu : G \times G \rightarrow G$  (que llamaremos multiplicación) tal que:

i)  $0 : G \rightarrow G$  es el neutro para  $\mu$ , es decir, las composiciones

$$G \xrightarrow{(0, \text{Id}_G)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

y

$$G \xrightarrow{(\text{Id}_G, 0)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

son la identidad de  $G$ .

ii)  $\mu$  es asociativa, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times \text{Id}_G} & G \times G \\ \text{Id}_G \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

conmuta.

iii) Existe una inversa, es decir, un morfismo  $\phi : G \rightarrow G$  tal que ambas composiciones

$$G \xrightarrow{(\text{Id}_G, \phi)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

y

$$G \xrightarrow{(\phi, \text{Id}_G)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

son el morfismo  $0 : G \rightarrow G$ .

Decimos que  $G$  es grupo abeliano si  $\mu$  es conmutativa, es decir, si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{(\text{pr}_2, \text{pr}_1)} & G \times G \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & G & \end{array}$$

conmuta.

### Ejemplos 1.2.5.

1. Los grupos en  $\mathcal{S}et^*$  son los grupos ‘tradicionales’.
2. Los grupos en  $\mathcal{T}op^*$  son los grupos topológicos.

3. Los grupos en  $[Top^*]$  son los H-grupos (ver [12], pág. 35).

Un ejemplo conocido de H-grupo es el espacio de lazos  $\Omega X$  de un espacio topológico punteado  $X$ . Si llamamos  $x_0$  al punto base de  $X$ , tenemos que

$$\Omega X = \{\gamma : I \rightarrow X \text{ continuas tales que } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$

con la topología compacto-abierta y con punto base el camino constante  $x_0$ . La multiplicación  $\mu : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$  se define por

$$\mu(\gamma, \gamma')(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y la inversa  $\phi : \Omega X \rightarrow \Omega X$  por

$$\phi(\gamma)(t) = \gamma(1 - t)$$

**Definición 1.2.6.** Sean  $G$  y  $H$  grupos en una categoría punteada  $\mathcal{C}$ , con multiplicaciones  $\mu$  y  $\mu'$  respectivamente. Un morfismo de grupos de  $G$  a  $H$  es un morfismo  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, H)$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \alpha \times \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ H \times H & \xrightarrow{\mu'} & H \end{array}$$

conmuta.

**Teorema 1.2.7.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría punteada y sea  $G$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $G$  es un grupo (resp. grupo abeliano) de  $\mathcal{C}$  si y sólo si el funtor contravariante  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  factoriza a través de la categoría de grupos (resp. grupos abelianos). Es decir,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  es un grupo (resp. grupo abeliano) para todo objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  y  $\alpha^*$  es morfismo de grupos para todo morfismo  $\alpha$  de  $\mathcal{C}$ .

*Demostración.* Sea  $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , veamos que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  tiene estructura de grupo. Sean  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$ , definimos  $f.g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  por la composición

$$A \xrightarrow{(f,g)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

Veamos que con este producto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  es grupo.

$$f.0 = \mu \circ (f, 0) = \mu \circ (\text{Id}_G, 0) \circ f = \text{Id}_G \circ f = f$$

Análogamente  $0.f = f$ . Así,  $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  es el elemento neutro.

Veamos asociatividad:

$$\begin{aligned} (f.g).h &= \mu \circ (\mu \circ (f, g), h) = \mu \circ (\mu \times \text{Id}_G) \circ ((f, g), h) = \mu \circ (\text{Id}_G \times \mu) \circ (f, (g, h)) = \\ &= \mu \circ (f, \mu \circ (g, h)) = f.(g.h) \end{aligned}$$

Veamos la existencia de inverso. Sea  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$ . Afirmamos que  $\phi f$  es el inverso de  $f$ . En efecto,

$$f.(\phi f) = \mu \circ (f, \phi f) = \mu \circ (\text{Id}_G, \phi) \circ f = 0.f = 0$$

Análogamente,  $(\phi f).f = 0$ .

Si además  $G$  es grupo abeliano,

$$f.g = \mu \circ (f, g) = \mu \circ (\text{pr}_1, \text{pr}_2) \circ (f, g) = \mu \circ (\text{pr}_1 \circ (f, g), \text{pr}_2 \circ (f, g)) = \mu \circ (g, f) = g.f$$

es decir,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  es abeliano.

Resta ver que si  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , entonces  $\alpha^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  es morfismo de grupos.

$$\alpha^*(0) = 0 \circ \alpha = 0$$

$$\alpha^*(f.g) = \alpha^*(\mu \circ (f, g)) = \mu \circ (f, g) \circ \alpha = \mu \circ (f\alpha, g\alpha) = \mu \circ (\alpha^*(f), \alpha^*(g)) = \alpha^*(f).\alpha^*(g)$$

Recíprocamente, sea  $\mu = \text{pr}_1.\text{pr}_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G \times G, G)$ , donde  $.$  es la multiplicación en el grupo  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G \times G, G)$ . Supongamos  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \mu \circ (f, g) &= (f, g)^*(\mu) = (f, g)^*(\text{pr}_1.\text{pr}_2) = (f, g)^*(\text{pr}_1).(f, g)^*(\text{pr}_2) = \text{pr}_1(f, g).\text{pr}_2(f, g) = \\ &= f.g \end{aligned}$$

Luego  $\mu \circ (\text{Id}_G, 0) = \text{Id}_G.0 = \text{Id}_G$  y  $\mu \circ (0, \text{Id}_G) = 0.\text{Id}_G = \text{Id}_G$ .

Llamemos  $q_1, q_2, q_3 : G \times G \times G \rightarrow G$  a las proyecciones. Se tiene:

$$\mu \circ (\mu \times \text{Id}_G) = \mu \circ (\mu \circ (q_1, q_2), q_3) = (q_1.q_2).q_3 = q_1.(q_2.q_3) = \mu \circ (q_1, \mu \circ (q_2, q_3)) = \mu \circ (\text{Id}_G \times \mu)$$

Sea  $\phi : G \rightarrow G$  la inversa de  $\text{Id}_G$  en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G)$  (como grupo).

Luego,  $\mu \circ (\text{Id}_G, \phi) = \text{Id}_G.\phi = 0$  y  $\mu \circ (\phi, \text{Id}_G) = \phi.\text{Id}_G = 0$ .

Además, si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G)$  tiene imagen en la categoría de grupos abelianos, entonces

$$\mu \circ (\text{pr}_2, \text{pr}_1) = \text{pr}_2.\text{pr}_1 = \text{pr}_1.\text{pr}_2 = \mu$$

□

*Observación 1.2.8.* Notar que si tenemos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G)$  funtor a la categoría de grupos y definimos  $\mu$  como en la recíproca del teorema anterior, la estructura de grupo en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$ , dada por  $\mu$  como en la primera parte de dicho teorema, coincide con la que ya tenía.

**Teorema 1.2.9.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría punteada,  $G$  y  $G'$  grupos en  $\mathcal{C}$  con multiplicaciones  $\mu$  y  $\mu'$  y  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G')$  un morfismo. Entonces  $\alpha$  es un morfismo de grupos si y sólo si  $\alpha_*$  es una transformación natural de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G)$  a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G')$  vistos como funtores a la categoría de grupos.*

*Demostración.* Supongamos  $f : A \rightarrow B$  es un morfismo de  $\mathcal{C}$ . Tenemos

$$(\alpha_*)_A : F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G) \rightarrow F' = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G')$$

Veamos que es un morfismo de grupos. Sean  $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$ .

$$\alpha_*(g.h) = \alpha_*(\mu \circ (g, h)) = \alpha \circ \mu \circ (g, h) = \mu' \circ (\alpha \times \alpha) \circ (g, h) = \mu' \circ (\alpha g, \alpha h) = \alpha_*(g).\alpha_*(h)$$

Además, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, G) \\ (\alpha_*)_A \downarrow & & \downarrow (\alpha_*)_B \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G') & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, G') \end{array}$$

conmuta, pues  $(\alpha_*)_B(f^*)(g) = (\alpha_*)_B(g \circ f) = \alpha \circ (g \circ f) = (\alpha \circ g) \circ f = f^*(\alpha_*)_A(g)$  Luego  $\alpha_*$  es una transformación natural de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, G)$  a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, G')$ .

Recíprocamente

$$\begin{aligned} \mu' \circ (\alpha \times \alpha) &= \mu' \circ (\alpha \text{pr}_1, \alpha \text{pr}_2) = \mu' \circ (\alpha_*(\text{pr}_1), \alpha_*(\text{pr}_2)) = \alpha_*(\text{pr}_1).\alpha_*(\text{pr}_2) = \\ &= \alpha_*(\text{pr}_1.\text{pr}_2) = \alpha_*(\mu) = \alpha \circ \mu \end{aligned}$$

□

Dualmente se define la noción de cogrupo:

**Definición 1.2.10.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría punteada con coproductos finitos. Un cogrupo (u objeto cogrupo) en  $\mathcal{C}$  es un objeto  $Q$  junto con un morfismo  $\nu : Q \rightarrow Q \vee Q$  (que llamaremos comultiplicación) tal que:

i)  $0 : Q \rightarrow Q$  es el neutro para  $\nu$ , es decir, las composiciones

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{0 + \text{Id}_Q} Q$$

y

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{\text{Id}_Q + 0} Q$$

son la identidad de  $Q$ .

ii)  $\nu$  es asociativa, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\nu} & Q \vee Q \\ \nu \downarrow & & \downarrow \text{Id}_Q \vee \nu \\ Q \vee Q & \xrightarrow{\nu \vee \text{Id}_Q} & Q \vee Q \vee Q \end{array}$$

conmuta.

iii) Existe una inversa, es decir, un morfismo  $\psi : Q \rightarrow Q$  tal que las composiciones

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{\text{Id}_Q + \psi} Q$$

y

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{\psi + \text{Id}_Q} Q$$

son el morfismo  $0 : Q \rightarrow Q$ .

Decimos que  $Q$  es cogrupo abeliano si  $\nu$  es (co)conmutativa, es decir si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ \nu \swarrow & & \searrow \nu \\ Q \vee Q & \xrightarrow{\text{in}_2 + \text{in}_1} & Q \vee Q \end{array}$$

conmuta.

**Ejemplo 1.2.11.** Los cogrupos en  $[Top^*]$  son los H-cogrupos (ver [12], pág. 39). Un ejemplo conocido es la suspensión  $\Sigma X$  de un espacio topológico punteado  $X$ . Sea  $x_0$  el punto base de  $X$ . La suspensión (reducida) de  $X$  es

$$IX / (X \times \{0, 1\} \cup x_0 \times I)$$

Notaremos  $[x, t]$  a la clase de  $(x, t)$  en el cociente  $\Sigma X$ .

La comultiplicación  $\nu : \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$  se define por

$$\nu([x, t]) = \begin{cases} ([x, 2t], x_0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x_0, [x, 2t - 1]) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde interpretamos  $\Sigma X \vee \Sigma X = (\Sigma X \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times \Sigma X)$ . La inversa  $\psi : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$  se define por

$$\psi([x, t]) = [x, 1 - t]$$

**Definición 1.2.12.** Sean  $Q$  y  $Q'$  cogrupos en una categoría punteada  $\mathcal{C}$ , con comultiplicaciones  $\nu$  y  $\nu'$  respectivamente. Un morfismo de cogrupos de  $Q$  a  $Q'$  es un morfismo  $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q')$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\nu} & Q \vee Q \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta \vee \beta \\ Q' & \xrightarrow{\nu'} & Q' \vee Q' \end{array}$$

conmuta.

*Observación 1.2.13.* Un cogrupo en  $\mathcal{C}$  es un grupo en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ . Más explícitamente, sea  $Q$  un cogrupo en  $\mathcal{C}$  con comultiplicación  $\nu : Q \rightarrow Q \vee Q$  y notemos por  $\text{op}$  al funtor contravariante  $\text{op} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$  dado por  $\text{op}(A) = A \forall A \in \text{Obj} \mathcal{C}$  y si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $\text{op}(f) = f^{\text{op}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, A)$ . Entonces  $Q$  con multiplicación  $\mu = \nu^{\text{op}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Q \times_{\mathcal{C}^{\text{op}}} Q, Q)$  es un grupo en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ . Esto se deduce trivialmente de aplicar el funtor  $\text{op}$  a i), ii) y iii) de la definición de cogrupo para obtener i), ii) y iii) de la definición de grupo para  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

Análogamente puede verse la recíproca: un grupo en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  es un cogrupo en  $\mathcal{C}$ .

Lo mismo vale para grupos y cogrupos abelianos.

Como corolario de esta observación se tienen los teoremas duales a 1.2.7 y 1.2.9 para cogrupos.

**Teorema 1.2.14.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría punteada y sea  $Q$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $Q$  es un cogrupo (resp. cogrupo abeliano) de  $\mathcal{C}$  si y sólo si el funtor covariante  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  factoriza a través de la categoría de grupos (resp. grupos abelianos).

*Observación 1.2.15.* De la misma forma que para grupos, si tenemos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, -)$  funtor a la categoría de grupos y definimos  $\nu$  como en la recíproca del teorema anterior, la estructura de grupo en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A)$  dada por  $\nu$  como en la primera parte de dicho teorema coincide con la que ya tenía.

**Teorema 1.2.16.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría punteada,  $Q, Q'$  cogrupos en  $\mathcal{C}$  y  $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q')$ . Entonces  $\beta$  es un morfismo de cogrupos si y sólo si  $\beta^*$  es una transformación natural de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q', -)$  a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, -)$  vistos como funtores a la categoría de grupos.*

Veamos ahora cómo se relacionan las estructuras de grupo en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, G)$  dadas por  $G$  grupo y  $Q$  cogrupo.

Usaremos el siguiente teorema de [12], pág. 43.

**Teorema 1.2.17.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría (no necesariamente punteada) y sean  $X, Y$  objetos de  $\mathcal{C}$  y  $*$ ,  $*'$  dos productos en  $\text{Hom}(X, Y)$  tales que:*

- a)  $*$  y  $*'$  tienen el mismo elemento neutro.
- b)  $*$  y  $*'$  son mutuamente distributivas, es decir,  

$$(f_1 * f_2) *' (g_1 * g_2) = (f_1 *' g_1) * (f_2 *' g_2)$$

Entonces,  $*$  y  $*'$  son iguales y ambas son conmutativas y asociativas.

Usando este resultado obtenemos el siguiente

**Corolario 1.2.18.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría punteada con productos y coproductos finitos y sean  $G$  un grupo y  $Q$  un cogrupo en  $\mathcal{C}$ . Entonces las estructuras de grupo en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, G)$  dadas por  $G$  y  $Q$  coinciden.*

*Demostración.* Sean  $\mu$  la multiplicación en  $G$  y  $\nu$  la comultiplicación en  $Q$  y sean  $*$  y  $*'$  los productos en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, G)$  dados por  $\mu$  y  $\nu$  respectivamente. Veamos que estamos en las hipótesis del teorema anterior. El ítem (a) es claro. Para ver (b), sean  $f_1, f_2, g_1, g_2$  en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, G)$ . Notemos primero que  $(f_1, f_2) + (g_1, g_2) = (f_1 + g_1, f_2 + g_2)$ . En efecto,

$$\text{pr}_j \circ ((f_1, f_2) + (g_1, g_2)) = \text{pr}_j(f_1, f_2) + \text{pr}_j(g_1, g_2) = f_j + g_j$$

para  $j = 1, 2$ .

Luego,

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2) *' (g_1 * g_2) &= (\mu \circ (f_1, f_2) + \mu \circ (g_1, g_2)) \circ \nu = \mu \circ ((f_1, f_2) + (g_1, g_2)) \circ \nu = \\ &= \mu \circ (f_1 + g_1, f_2 + g_2) \circ \nu = \mu \circ ((f_1 + g_1) \circ \nu, (f_2 + g_2) \circ \nu) = (f_1 *' g_1) * (f_2 *' g_2) \end{aligned}$$

□

### 1.3. Acciones

**Definición 1.3.1.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría punteada con productos finitos,  $G$  un grupo en  $\mathcal{C}$  con multiplicación  $\mu$  y  $X$  un objeto cualquiera de  $\mathcal{C}$ . Una acción a izquierda de  $G$  en  $X$  es un morfismo  $a : G \times X \rightarrow X$  tal que la composición

$$X \xrightarrow{(0, \text{Id}_X)} G \times X \xrightarrow{a} X$$

es la identidad de  $X$  y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\text{Id}_G \times a} & G \times X \\ \mu \times \text{Id}_X \downarrow & & \downarrow a \\ G \times X & \xrightarrow{a} & X \end{array}$$

conmuta. Notaremos  $G \curvearrowright X$  ó  $a : G \curvearrowright X$  (si queremos explicitar la acción).

Una acción a derecha de  $G$  en  $X$  es un morfismo  $a : G \times X \rightarrow X$  tal que la composición

$$X \xrightarrow{(\text{Id}_X, 0)} X \times G \xrightarrow{a} X$$

es la identidad de  $X$  y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times G \times G & \xrightarrow{a \times \text{Id}_G} & G \times X \\ \text{Id}_X \times \mu \downarrow & & \downarrow a \\ G \times X & \xrightarrow{a} & X \end{array}$$

conmuta.

**Definición 1.3.2.** La categoría de acciones a izquierda en  $\text{Set}^*$ , que notaremos  $\text{Acc}$ , es la categoría cuyos objetos son las acciones  $G \curvearrowright X$  y donde un morfismo de  $a : G \curvearrowright X$  en  $a' : H \curvearrowright Y$  es un par formado por un morfismo de grupos  $\varphi : G \rightarrow H$  y una función de conjuntos  $f : X \rightarrow Y$  tales que son compatibles con las acciones, es decir,  $f(a(g, x)) = a'(\varphi(g), f(x))$ . La composición de morfismos de acciones se define componiendo las  $\varphi$  y las  $f$ . Es fácil ver que la composición de morfismos de acciones es un morfismo de acciones.

**Teorema 1.3.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría punteada con productos finitos,  $G$  un grupo de  $\mathcal{C}$ ,  $X$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $G$  actúa en  $X$  a izquierda si y sólo si se tiene un funtor contravariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Acc}$  definido de la siguiente manera. Si  $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $F(A)$  es una acción de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$  y si  $\alpha : A \rightarrow B$  es un morfismo de  $\mathcal{C}$ , entonces

$$F(\alpha) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, G) \curvearrowright \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G) \curvearrowright \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$$

está inducido por  $\alpha^*$ . Más precisamente, el morfismo de grupos correspondiente

$$\varphi_\alpha : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$$

está definido por  $\varphi_\alpha(g) = g \circ \alpha$  y la función de conjuntos

$$f_\alpha : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$$

está definida por  $f_\alpha(h) = h \circ \alpha$ .

*Demostración.* Sea  $a : G \times X \rightarrow X$  la acción. Definimos  $F(A)(f, g) = a \circ (f, g)$ . Veamos que  $F(A)$  define una acción y que  $F(\alpha)$  es un morfismo de acciones:

$$F(A)(0, g) = a \circ (0, g) = a \circ (0, \text{Id}_X) \circ g = \text{Id}_X \circ g = g$$

$$\begin{aligned} F(A)(\mu(f, g), h) &= a \circ (\mu(f, g), h) = a \circ (\mu \times \text{Id}_X) \circ (f, g, h) = a \circ (\text{Id}_G \times a) \circ (f, g, h) = \\ &= a \circ (f, a \circ (g, h)) = F(A)(f, F(A)(g, h)) \end{aligned}$$

Así,  $F(A)$  es una acción. Además,  $\varphi_\alpha$  es morfismo de grupos pues  $\varphi_\alpha = \alpha^*$  y vimos en la demostración de 1.2.7 que  $\alpha^*$  es morfismo de grupos. También  $f_\alpha$  es una función de conjuntos y se tiene:

$$f_\alpha(F(B)(G, H)) = a \circ (g, h) \circ \alpha = a \circ (g\alpha, h\alpha) = F(A)(g\alpha, h\alpha) = F(A)(\varphi_\alpha(g), f_\alpha(h))$$

Además, es claro que  $F$  es un funtor contravariante.

Recíprocamente, sea  $a : G \times X \rightarrow X$ ,  $a = F(G \times X)(\text{pr}_1, \text{pr}_2)$ . Notaremos  $f \cdot_A g = F(A)(f, g)$ . Si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$  se tiene:

$$a \circ (f, g) = (\text{pr}_1 \cdot_{G \times X} \text{pr}_2) \circ (f, g) = (f, g)^*(\text{pr}_1 \cdot_{G \times X} \text{pr}_2) = (f, g)^*(\text{pr}_1) \cdot_A (f, g)^*(\text{pr}_2) = f \cdot_A g$$

En particular, tomando  $A = X$ ,  $f = 0$ ,  $g = \text{Id}_X$  queda  $a \circ (0, \text{Id}_X) = 0 \cdot_X \text{Id}_X = \text{Id}_X$ .

Por otra parte,

$$\begin{aligned} a \circ (\mu \times \text{Id}_X) &= a \circ (\mu \circ (q_1, q_2), \text{Id}_X \circ q_3) = (q_1 \cdot q_2)_{G \times G \times X} q_3 = (q_1 \cdot_{G \times G \times X} q_2)_{G \times G \times X} q_3 = \\ &= a \circ (q_1, a \circ (q_2, q_3)) = a \circ (\text{Id}_G \times a) \end{aligned}$$

Así,  $a$  es acción. □

*Observación 1.3.4.* Notar que si tenemos  $F$  como en el teorema anterior, funtor a la categoría de acciones, y definimos  $a$  como en la recíproca de dicho teorema, la acción  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G) \curvearrowright \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$  dada por  $F(A)$  coincide con la dada por  $a$  en la primera parte del teorema, pues vimos en la demostración que  $a \circ (f, g) = f \cdot_A g$ , si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ .

**Proposición 1.3.5.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría punteada,  $G$  un grupo en  $\mathcal{C}$ ,  $X$  un objeto de  $\mathcal{C}$  y  $a : G \times X \rightarrow X$  un morfismo tal que para todo objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  se tiene que la función  $F(A) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$  definida por  $F(A)(f, g) = a \circ (f, g)$  es una acción de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G)$  en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ . Entonces,  $a$  es una acción de  $G$  en  $X$ .



*Demostración.* Definamos el funtor  $F$  como en la recíproca del teorema anterior y veamos que es un funtor a la categoría de acciones. Por hipótesis tenemos que  $F(A)$  son acciones. Si  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , repitiendo la cuenta hecha en la demostración del teorema anterior se obtiene que  $\alpha^*$  es morfismo de acciones. Por lo tanto, por dicho teorema se tiene que  $G$  actúa en  $X$  y por la observación anterior esa acción coincide con  $a$ , luego  $a$  es acción.  $\square$

*Observación 1.3.6.*

1. Lo mismo vale para acciones a derecha.
2. También pueden definirse coacciones de cogrupos a derecha e izquierda, ‘dualizando’ las definiciones de acciones de grupos, o bien, definiéndolas como acciones en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

## 1.4. Categorías sobre y bajo objetos, esquemas y retractos

### Esquemas

Comenzaremos definiendo el concepto de esquema, que generaliza al de categoría en el sentido que no pide tener leyes de composición. Usaremos esto para definir los diagramas que serán útiles para trabajar con límites y colímites. También usaremos los esquemas para definir la categoría de caminos en el capítulo siguiente.

**Definición 1.4.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría,  $A, B$  objetos de  $\mathcal{C}$  y  $\sigma \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ . Diremos que el dominio de  $\sigma$  es  $A$  y notaremos  $\text{dom}(\sigma) = A$  y diremos que el codominio (o rango) de  $\sigma$  es  $B$  y notaremos  $\text{rg}(\sigma) = B$ .

**Definición 1.4.2.** Un esquema  $T$  está dado por dos clases  $\text{Obj}(T)$  y  $\text{Fl}(T)$  y dos asignaciones  $\text{dom}_T, \text{rg}_T : \text{Fl}(T) \rightarrow \text{Obj}(T)$ . Notar que toda categoría  $\mathcal{C}$  tiene asociado un esquema. Además, una categoría queda definida por su esquema subordinado y las leyes de composición.

**Definición 1.4.3.** Sean  $T$  y  $U$  esquemas. Un diagrama en  $U$  de tipo  $T$  está definido por dos asignaciones  $d_{\text{Fl}} : \text{Fl}(T) \rightarrow \text{Fl}(U)$  y  $d_{\text{Obj}} : \text{Obj}(T) \rightarrow \text{Obj}(U)$  tales que  $\text{dom}_U \circ d_{\text{Fl}} = d_{\text{Obj}} \circ \text{dom}_T$  y  $\text{rg}_U \circ d_{\text{Fl}} = d_{\text{Obj}} \circ \text{rg}_T$ . Si  $\mathcal{C}$  es una categoría, un diagrama en  $\mathcal{C}$  de tipo  $T$  es un diagrama del esquema subordinado a  $\mathcal{C}$  de tipo  $T$ .

Introducimos ahora algunas notaciones de funtores y categorías de funtores.

**Definición 1.4.4.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías. Notaremos por  $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  a la categoría cuyos objetos son los funtores de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  y cuyos morfismos son las transformaciones naturales.

**Nota importante 1.4.5.** Las transformaciones naturales entre dos funtores  $F$  y  $G$  no tienen por qué formar un conjunto. Por lo tanto,  $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  no tiene por qué ser una categoría en el sentido usual. Sin embargo, podemos extender la definición de categoría permitiendo que los morfismos entre dos objetos pertenezcan a un universo mayor que el de los conjuntos. Volveremos a esto con más detalle en el capítulo siguiente.

*Notación 1.4.6.* Sean  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{C}'$ ,  $\mathcal{D}'$  categorías, y  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  y  $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  funtores. Notaremos por  $K_* : \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}', \mathcal{D}')$  al funtor definido por

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \mapsto K \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}'$$

$$\phi : F \Rightarrow G \text{ t. nat} \mapsto K\phi : K \circ F \Rightarrow K \circ G$$

(donde  $(K\phi)_A = K(\phi_A)$ ).

Notaremos también  $H^* : \text{Hom}(\mathcal{C}', \mathcal{D}') \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  al funtor contravariante definido por

$$F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}' \mapsto F \circ H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

$$\phi : F \Rightarrow G \text{ t. nat} \mapsto \phi H : F \circ H \Rightarrow G \circ H$$

(donde  $(\phi H)_A = \phi_{H(A)}$ ).

### Categorías sobre y bajo objetos

Definiremos ahora las categorías sobre y bajo un objeto y probaremos algunas propiedades, que nos serán útiles más adelante.

**Definición 1.4.7.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $A$  y  $B$  objetos de  $\mathcal{C}$ . La categoría de objetos bajo  $A$  (o simplemente categoría bajo  $A$ ) es la categoría cuyos objetos son los morfismos de  $\mathcal{C}$  con dominio  $A$  y donde un morfismo de  $f : A \rightarrow C$  a  $g : A \rightarrow D$  es un morfismo  $\alpha : C \rightarrow D$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $\alpha f = g$ .

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ C & \xrightarrow{\alpha} & D \end{array}$$

La composición es la inducida por  $\mathcal{C}$ . Notaremos a esta categoría  ${}^A\mathcal{C}$  y al objeto  $f : A \rightarrow C$  por  $(C, f)$ .

La categoría de objetos sobre  $B$  (o simplemente categoría sobre  $B$ ) es la categoría cuyos objetos son los morfismos de  $\mathcal{C}$  con codominio  $B$  y donde un morfismo de  $f : C \rightarrow B$  a  $g : D \rightarrow B$  es un morfismo  $\beta : C \rightarrow D$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $f = g\beta$ .

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\beta} & D \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & B & \end{array}$$

La composición es la inducida por  $\mathcal{C}$ . Notaremos a esta categoría  ${}_B\mathcal{C}$  y al objeto  $f : C \rightarrow B$  por  $(C, f)$

*Observación 1.4.8.* Vale que  ${}^A(\mathcal{C}^{\text{op}}) = ({}^A\mathcal{C})^{\text{op}}$  y  $({}^A\mathcal{C})^{\text{op}} = {}_A(\mathcal{C}^{\text{op}})$ .

**Definición 1.4.9.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $A$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Definimos el funtor olvido  $O : {}^A\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  por  $O(C, f) = C$  en los objetos y  $O(\alpha) = \alpha$  en las flechas.

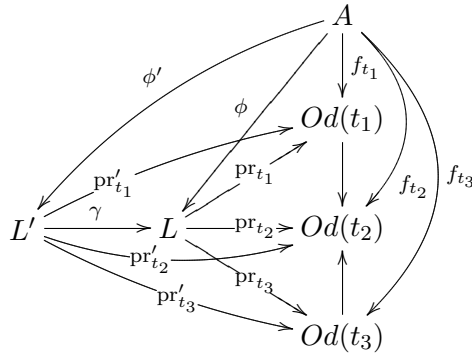
Análogamente definimos el funtor olvido de  ${}_B\mathcal{C}$  a  $\mathcal{C}$ .

**Proposición 1.4.10.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y sean  $A$  y  $B$  objetos de  $\mathcal{C}$ .

1. Si  $\mathcal{C}$  tiene límites pequeños (resp. finitos) entonces  ${}^A\mathcal{C}$  también.
2. Si  $\mathcal{C}$  tiene colímites pequeños (resp. finitos) entonces  ${}^A\mathcal{C}$  también.
3. Si  $\mathcal{C}$  tiene límites pequeños (resp. finitos) entonces  ${}_B\mathcal{C}$  también.
4. Si  $\mathcal{C}$  tiene colímites pequeños (resp. finitos) entonces  ${}_B\mathcal{C}$  también.

*Demostración.* 1. Sea  $d : T \rightarrow {}^A\mathcal{C}$  un diagrama pequeño. Componiendo con el functor olvido  $O$ , tenemos  $Od : T \rightarrow \mathcal{C}$  diagrama pequeño en  $\mathcal{C}$ , y por lo tanto tiene límite en  $\mathcal{C}$ . Llamemos  $L$  al límite y  $\text{pr}_t : L \rightarrow Od(t)$   $t \in T$  a los morfismos que vienen dados por la existencia del límite. Notemos que si  $\alpha : t \rightarrow t'$  es un morfismo de  $T$ , entonces  $Od(\alpha)\text{pr}_t = \text{pr}_{t'}$ .

Sean  $f_t : A \rightarrow Od(t)$  para  $t \in T$  tales que  $d(t) = (Od(t), f_t)$ .  $L$  será el candidato a ser el límite en  ${}^A\mathcal{C}$ , pero necesitamos tener, además, un morfismo  $A \rightarrow L$  para tener un objeto de  ${}^A\mathcal{C}$ .



Si  $\alpha : t \rightarrow t'$  es un morfismo de  $T$  entonces  $d(\alpha) : (Od(t), f_t) \rightarrow (Od(t'), f_{t'})$  y por lo tanto  $Od(\alpha)f_t = f_{t'}$  para todo  $\alpha$  morfismo de  $T$ . Por lo tanto, por la definición de límite, existe un único morfismo  $\phi : A \rightarrow L$  tal que  $\text{pr}_t\phi = f_t$  para todo  $t \in T$ . Afirmando que  $(L, \phi)$  junto con  $\text{pr}_t : (L, \phi) \rightarrow d(t)$  es el límite del diagrama  $d$  (los  $\text{pr}_t$  son morfismos pues  $\text{pr}_t\phi = f_t$ ). En efecto, como  $Od(\alpha)\text{pr}_t = \text{pr}_{t'}$ , entonces  $L$  con las  $\text{pr}_t$  forman un cono proyectivo con base  $d$ , es decir, los morfismos conmutan. Además, si tenemos otro objeto  $(L', \phi')$  junto con  $\text{pr}'_t : (L', \phi') \rightarrow d(t)$  tales que  $Od(\alpha)\text{pr}'_t = \text{pr}'_{t'}$  para todo  $\alpha : t \rightarrow t'$  morfismo de  $T$ , entonces existe un único morfismo  $\gamma : L' \rightarrow L$  tal que  $\text{pr}_t\gamma = \text{pr}'_t$  para todo  $t \in T$ . Y como  $\text{pr}_t\gamma\phi' = \text{pr}'_t\phi' = f_t$  (ya que los  $\text{pr}'_t$  son morfismos en  ${}^A\mathcal{C}$ ) se tiene, por unicidad de  $\phi$ , que  $\gamma\phi' = \phi$ . Es decir,  $\gamma : (L', \phi') \rightarrow (L, \phi)$  es un morfismo de  ${}^A\mathcal{C}$  y vimos que cumplía  $\text{pr}_t\gamma = \text{pr}'_t$ . Además, es el único que cumple esto, pues  $\gamma$  era único. Así,  $(L, \phi)$  con  $\text{pr}_t$  es el límite de  $d$ .

2. Sea  $d : T' \rightarrow {}^A\mathcal{C}$  un diagrama pequeño. Supondremos que es no vacío, pues en el caso de que sea vacío tiene colímite que es el objeto inicial de  ${}^A\mathcal{C}$ , es decir  $(A, \text{Id})$ .

Tenemos  $Od : T' \rightarrow \mathcal{C}$  diagrama pequeño. Sean  $f_t : A \rightarrow Od(t)$  para  $t \in T'$  tales que  $d(t) = (Od(t), f_t)$ . Agregaremos  $A$  y las  $f_t$  al diagrama  $Od$ . Para ello, sea  $T$  el esquema definido por

$$\text{Obj}(T) = \text{Obj}(T') \amalg \{*\}$$

donde  $\amalg$  denota unión disjunta, y

$$\text{Fl}(T) = \text{Fl}(T') \amalg \{\alpha_t : t \in T'\}$$

Además, definimos las asignaciones  $\text{dom}_T$  y  $\text{rg}_T$  por

$$\text{dom}_T(\alpha) = \begin{cases} \text{dom}_{T'}(\alpha) & \text{si } \alpha \in \text{Fl}(T') \\ * & \text{si } \alpha = \alpha_t \text{ para } t \in T' \end{cases}$$

$$\text{rg}_T(\alpha) = \begin{cases} \text{rg}_{T'}(\alpha) & \text{si } \alpha \in \text{Fl}(T') \\ t & \text{si } \alpha = \alpha_t \end{cases}$$

Definimos ahora el diagrama  $\overline{Od} : T \rightarrow \mathcal{C}$  por

$$\overline{Od}(X) = \begin{cases} Od(X) & \text{si } X \in \text{Obj}(T') \\ A & \text{si } X = * \end{cases}$$

sobre los objetos y

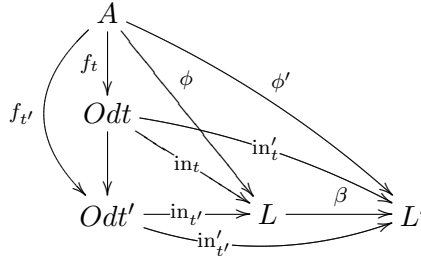
$$\overline{Od}(\alpha) = \begin{cases} Od(\alpha) & \text{si } \alpha \in \text{Fl}(T') \\ f_t & \text{si } \alpha = \alpha_t \end{cases}$$

sobre las flechas. En otras palabras  $\overline{Od}$  es el diagrama que resulta de agregarle a  $Od$  el objeto  $A$  y las flechas  $f_t$ . Notemos que como  $d$  era un diagrama pequeño, entonces  $\overline{Od}$  sigue siendo pequeño (y si  $d$  era finito, entonces  $\overline{Od}$  resulta finito).

Sea entonces  $L$  con los morfismos  $\text{in}_t : \overline{Od}(t) \rightarrow L$  el colímite de  $\overline{Od}$  en  $\mathcal{C}$ . Por lo tanto tenemos que si  $\alpha : t \rightarrow t'$  es un morfismo de  $T$ , entonces  $\text{in}_{t'}\overline{Od}(\alpha) = \text{in}_t$ . Llamemos  $\phi = \text{in}_* : \overline{Od}(*) = A \rightarrow L$ . Por lo dicho antes, tomando  $\alpha = \alpha_t$ , se tiene que  $\text{in}_t f_t = \phi$ .

Luego tenemos morfismos  $\text{in}_t : (Od_t, f_t) \rightarrow (L, \phi)$  (en  ${}^A\mathcal{C}$ ) para  $t \in T'$ .

Notar que debemos agregar el objeto  $A$  para construir el colímite, dado que, si el diagrama original en  ${}^A\mathcal{C}$  no es conexo, no se puede definir coherentemente el morfismo  $\varphi$ .



Afirmo que  $(L, \phi)$  junto con los morfismos  $\text{in}_t$  ( $t \in T'$ ) es el colímite de  $d$ . En efecto, si  $\alpha : t \rightarrow t'$  es un morfismo de  $T'$  como  $\text{in}_{t'}Od(\alpha) = \text{in}_t$  (en  $\mathcal{C}$ ), entonces  $\text{in}_{t'}d(\alpha) = \text{in}_t$  en  ${}^A\mathcal{C}$ . Y si tenemos  $(L', \phi')$  y morfismos  $\text{in}'_t$  ( $t \in T'$ ) de  ${}^A\mathcal{C}$  tales que  $\text{in}'_{t'}d(\alpha) = \text{in}'_t$  si  $\alpha : t \rightarrow t'$  es un morfismo de  $T'$ , entonces  $\text{in}'_{t'}Od(\alpha) = \text{in}'_t$  en  $\mathcal{C}$  y  $\text{in}'_t f_t = \phi'$  (pues los  $\text{in}'_t$  son morfismos en  ${}^A\mathcal{C}$ ). Luego  $L'$  junto con las  $\text{in}'_t$  y  $\phi'$  forman un cono inyectivo con base  $\overline{Od}$ . Por lo tanto, existe un único morfismo  $\beta : L \rightarrow L'$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $\beta \text{in}_t = \text{in}'_t$  para  $t \in T'$  y  $\beta \phi = \phi'$ . Así,  $\beta : (L, \phi) \rightarrow (L', \phi')$  es morfismo en  ${}^A\mathcal{C}$  y es el único que cumple  $\beta \text{in}_t = \text{in}'_t$  en  ${}^A\mathcal{C}$  por la unicidad de  $\beta$ .

3. y 4. Usar 1. y 2. y la dualidad de la observación 1.4.8. □

**Observación importante 1.4.11.** Como dijimos en la demostración anterior  $(A, \text{Id})$  es objeto inicial de  ${}^A\mathcal{C}$ . Si además  $A$  es objeto final de  $\mathcal{C}$ , entonces  $(A, \text{Id})$  resulta objeto final de  ${}^A\mathcal{C}$ . Por lo tanto, si  $A$  es objeto final de  $\mathcal{C}$  la categoría  ${}^A\mathcal{C}$  es punteada.

Dualmente,  $(A, \text{Id})$  es objeto final de  ${}_A\mathcal{C}$  y si además  $A$  es objeto inicial de  $\mathcal{C}$ , entonces  $(A, \text{Id})$  resulta objeto inicial de  ${}_A\mathcal{C}$  y la categoría  ${}_A\mathcal{C}$  resulta punteada.

Construiremos ahora un funtor adjunto a izquierda del funtor olvido en el caso de que  $\mathcal{C}$  admita coproductos finitos. Definimos  $L : \mathcal{C} \rightarrow {}^A\mathcal{C}$  por  $L(X) = (A \vee X, \text{in}_1)$  en los objetos ( donde  $\text{in}_1 : A \rightarrow A \vee X$ ) y si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de  $\mathcal{C}$  definimos  $L(f) : A \vee X \rightarrow A \vee Y$  por  $L(f) = \text{Id} \vee f$ . Tenemos, en efecto, que  $L(\text{Id}) = \text{Id}$  y si  $\text{in}'_1 : A \rightarrow A \vee Y$ ,  $\text{in}'_2 : Y \rightarrow A \vee Y$ ,  $\text{in}''_1 : A \rightarrow A \vee Z$ ,  $\text{in}''_2 : Z \rightarrow A \vee Z$  son los morfismos dados por la existencia de los coproductos y  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  se tiene

$$\begin{aligned} L(g) \circ L(f) &= (\text{Id} \vee g)(\text{Id} \vee f) = (\text{in}''_1 \text{Id} + \text{in}''_2 g)(\text{in}'_1 \text{Id} + \text{in}'_2 f) = \\ &= (\text{in}''_1 \text{Id} + \text{in}''_2 g)\text{in}'_1 + (\text{in}''_1 \text{Id} + \text{in}''_2 g)\text{in}'_2 f = \text{in}''_1 + \text{in}''_2 gf = \text{Id} \vee gf = L(gf) \end{aligned}$$

Probaremos ahora la adjunción mencionada

**Proposición 1.4.12.** *El funtor  $L$  definido anteriormente es adjunto a izquierda del funtor olvido  $O$ .*

*Demostración.* Para cada  $X$  objeto de  $\mathcal{C}$  y  $(Y, \alpha)$  objeto de  ${}^A\mathcal{C}$  definimos la función

$$\varphi_{X(Y, \alpha)} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, O(Y, \alpha)) \rightarrow \text{Hom}_{{}^A\mathcal{C}}(L(X), (Y, \alpha))$$

por  $\varphi_{X(Y, \alpha)}(f) = \alpha + f$ . Es fácil ver que es biyectiva pues si consideramos  $\text{in}_1 : A \rightarrow A \vee X$ ,  $\text{in}_2 : X \rightarrow A \vee X$ , y definimos

$$\psi_{X(Y, \alpha)} : \text{Hom}_{{}^A\mathcal{C}}(L(X), (Y, \alpha)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, O(Y, \alpha))$$

por  $\psi_{X(Y, \alpha)}(h) = h\text{in}_2$  entonces  $\psi_{X(Y, \alpha)}$  es la inversa de  $\varphi_{X(Y, \alpha)}$  ya que

$$\psi_{X(Y, \alpha)}\varphi_{X(Y, \alpha)}(f) = (\alpha + f)\text{in}_2 = f$$

y si  $h \in \text{Hom}_{{}^A\mathcal{C}}(L(X), (Y, \alpha))$  entonces  $h\text{in}_1 = \alpha$  y se tiene

$$\varphi_{X(Y, \alpha)}\psi_{X(Y, \alpha)}(h) = (\alpha + h\text{in}_2) = (h\text{in}_1 + h\text{in}_2) = h$$

Resta ver que esta biyección es natural en  $X$  y en  $Y$ . Sea  $g : X \rightarrow X'$  un morfismo de  $\mathcal{C}$ . Tenemos

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, O(Y, \alpha)) & \xrightarrow{\varphi_{X(Y, \alpha)}} & \text{Hom}_{{}^A\mathcal{C}}(L(X), (Y, \alpha)) \\ g^* \uparrow & & \uparrow L(g)^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', O(Y, \alpha)) & \xrightarrow{\varphi_{X'(Y, \alpha)}} & \text{Hom}_{{}^A\mathcal{C}}(L(X'), (Y, \alpha)) \end{array}$$

y este diagrama conmuta pues si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', O(Y, \alpha))$  se tiene

$$\begin{aligned} L(g)^*(\varphi_{X'(Y, \alpha)})(f) &= (\alpha + f)(\text{Id} \vee g) = (\alpha + f)(\text{in}_1 \text{Id} + \text{in}_2 g) = \\ &= (\alpha + f)\text{in}_1 + (\alpha + f)\text{in}_2 g = \alpha + fg = \varphi_{X(Y, \alpha)}g^*(f) \end{aligned}$$

Además, si  $h : (Y, \alpha) \rightarrow (Y', \alpha')$  es un morfismo de  $A^{\mathcal{C}}$  entonces  $h\alpha = \alpha'$  y se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, O(Y, \alpha)) & \xrightarrow{\varphi_{X(Y, \alpha)}} & \mathrm{Hom}_{A^{\mathcal{C}}}(L(X), (Y, \alpha)) \\ O(h)_* \downarrow & & \downarrow h_* \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, O(Y', \alpha')) & \xrightarrow{\varphi_{X(Y', \alpha')}} & \mathrm{Hom}_{A^{\mathcal{C}}}(L(X), (Y', \alpha')) \end{array}$$

que conmuta pues si  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, O(Y, \alpha))$

$$h_*\varphi_{X(Y, \alpha)}(f) = h(\alpha + f) = h\alpha + hf = \alpha' + hf = \varphi_{X(Y', \alpha')}O(h)_*(f)$$

Por lo tanto  $L$  es adjunto a izquierda de  $O$ .  $\square$

*Observación 1.4.13.* Como corolario se tiene que  $O$  conmuta con límites, hecho que también se deduce de la demostración de 1.4.10.

Por otra parte, mirando dicha demostración, se obtiene que  $O$  conmuta con pushouts, pues con las notaciones usadas allí, el colímite de  $Od$  coincide con el de  $\overline{Od}$

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \swarrow f_1 \quad \searrow f_2 \\ B_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_2 & & B_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_2 \\ \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_2 \\ B_3 & & B_3 \end{array}$$

*(Note: The diagram above is a simplified representation of the pushout diagram shown in the image. The image shows a pushout of  $B_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_2$  and  $B_1 \xrightarrow{\alpha_2} B_3$  with maps  $f_1, f_2, f_3$  from  $A$  to the pushout.)*

*Observación 1.4.14.* Usando las dualidades de 1.4.8 se puede hallar un adjunto a derecha del functor olvido de  $B^{\mathcal{C}}$  a  $\mathcal{C}$  en el caso de que  $\mathcal{C}$  admita productos finitos y resulta, por otra parte, que dicho functor olvido respeta pullbacks.

## Retractos

Introduciremos ahora algunas definiciones generales en categorías. Entre ellas, las propiedades de levantamiento serán muy utilizadas por lo que la definición siguiente hará más fácil su mención.

**Definición 1.4.15.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, y sean  $i : A \rightarrow B$  y  $f : X \rightarrow Y$  morfismos de  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $i$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda (abreviaremos LLP) respecto de  $f$  si para cualquier diagrama conmutativo de flechas sólidas de  $\mathcal{C}$  de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe la flecha punteada que hace conmutativo el diagrama total. En este caso, decimos también que  $f$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha (abreviaremos RLP) respecto de  $i$ .

Diremos que  $i$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda (LLP) respecto de una clase de morfismos  $S$  de  $\mathcal{C}$  si tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de todo morfismo  $f$  de  $S$ .

Análogamente, diremos que  $f$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha (RLP) respecto de una clase de morfismos  $S$  si tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de todo morfismo  $i$  de  $S$ .

**Definición 1.4.16.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  se llama un retractor de  $f' : X' \rightarrow Y'$  si hay un diagrama conmutativo de la forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X' & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X & & \\
 \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 & & Y' & & \\
 \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{\text{Id}_Y} & Y & & 
 \end{array}$$

**Proposición 1.4.17.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  un retractor de  $f' : X' \rightarrow Y'$  y  $S$  una clase de morfismos de  $\mathcal{C}$ .

1. Si  $f'$  tiene la LLP respecto de  $S$ , entonces  $f$  también.
2. Si  $f'$  tiene la RLP respecto de  $S$ , entonces  $f$  también.
3. Si  $f'$  tiene inversa a izquierda, entonces  $f$  también.
4. Si  $f'$  tiene inversa a derecha, entonces  $f$  también.
5. Si  $f'$  es un isomorfismo, entonces  $f$  también.

*Demostración.* 1. Sea  $s \in S$ . Consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{i_X} & X' & \xrightarrow{i'_X} & X & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 f \downarrow & & f' \downarrow & & f \downarrow & & s \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{i_Y} & Y' & \xrightarrow{i'_Y} & Y & \xrightarrow{\beta} & B
 \end{array}$$

donde  $i'_X i_X = \text{Id}_X$  e  $i'_Y i_Y = \text{Id}_Y$ . Como  $f'$  tiene la LLP respecto de  $S$ , existe  $\phi' : Y' \rightarrow A$  tal que  $s\phi' = \beta i'_Y$  y  $\phi' f' = \alpha i'_X$ . Sea  $\phi = \phi' i_Y$ , entonces  $s\phi = s\phi' i_Y = \beta i'_Y i_Y = \beta$  y  $\phi f = \phi' i_Y f = \phi' f' i_X = \alpha i'_X i_X = \alpha$ .

2. Análogo a 1., o bien, usar 1. en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

3., 4. y 5. Sea  $g' : Y' \rightarrow X$  la inversa (a izquierda, derecha o ambas) de  $f'$ . Con las notaciones de 1., sea  $g = i'_X g' i_Y : Y \rightarrow X$ . Entonces, si  $g'$  es inversa de  $f'$  a izquierda, se tiene  $gf = i'_X g' i_Y f = i'_X g' f' i_X = i'_X i_X = \text{Id}_X$ , y si  $g'$  es inversa de  $f'$  a derecha, se tiene  $fg = f i'_X g' i_Y = i'_Y f' g' i_Y = i'_Y i_Y = \text{Id}_Y$ .  $\square$

**Observación importante 1.4.18.** La RLP respecto de una clase de morfismos  $S$  es estable por cambio de base, es decir, si  $f$  tiene la RLP respecto de  $S$  y  $g$  es una extensión de base de  $f$ , entonces  $g$  también tiene la RLP respecto de  $S$ .

Dualmente, la LLP respecto de una clase de morfismos  $S$  es estable por cambio de cobase, es decir, si  $i$  tiene la LLP respecto de  $S$  y  $j$  es una extensión de cobase de  $i$ , entonces  $j$  también tiene la LLP respecto de  $S$ .

## 1.5. Fibraciones, equivalencias homotópicas débiles y complejos celulares

En esta sección recordaremos algunas definiciones de espacios topológicos y probaremos algunos resultados importantes, que serán citados reiteradas veces en los capítulos 3 y 4. Estos resultados son conocidos, pero su demostración no se encuentra en la bibliografía habitual.

**Definición 1.5.1.** Sean  $E, B$  espacios topológicos. Una función continua  $p : E \rightarrow B$  se dice *fibración de Serre* si tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de los discos  $D^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , es decir, si dadas  $f : D^n \rightarrow E$  y  $H : D^n \times I \rightarrow B$  tales que  $H i_0 = p f$  existe  $K : D^n \times I \rightarrow E$  (no necesariamente única) tal que  $K i_0 = f$  y  $p K = H$ .

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow K & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

**Definición 1.5.2.** Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  se llama *equivalencia (homotópica) débil* si induce isomorfismos  $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0)) \forall x_0 \in X, \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

La función  $f : X \rightarrow Y$  se dice una  *$n$ -equivalencia* si  $f_* : \pi_r(X, x_0) \rightarrow \pi_r(Y, f(x_0))$  es biyectiva  $\forall x_0 \in X, \forall r \in \mathbb{N}_0, r < n$  y sobreyectiva si  $r = n$ .

*Observación 1.5.3.* Hay un homeomorfismo de pares topológicos

$$\varphi : (D^n \times I, D^n \times 0) \longrightarrow (D^n \times I, D^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I)$$

**Proposición 1.5.4.** Sean  $E, B$  espacios topológicos y  $p : E \rightarrow B$  una función continua. Entonces  $p$  es una *fibración de Serre* si y sólo si tiene la RLP respecto de  $i_0 : X \rightarrow X \times I$  para todo CW-complejo  $X$ .

*Demostración.* Sean  $X$  un CW-complejo,  $f : X \rightarrow E, h : X \times I \rightarrow B$  continuas tales que  $h i_0 = p f$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$



Probaremos primero, por inducción en  $n$  que si ponemos el  $n$ -esqueleto  $X^n$  en lugar de  $X$  existe un levantado  $h_n : X^n \times I \rightarrow E$ . Para el 0-esqueleto es claro pues son puntos discretos y levanto para cada uno de ellos.

Supongamos entonces que tenemos  $h_{n-1} : X^{n-1} \times I \rightarrow E$  tal que  $h_{n-1}i_0|_{X^{n-1}} = f|_{X^{n-1}}$  y  $ph_{n-1} = h|_{X^{n-1} \times I}$ . Tenemos, además, la adjunción de  $n$ -celdas:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha} S^{n-1} & \xrightarrow{g} & X^{n-1} \\ \coprod_{\alpha} i \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{inc} \\ \coprod_{\alpha} D^n & \xrightarrow{+f_{\alpha}^n} & X^n \end{array}$$

Como el functor  $_ \times I : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Top}$  es adjunto a izquierda del functor  $_^I : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Top}$ , entonces respeta colímites, y por lo tanto tenemos un pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha} S^{n-1} \times I & \xrightarrow{g \times \text{Id}_I} & X^{n-1} \times I \\ \coprod_{\alpha} i \times \text{Id}_I \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{inc} \times \text{Id}_I \\ \coprod_{\alpha} D^n \times I & \xrightarrow{+f_{\alpha}^n \times \text{Id}_I} & X^n \times I \end{array}$$

Ahora bien, consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha} (D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I) & \xrightarrow{+(f|_{X^n} f_{\alpha}^n \cup h_{n-1}g)} & E \\ \coprod_{\alpha} (i_0 \cup i \times \text{Id}_I) \downarrow & \text{push} & \downarrow p \\ \coprod_{\alpha} (D^n \times I) & \xrightarrow{h(+f_{\alpha}^n \times \text{Id}_I)} & B \end{array}$$

donde usamos la siguiente notación. Para  $\beta : A \rightarrow D$  y  $\gamma : C \rightarrow D$ , notamos por  $\beta \cup \gamma : A \cup C \rightarrow D$  a la función tal que

$$(\beta \cup \gamma)(x) = \begin{cases} \beta(x) & \text{si } x \in A \\ \gamma(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

Notar que, en efecto, el diagrama anterior conmuta. Ahora bien, por ser  $p$  una fibración de Serre y por la observación 1.5.3, tenemos que existe un levantado  $k_n : \coprod_{\alpha} (D^n \times I) \rightarrow E$  en el diagrama anterior tal que

$$pk_n = h(+f_{\alpha}^n \times \text{Id}_I)$$

y

$$k_n \coprod_{\alpha} (i_0 \cup i \times \text{Id}_I) = +(f|_{X^n} f_{\alpha}^n \cup h_{n-1}g)$$

Por lo tanto, existe  $h_n$  en

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{\alpha} S^{n-1} \times I & \xrightarrow{g \times \text{Id}_I} & X^{n-1} \times I \\
 \downarrow \coprod_{\alpha} i \times \text{Id}_I & \text{push} & \downarrow \text{inc} \times \text{Id}_I \\
 \coprod_{\alpha} D^n \times I & \xrightarrow{+f_{\alpha}^n \times \text{Id}_I} & X^n \times I \\
 & & \downarrow h_n \\
 & & E
 \end{array}$$

$\xrightarrow{k_n}$  (from  $\coprod_{\alpha} D^n \times I$  to  $E$ )  
 $\xrightarrow{h_{n-1}}$  (from  $X^{n-1} \times I$  to  $E$ )

y como

$$ph_n(+f_{\alpha}^n \times \text{Id}_I) = pk_n = h(+f_{\alpha}^n \times \text{Id}_I)$$

y

$$ph_n(\text{inc} \times \text{Id}_I) = ph_{n-1} = h|(X^{n-1} \times I) = h|X^n \times I(\text{inc} \times \text{Id}_I)$$

entonces  $ph_n$  y  $h|X^n \times I$  sirven como flecha punteada en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{\alpha} S^{n-1} \times I & \xrightarrow{g \times \text{Id}_I} & X^{n-1} \times I \\
 \downarrow \coprod_{\alpha} i \times \text{Id}_I & \text{push} & \downarrow \text{inc} \times \text{Id}_I \\
 \coprod_{\alpha} D^n \times I & \xrightarrow{+f_{\alpha}^n \times \text{Id}_I} & X^n \times I \\
 & & \downarrow h_n \\
 & & B
 \end{array}$$

$\xrightarrow{pk_n}$  (from  $\coprod_{\alpha} D^n \times I$  to  $B$ )  
 $\xrightarrow{ph_{n-1}}$  (from  $X^{n-1} \times I$  to  $B$ )

y por lo tanto se tiene  $ph_n = h|X^n \times I$ .

De forma análoga, usando el pushout de la adjunción de  $n$ -celdas obtenemos que

$$h_n i_0 = (h_{n-1} i_0 + k_n i_0) = f|_{X^n}$$

Así completamos la inducción. Notemos además que  $h_n \text{inc} = h_{n-1}$ .

Por lo tanto, como  $X$  es el colímite de sus  $n$ -esqueletos (ya que tiene la topología final respecto de las inclusiones), existe  $H : X \times I \rightarrow E$  tal que  $H|_{X^n} = h_n$  y se obtiene que  $pH = h$  y  $H i_0 = f$ .

Así tenemos la primera implicación.

La recíproca es trivial pues los discos  $D^n$  son CW-complejos para todo  $n$ . □

Tenemos, además el siguiente resultado de [13] (lema 6.29, pág. 87).

**Lema 1.5.5.** *Supongamos que  $f : Z \rightarrow Y$  es una  $n$ -equivalencia. Si  $g : S^{r-1} \rightarrow Z$  y  $h : D^r \rightarrow Y$  con  $r \leq n$  son tales que  $h|_{S^{r-1}} = f \circ g$ , entonces existe  $h' : D^r \rightarrow Z$  con  $h'|_{S^{r-1}} = g$  y  $f \circ h' \simeq h$  rel  $S^{r-1}$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 S^{r-1} & \xrightarrow{g} & Z \\
 \text{inc} \downarrow & \nearrow h' & \downarrow f \\
 D^r & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

$\simeq$  (between  $D^r \rightarrow Y$  and  $D^r \rightarrow Z \xrightarrow{f} Y$ )

**Proposición 1.5.6.** Sean  $E, B$  espacios topológicos y  $p : E \rightarrow B$  una función continua. Son equivalentes:

- a)  $p$  es una fibración de Serre y una equivalencia homotópica débil.
- b)  $p$  tiene RLP respecto de las inclusiones  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n \forall n \in \mathbb{N}_0$ .
- c)  $p$  tiene RLP respecto de la inclusión  $A \hookrightarrow X$  para todo CW-complejo relativo  $(X, A)$ .

*Demostración.* a)  $\Rightarrow$  b) Como  $p$  es una equivalencia homotópica débil, entonces es una  $n$ -equivalencia para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Por el lema anterior, existe  $h' : D^n \rightarrow E$  tal que  $h'|_{S^{n-1}} = f$  y  $ph' \simeq h$  rel  $S^{n-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & Z \\ i \downarrow & \nearrow h' & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \quad \simeq$$

Lo que haremos ahora será usar que  $p$  es fibración de Serre para cambiar  $h'$  por otra función de modo que se tenga una igualdad en lugar de  $ph' \simeq h$  rel  $S^{n-1}$ . Para eso sea  $H : D^n \times I \rightarrow B$  la homotopía relativa a  $S^{n-1}$  entre  $ph'$  y  $h$ . Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I & \xrightarrow{h' \cup f} & E \\ \text{inc} \downarrow & & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Y como  $p$  es una fibración de Serre y por la observación 1.5.3, tenemos que existe  $H' : D^n \times I \rightarrow E$  tal que  $pH' = H$  y  $H'\text{inc} = h' \cup f$ . Tenemos así  $H'i_1 : D^n \rightarrow B$ . Afirmamos que este es el levantado buscado. En efecto,  $H'i_1i = f$  (pues  $H'\text{inc} = h' \cup f$ ) y  $pH'i_1 = Hi_1 = h$ .

b)  $\Rightarrow$  a) Probemos primero que  $p$  es una fibración de Serre. Sean

$$H_+^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| \leq 1 \text{ y } x_{n+1} \geq 0\}$$

$$H_-^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| \leq 1 \text{ y } x_{n+1} \leq 0\}$$

$$S_+^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = 1 \text{ y } x_{n+1} \geq 0\}$$

$$S_-^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = 1 \text{ y } x_{n+1} \leq 0\}$$

Se tiene un homeomorfismo de pares topológicos  $\varphi : (D^n \times I, D^n \times \{0\}) \rightarrow (H_+^{n+1}, S_+^n)$ . Por lo tanto, basta ver que  $p$  tiene la RLP respecto de las inclusiones  $S_+^n \hookrightarrow H_+^{n+1}$ . Consideremos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_+^n & \xrightarrow{f} & E \\ \text{inc} \downarrow & & \downarrow p \\ H_+^{n+1} & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Buscamos un levantado  $h' : H_+^{n+1} \rightarrow E$  tal que  $ph' = h$  y  $h'inc = f$ .

Extendemos  $f$  a  $\bar{f} : S^n \rightarrow E$  y  $h$  a  $\bar{h} : D^{n+1} \rightarrow B$  por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x_{n+1} \geq 0 \\ f(x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}) & \text{si } x_{n+1} \leq 0 \end{cases}$$

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x_{n+1} \geq 0 \\ h(x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}) & \text{si } x_{n+1} \leq 0 \end{cases}$$

Por hipótesis tenemos un levantado  $k$  en

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\bar{h}} & E \\ \text{inc} \downarrow & \nearrow k & \downarrow p \\ D^{n+1} & \xrightarrow{\bar{h}} & B \end{array}$$

y  $h' = k|_{H_+^{n+1}} : H_+^{n+1} \rightarrow E$  es el levantado buscado.

Veamos ahora que  $p$  es una equivalencia homotópica débil, es decir, que para todo  $e_0 \in E$ ,  $p_* : \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(B, p(e_0))$  es biyectiva  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ . Llamemos  $b_0 = p(e_0)$ . Sea  $s_0 \in S^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) y supongamos que tenemos  $f, g : (S^n, s_0) \rightarrow (E, e_0)$  tales que  $pf \simeq pg$  rel  $\{s_0\}$  y sea  $h : S^n \times I \rightarrow B$  la homotopía.

Sabemos que  $D^n/S^{n-1} \simeq S^n$ . Sea  $q : D^n \rightarrow S^n$  la función cociente, elegida de forma tal que  $q(S^{n-1}) = s_0$ . Se tiene  $f_0, g_0 : D^n \rightarrow E$  y

$$H = h \circ (q \times \text{Id}_I) : D^n \times I \rightarrow B$$

es una homotopía relativa a  $S^{n-1}$  entre  $pf_0$  y  $pg_0$ .

Consideramos en  $D^n \times I$  la siguiente relación de equivalencia.

$$(x, t) \sim (x', t') \Leftrightarrow x = x' \text{ y } \|x\| = 1$$

Se tiene que  $(D^n \times I / \sim) \simeq D^{n+1}$ . Como  $H(q \times \text{Id}_I)$  es relativa a  $S^{n-1}$  entonces pasa al cociente  $D^n \times I / \sim$  como  $H' : D^{n+1} \rightarrow B$ . Por construcción,  $H'$  es  $pf_0$  en el hemisferio inferior  $S_-^n$  y  $pg_0$  en el superior  $S_+^n$  (vía homeomorfismos  $S_-^n \simeq D^n$  y  $S_+^n \simeq D^n$ ). Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S^n = S_-^n \cup S_+^n & \xrightarrow{f_0 \cup g_0} & E \\ \text{inc} \downarrow & & \downarrow p \\ D^{n+1} & \xrightarrow{H'} & B \end{array}$$

Luego, por hipótesis, existe  $K : D^{n+1} \rightarrow E$  tal que  $pK = H'$  y  $K|_{S^n} = f_0 \cup g_0$ . Llamando  $q' : D^n \times I \rightarrow D^{n+1}$  a la función cociente correspondiente a  $\sim$ , tenemos  $Kq' : D^n \times I \rightarrow E$  con  $Kq'i_0 = f_0$ ,  $Kq'i_1 = g_0$ . Además,  $Kq'$  es una homotopía relativa a  $S^{n-1}$ . Más aún, si  $s \in S^{n-1}$ ,  $t \in I$ , se tiene

$$Kq'(s, t) = K(s, 0) = f_0(s) = f(s_0) = e_0$$

Por lo tanto,  $Kq'$  pasa al cociente dado por  $q$  como  $K'' : S^n \times I \rightarrow E$ , es decir,  $K''(q \times \text{Id}_I) = Kq'$ . Así se tiene

$$fq(x) = Kq'i_0(x) = K''(q \times \text{Id}_I)i_0(x) = K''(q(x), 0)$$

y como  $q$  es sobreyectiva se tiene que  $K''i_0 = f$ . Análogamente,  $K''i_1 = g$  y por la cuenta hecha antes resulta que  $K''$  es una homotopía relativa a  $\{s_0\}$ . Por lo tanto  $f = g$  en  $\pi_n(E, e_0)$ . Así,  $p_*$  es inyectiva.

Veamos que es sobreyectiva. Sea  $f \in \pi_n(B, b_0)$ ,  $f : (S^n, s_0) \rightarrow (B, b_0)$ . Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{c_{e_0}} & E \\ \text{inc} \downarrow & & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{fq} & B \end{array}$$

donde  $c_{e_0}$  es la función constante  $e_0$ . Por hipótesis existe un levantado  $g : D^n \rightarrow E$  tal que  $pg = fq$  y  $g|_{S^{n-1}} = c_{e_0}$ . Entonces  $g$  pasa al cociente (dado por  $q$ ) es decir, existe  $g' : S^n \rightarrow E$  tal que  $g'q = g$ . Notar que  $g'(s_0) = e_0$ . Así,  $pg'q = pg = fq$  y como  $q$  es sobreyectiva se obtiene que  $pg' = f$ . Por lo tanto,  $p_*$  es sobreyectiva.

b)  $\Rightarrow$  c) Se prueba con un argumento similar al usado en la demostración de 1.5.4.

c)  $\Rightarrow$  b) Trivial pues  $(D^n, S^{n-1})$  es un CW-complejo relativo.

□

## Capítulo 2

# Localización

En este capítulo estudiamos la localización en categorías y el cálculo de fracciones, siguiendo y ampliando la exposición de Gabriel y Zisman ([3]). Dada una categoría  $\mathcal{C}$  y una subclase de morfismos  $\Sigma$  de  $\mathcal{C}$  queremos describir la categoría que se obtiene de  $\mathcal{C}$  invirtiendo todos los morfismos de  $\Sigma$ , generalizando lo que ocurre con la localización de anillos. La forma más ‘directa’ de hacer esto sería invirtiendo formalmente las flechas de  $\Sigma$ . Esta será nuestra primera aproximación al tema.

Luego trabajamos con el cálculo de fracciones propiamente dicho. Vemos que si la subclase  $\Sigma$  cumple ciertas condiciones (admite cálculo de fracciones, ver pág. 39) entonces la categoría de fracciones  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  se puede describir más fácilmente (vía fracciones).

El cálculo de fracciones fue inspirado principalmente por los resultados de J. H. C. Whitehead sobre CW-complejos: si queremos invertir las equivalencias débiles en la categoría *Top* de espacios topológicos, basta con considerar la subcategoría de CW-complejos cocientada por la relación de homotopía. Esto lo veremos explícitamente en el capítulo 3.

Agregamos también en este capítulo algunas aplicaciones del cálculo de fracciones a los espacios Hausdorff, espacios de Kelley y grupoides.

Queremos hacer notar un ‘problema conjuntístico’ que surge de esta teoría. Estrictamente hablando, la categoría de fracciones  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  puede, en algunos casos, no existir, en el sentido en que el *Hom* entre dos objetos de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  puede no ser un conjunto. Este hecho no es tenido en cuenta por Gabriel y Zisman, que piensan a todas las categorías como si fueran categorías pequeñas. Para solucionar este problema, muchos autores introducen la noción de  $\mathcal{U}$ -categorías (donde  $\mathcal{U}$  es algún ‘universo’) y prueban que si  $\mathcal{C}$  es una  $\mathcal{U}$ -categoría,  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  existe en un ‘universo mayor’  $\mathcal{U}^+$  (es decir,  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  es una  $\mathcal{U}^+$ -categoría).

Nosotros decidimos tomar la postura de Gabriel y Zisman, puesto que, en los casos que necesitamos, las categorías  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  existen en el sentido estricto. Esto lo veremos más detalladamente en la sección 3.1.

### 2.1. Categorías de fracciones

Como ya mencionamos, para construir la localización de  $\mathcal{C}$  en  $\Sigma$  agregaremos formalmente a  $\mathcal{C}$  las inversas de los morfismos de  $\Sigma$ . Debemos entonces agregar también todas

las composiciones ‘nuevas’ que aparezcan, para lo cual definiremos la categoría de caminos.

**Definición 2.1.1.** Sea  $T$  un esquema (cf. 1.4.2). La categoría de caminos del esquema  $T$  es la categoría  $\text{Path}(T)$  cuyos objetos son los de  $T$  y cuyos morfismos son las secuencias (finitas)  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de morfismos de  $T$  tales que  $\text{rg}(a_i) = \text{dom}(a_{i+1}) \forall i = 1, 2, \dots, n-1$

**Definición 2.1.2.** Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor,  $\sigma \in \text{Fl}(\mathcal{C})$ . Decimos que  $F$  hace a  $\sigma$  inversible si  $F(\sigma)$  es inversible.

**Definición 2.1.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\Sigma$  una subclase de  $\text{Fl}(\mathcal{C})$ . La localización de  $\mathcal{C}$  respecto de  $\Sigma$  es una categoría  $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$  y un functor  $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \Sigma^{-1}\mathcal{C}$  tales que:

- i.  $\gamma$  hace inversibles los morfismos de  $\Sigma$ .
- ii. Si un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  hace inversibles los morfismos de  $\Sigma$  entonces existe un único functor  $G : \Sigma^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $F = G \circ \gamma$ .

Notemos que  $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$  es única salvo isomorfismo de categorías.

Dada entonces una categoría  $\mathcal{C}$  y una subclase  $\Sigma$  de morfismos de  $\mathcal{C}$  queremos construir la localización de  $\mathcal{C}$  respecto de  $\Sigma$ . Para ello consideramos el esquema  $T$  definido como sigue:  $\text{Obj}(T) = \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $\text{Fl}(T) = \text{Fl}(\mathcal{C}) \amalg \Sigma$ , y si  $\text{in}_1 : \text{Fl}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fl}(T) \amalg \Sigma$ ,  $\text{in}_2 : \Sigma \rightarrow \text{Fl}(T) \amalg \Sigma$  son las inclusiones canónicas, entonces  $\text{dom}_T \circ \text{in}_1 = \text{dom}_{\mathcal{C}}$ ,  $\text{dom}_T \circ \text{in}_2 = \text{rg}_{\mathcal{C}}|_{\Sigma}$ ,  $\text{rg}_T \circ \text{in}_1 = \text{dom}_{\mathcal{C}}$ ,  $\text{rg}_T \circ \text{in}_2 = \text{dom}_{\mathcal{C}}|_{\Sigma}$ .

Ahora sea  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  el cociente de la categoría  $\text{Path}(T)$  por las siguientes relaciones:

- a)  $\text{in}_1 v \circ \text{in}_1 u = \text{in}_1(v \circ u)$  si  $v \circ u$  está definido en  $\mathcal{C}$ .
- b)  $\text{in}_1(\text{Id}_{\mathcal{C}}(a)) = \text{Id}_{\text{Path}(T)}(a)$
- c)  $\text{in}_2(\sigma) \circ \text{in}_1(\sigma) = \text{Id}_{\text{Path}(T)}(\text{dom}_{\mathcal{C}}\sigma)$  y  $\text{in}_1(\sigma) \circ \text{in}_2(\sigma) = \text{Id}_{\text{Path}(T)}(\text{rg}_{\mathcal{C}}\sigma)$  si  $\sigma \in \Sigma$ .

Por último, sean  $\text{Can}_1 : \text{Path}(T) \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  y  $\text{Can}_2 : \text{Fl}(T) \rightarrow \text{Fl}(\text{Path}(T))$  los funtores inducidos por los funtores canónicos respectivos y sea  $\text{P}_{\Sigma} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  el functor que induce en  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  la identidad y en  $\text{Fl}(\mathcal{C})$  la composición  $\text{Can}_1 \circ \text{Can}_2 \circ \text{in}_1$ .

Notemos que lo que estamos haciendo en esta construcción es agregar formalmente las inversas de los morfismos de  $\Sigma$  en la copia de  $\Sigma$  que unimos a  $\text{Fl}(\mathcal{C})$ , y luego tomamos todas las composiciones posibles al considerar la categoría de caminos del esquema  $T$ . Pero como queremos que se respeten las composiciones y las identidades de  $\mathcal{C}$  que ya teníamos, entonces cocientamos por las relaciones a) y b). Finalmente cocientamos por la relación c), para que los morfismos de la copia de  $\Sigma$  agregada sean las inversas de los morfismos de  $\Sigma$ .

*Observación 2.1.4.* Notemos que puede resultar que se inviertan algunos morfismos que no pertenecían a  $\Sigma$ . Por ejemplo, si  $f, g \in \Sigma$  y  $f \circ g \notin \Sigma$ , entonces  $f$  y  $g$  son isomorfismos en  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  y por lo tanto  $f \circ g$  también lo es. De la misma forma, si  $f, f \circ g \in \Sigma$  y  $g \notin \Sigma$ , como  $f$  y  $f \circ g$  son isomorfismos en  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ ,  $g$  también lo es, con inversa  $(f \circ g)^{-1} \circ f$ .

**Lema 2.1.5.** Para cada categoría  $\mathcal{D}$  el functor  $\text{P}_{\Sigma}^*$  es un isomorfismo de la categoría  $\text{Hom}(\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{D})$  a la subcategoría plena de  $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  cuyos objetos son los funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  que hacen inversibles los morfismos de  $\Sigma$ .

*Demostración.* Sea  $F : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor. Veamos que  $F \circ P_\Sigma$  hace inversibles los morfismos de  $\Sigma$ . Sea  $g \in \Sigma$ . Con las notaciones de antes se tiene

$$\begin{aligned} P_\Sigma(g) \circ (\text{Can}_1 \circ \text{Can}_2 \circ \text{in}_2(g)) &= (\text{Can}_1 \circ \text{Can}_2 \circ \text{in}_1(g)) \circ (\text{Can}_1 \circ \text{Can}_2 \circ \text{in}_2(g)) = \\ &= (\text{Can}_1 \circ \text{Can}_2 \circ (\text{in}_1(g) \circ \text{in}_2(g))) = \text{id} \end{aligned}$$

y análogamente para la composición en el otro sentido. Por lo tanto se tiene que  $P_\Sigma(g)$  es un isomorfismo para todo  $g \in \Sigma$ . Así  $F \circ P_\Sigma$  hace inversibles los morfismos de  $\Sigma$ .

Veamos inyectividad (sobre objetos): Supongamos  $F, F'$  son funtores de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  a  $\mathcal{D}$ , tales que  $F \circ P_\Sigma = F' \circ P_\Sigma$ . Es claro que, entonces  $F = F'$  sobre  $\text{Obj}\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] = \text{Obj}\mathcal{C}$ . Por otra parte, si  $f \in \text{Fl}(\mathcal{C})$ ,  $F \circ P_\Sigma(f) = F' \circ P_\Sigma(f)$ , y si  $g \in \Sigma$  entonces  $F \circ P_\Sigma(g) = F' \circ P_\Sigma(g)$  y como son inversibles, sus inversas coinciden, es decir,

$$F \circ \text{Can}_1 \circ \text{Can}_2 \circ \text{in}_2(g) = F' \circ \text{Can}_1 \circ \text{Can}_2 \circ \text{in}_2(g)$$

Por lo tanto,  $F = F'$ .

Veamos sobreyectividad (sobre objetos): Sea  $F$  un funtor de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  que hace inversibles los morfismos de  $\Sigma$ . Sea  $G_0$  definido por:  $G_0 : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$ ,  $G_0(A) = F(A)$  si  $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , y  $G_0 : T = \text{Fl}(\mathcal{C}) \amalg \Sigma \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{D})$ ,  $G_0(f) = F(f)$  si  $f \in \text{Fl}(\mathcal{C})$  y  $G_0(\sigma) = F(\sigma)^{-1}$  si  $\sigma \in \Sigma$ . Extiende  $G_0$  a la categoría  $\text{Path}(T)$  y luego paso al cociente y obtengo un funtor  $G : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$  y es claro que  $G$  cumple  $F = G \circ P_\Sigma$ .

Por otra parte es claro que si  $\phi : F \Rightarrow F'$  es transformación natural, entonces  $\phi : F \circ P_\Sigma \Rightarrow F' \circ P_\Sigma$  es transformación natural, y la recíproca también vale puesto que  $F \circ P_\Sigma$  y  $F' \circ P_\Sigma$  hacen inversibles los morfismos de  $\Sigma$ . Luego el funtor  $P_\Sigma^*$  induce biyecciones en  $\text{Obj}$  y en  $\text{Fl}$ , por lo tanto tiene inversa, y su inversa es funtor.  $\square$

**Definición 2.1.6.** Diremos que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  es la categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  para  $\Sigma$ , que  $P_\Sigma$  es el funtor canónico y llamaremos saturación de  $\Sigma$  al conjunto de morfismos  $\sigma$  de  $\mathcal{C}$  tales que  $P_\Sigma(\sigma)$  es inversible.

*Notación 2.1.7.* Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías,  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores.  $L$  es adjunto a izquierda de  $R$  si  $\forall A \in \text{Obj}\mathcal{C}, B \in \text{Obj}\mathcal{D}$  existe  $\psi_{AB} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(A), B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, R(B))$  biyección (natural en  $A$  y  $B$ ). Llamaremos a  $\psi$  un isomorfismo de adjunción de  $L$  a  $R$  y a su inversa  $\varphi_{AB} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, R(B)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(A), B)$  un isomorfismo de adjunción de  $R$  a  $L$ . Además, notaremos  $(L, R, \psi)$  a la situación anterior y la llamaremos una adjunción de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$ .

Sabemos que la existencia de esta adjunción es equivalente a que existan transformaciones naturales  $\Phi : LR \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  y  $\Psi : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$  tales que las composiciones:

$$L(A) \xrightarrow{L(\Psi_A)} LRL(A) \xrightarrow{\Phi_{L(A)}} L(A)$$

$$R(B) \xrightarrow{\Psi_{R(B)}} RLR(B) \xrightarrow{R(\Phi(B))} R(B)$$

son la identidad para todo objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  y todo objeto  $B$  de  $\mathcal{D}$ . Llamaremos a  $\Psi$  un morfismo de adjunción de  $L$  a  $R$  y a  $\Phi$  un morfismo de adjunción de  $R$  a  $L$ .

Diremos que  $\Psi$  es cuasi inverso a  $\Phi$  y que  $\Phi$  es cuasi inverso a  $\Psi$ .



**Lema 2.1.8.** Consideremos el siguiente diagrama de categorías

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{D} & \mathcal{D}' \\ & \searrow G & \nearrow F \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

y sea  $\phi : (FG)D \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}'}$  un morfismo de adjunción de  $D$  a  $FG$ . Si para toda categoría  $X$  el funtor  $G^* : \text{Hom}(\mathcal{D}, X) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, X)$  es plenamente fiel, entonces  $\phi$  es un morfismo de adjunción de  $GD$  a  $F$ .

*Demostración.* Sea  $\Psi : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow D(FG)$  un morfismo de adjunción cuasi inverso a  $\Phi$ . Como  $G\Psi \in \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ,  $G\Psi : G \rightarrow GDFG$  y  $G, GDFG$  son objetos de la imagen por  $G^*$  que es un funtor plenamente fiel (por hipótesis), se tiene que existe una única transformación natural  $\Psi' : \text{Id}_{\mathcal{D}} \rightarrow GDF$  tal que  $\Psi'G = G\Psi$ . Basta probar que  $\Psi'$  y  $\Phi$  son cuasi inversos.

Pero la composición

$$D \xrightarrow{\Psi D} DFGD \xrightarrow{D\Phi} D$$

al multiplicar por  $G$  a izquierda queda

$$GD \xrightarrow{G\Psi D} GDFGD \xrightarrow{GD\Phi} GD$$

y como  $D\Phi \circ \Psi D$  es la identidad de  $D$  y  $G\Psi = \Psi'G$  se tiene que  $GD\Phi \circ \Psi'GD = GD\Phi \circ G\Psi D$  es la identidad de  $GD$ .

Por otra parte, para ver que la composición

$$F \xrightarrow{F\Psi'} FGDF \xrightarrow{\Phi F} F$$

es la identidad de  $F$  basta ver que

$$FG \xrightarrow{F\Psi'G} FGDFG \xrightarrow{\Phi FG} FG$$

es la identidad de  $FG$  (pues  $G^*$  es plenamente fiel). Pero

$$\Phi FG \circ F\Psi'G = \Phi FG \circ FG\Psi = \text{Id}_{FG}$$

porque  $\Psi$  es cuasi inverso a  $\Phi$ . □

**Proposición 2.1.9.** Sea  $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  adjunto a derecha de  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y sea  $\Phi : GD \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  una transformación natural y  $\Sigma$  el conjunto de morfismos  $u$  de  $\mathcal{C}$  tales que  $Gu$  es inversible. Entonces son equivalentes:

- i)  $D$  es plenamente fiel.
- ii) El morfismo  $\Phi : GD \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  es inversible.
- iii)  $H : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $G = H \circ P_{\Sigma}$  es una equivalencia.
- iv) Para toda categoría  $X$  el funtor  $G^* : \text{Hom}(\mathcal{D}, X) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, X)$  es plenamente fiel.

*Demostración.*  $i) \Leftrightarrow ii)$  Para todo morfismo  $\alpha : d \rightarrow d'$  de  $\mathcal{D}$  tenemos

$$\alpha \circ \Phi_d = \Phi_{d'} \circ GD\alpha$$

(por ser  $\Phi$  una transformación natural), lo que es equivalente a la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(d, d') & \xrightarrow[\alpha \mapsto D(\alpha)]{D(d, d')} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Dd, Dd') \\ \alpha \mapsto \alpha \circ \Phi_d \downarrow (\Phi_d)^* & & \alpha \mapsto G(\alpha) \downarrow G(Dd, Dd') \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(GDd, d') & \xleftarrow[(\Phi_{d'})^*]{\alpha \mapsto \Phi_{d'} \circ \alpha} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(GDd, GDd') \end{array}$$

Pero la composición  $(\Phi_{d'})^* \circ G(Dd, Dd')$  (que manda  $\alpha \mapsto \Phi_{d'} \circ G(\alpha)$ ) es simplemente  $\varphi(Dd, d')$ , donde  $\varphi$  es el isomorfismo de adjunción asociado a  $\Phi$ . Se sigue que  $D(d, d')$  es una biyección  $\forall d, d'$  (o sea  $D$  es plenamente fiel) si y sólo si  $(\Phi_d)^*$  es biyección  $\forall d, d'$ , es decir, si y sólo si  $\Phi$  es inversible.

$ii) \Rightarrow iii)$  Por  $ii)$ ,  $H \circ (P_{\Sigma} \circ D) = (H \circ P_{\Sigma}) \circ D = G \circ D$  es isomorfo a  $\text{Id}_{\mathcal{D}}$ . Basta ver que  $(P_{\Sigma} \circ D) \circ H$  es isomorfo a  $\text{Id}_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}$ . En efecto, si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $G \circ F \simeq \text{Id}_{\mathcal{C}}$ ,  $F \circ G \simeq \text{Id}_{\mathcal{D}}$ , entonces existen isomorfismos naturales  $\Phi : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ ,  $\Psi : G \circ F \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$  y entonces  $F$  y  $G$  son equivalencias.

Como  $P_{\Sigma}^*$  es plenamente fiel por 2.1.5, basta ver que  $(P_{\Sigma} \circ D) \circ H \circ P_{\Sigma}$  es isomorfo a  $P_{\Sigma}$ . Ahora bien, sabemos que  $\Phi G \circ G \Psi$  es la identidad de  $G$  y como  $\Phi G$  es inversible, entonces  $G \Psi$  es inversible, luego  $P_{\Sigma} \Psi : P_{\Sigma} \rightarrow P_{\Sigma} D H P_{\Sigma}$  es un isomorfismo pues  $(P_{\Sigma} \Psi)_A = P_{\Sigma}(\Psi_A)$  y  $\Psi_A \in \Sigma$  por definición de  $\Sigma$  ya que  $G(\Psi_A)$  es inversible. Así,  $(P_{\Sigma} \circ D) \circ H \circ P_{\Sigma}$  es isomorfo a  $P_{\Sigma}$ .

$iii) \Rightarrow iv)$  Como  $H$  es una equivalencia, entonces  $H^*$  es plenamente fiel, y por lema 2.1.5,  $P_{\Sigma}^*$  es plenamente fiel, luego, como  $G = H \circ P_{\Sigma}$ , se tiene que  $G^* = P_{\Sigma}^* \circ H^*$ , de donde  $G^*$  es plenamente fiel.

$iv) \Rightarrow ii)$  Aplicamos el lema 2 al caso  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  el funtor identidad de  $\mathcal{D}$  (tomamos  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ ). Entonces,  $\Phi : GD \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  es un morfismo de adjunción de  $GD$  a  $\text{Id}_{\mathcal{D}}$  y entonces es inversible.  $\square$

Análogamente se puede probar el siguiente resultado dual.

**Proposición 2.1.10.** *Sea  $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  adjunto a izquierda de  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Sea  $\Psi : \text{Id}_{\mathcal{D}} \rightarrow GD$  un morfismo de adjunción de  $D$  a  $G$  y  $\Sigma$  el conjunto de morfismos  $u$  de  $\mathcal{C}$  tales que  $Gu$  es inversible. Entonces son equivalentes:*

- i)  $D$  es plenamente fiel.*
- ii) El morfismo  $\Psi : \text{Id}_{\mathcal{D}} \rightarrow GD$  es inversible.*
- iii)  $H : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $G = H \circ P_{\Sigma}$  es una equivalencia.*
- iv) Para toda categoría  $X$  el funtor  $G^* : \text{Hom}(\mathcal{D}, X) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, X)$  es plenamente fiel.*

**Proposición 2.1.11.** *Supongamos que se verifican las condiciones equivalentes de 2.1.9 y sea  $\tau : T \rightarrow \mathcal{D}$  un diagrama de  $\mathcal{D}$ . Entonces  $\varinjlim \tau$  existe si y sólo si  $\varinjlim GD\tau$  existe. Además, la existencia de  $\varinjlim D\tau$  implica la de  $\varinjlim \tau$  y la de los isomorfismos:*

$$\varinjlim \tau \simeq \varinjlim GD\tau \simeq G(\varinjlim D\tau)$$

También, la existencia de  $\varprojlim D\tau$  implica la de  $\varprojlim \tau$ .

*Demostración.* Como  $\Phi : GD \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  es inversible, entonces es un isomorfismo natural y se tiene un isomorfismo de diagramas  $GD\tau \rightarrow \tau$  inducido por  $\Phi$  (este isomorfismo se obtiene del diagrama

$$\begin{array}{ccc} GDA & \xrightarrow{GDf} & GDB \\ \Phi_A \downarrow & & \downarrow \Phi_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

y del hecho de que  $\Phi_A$  y  $\Phi_B$  son isomorfismos). Por lo tanto  $\varinjlim \tau$  existe si y sólo si  $\varinjlim GD\tau$  existe.

Como  $G$  es adjunto a izquierda de  $D$ , conmuta con colímites, y luego la existencia de  $\varinjlim D\tau$  implica la de  $\varinjlim GD\tau$  y por lo tanto la de  $\varinjlim \tau$  y la de los isomorfismos:

$$\varinjlim \tau \simeq \varinjlim GD\tau \simeq G(\varinjlim D\tau)$$

Sabemos que  $D$  conmuta con límites. Veamos que la existencia de  $\varinjlim D\tau$  implica la de  $\varprojlim \tau$ . Sea  $L = \varinjlim D\tau$ . Como  $D$  es plenamente fiel, basta ver que  $L$  es isomorfo a la imagen por  $D$  de un objeto de  $\mathcal{D}$  (en efecto, es fácil ver, usando la definición de límite, que este objeto de  $\mathcal{D}$  es el límite del diagrama  $\tau$ , pues por  $D$  pasamos a  $\mathcal{C}$  y  $\varprojlim D\tau$  y usamos  $D$  plenamente fiel para volver).

Si  $\Psi$  es un morfismo de adjunción cuasi inverso a  $\Phi$  basta probar que  $\Psi_L : L \rightarrow DGL$  es inversible. Pero para cada objeto  $t$  de  $T$ , existe un único morfismo  $p_t : GL \rightarrow \tau_t$  tal que  $\text{pr}_t = Dp_t \circ \Psi_t$ , (donde  $\text{pr}_t : L \rightarrow D\tau_t$  son los morfismos dados por la existencia de  $\varinjlim D\tau$ ), de hecho, con la notación usual,  $p_t$  es la imagen de  $\text{pr}_t$  por  $\varphi(L, \tau_t)$ . Por unicidad de los morfismos  $p_t$ ,  $(p_t)_t$  es un cono proyectivo con vértice  $GL$  y base  $\tau$  (es decir, todo conmuta). Entonces existe un morfismo  $p : DGL \rightarrow L$  tal que  $\text{pr}_t \circ p = Dp_t$ . Luego  $\text{pr}_t \circ p \circ \Psi_L = Dp_t \circ \Psi_L = \text{pr}_t \forall T$ . Se sigue que  $p \circ \Psi_L = \text{Id}_L$  (por unicidad) y si llamamos  $L' = DGL$ ,  $i = \Psi_L$ , las igualdades  $\Psi_{L'} \circ i = DGi \circ \Psi_L$  y  $\Psi_L \circ p = DGp \circ \Psi_{L'}$  (que salen del hecho que  $\Psi$  es transformación natural) implican que  $p \circ (\Psi_{L'})^{-1} \circ DGi$  es una inversa de  $\Psi_L$  (notar que  $\Psi_{L'} = \Psi_{DGL}$  es inversible pues la composición  $D\Phi_{GL} \circ \Psi_{D(GL)}$  es la identidad y  $D\Phi_{GL}$  es inversible por ser  $\text{Phi}_{GL}$  inversible por hipótesis). En efecto,

$$\begin{aligned} \Psi_L \circ p \circ (\Psi_{L'})^{-1} \circ DGi &= DGp \circ \Psi_{L'} \circ (\Psi_{L'})^{-1} \circ DGi = DG(p \circ i) = \\ &= DG(p \circ \Psi_L) = DG(\text{Id}_L) = \text{Id}_{DGL} \end{aligned}$$

$$p \circ (\Psi_{L'})^{-1} \circ DGi \circ \Psi_L = p \circ (\Psi_{L'})^{-1} \Psi_{L'} \circ i = p \circ i = p \circ \Psi_L = \text{Id}_L$$

Así,  $\Psi_L$  es inversible. □

## Hausdorffización

Sea  $Top$  la categoría de espacios topológicos y funciones continuas y sea  $Haus$  la subcategoría plena de  $Top$  cuyos objetos son los espacios topológicos Hausdorff. Nos proponemos caracterizar los límites y colímites en  $Haus$  haciendo uso de los de  $Top$ . Para ello, usaremos 2.1.9.

Sea  $D : Haus \rightarrow Top$  la inclusión (notar que  $D$  es plenamente fiel). Construiremos un funtor  $G$  adjunto a izquierda de  $D$  como sigue. Dado un espacio topológico  $X$ ,  $GX$  es ‘el cociente Hausdorff más grande de  $X$ ’, o sea, definimos

$$\mathcal{R} = \{R \text{ relación de equivalencia en } X \text{ tal que } X/R \text{ es Hausdorff}\}$$

(notar que  $\mathcal{R} \neq \emptyset$ , pues  $R = X \times X \in \mathcal{R}$  ya que  $X/R = *$  que es Hausdorff). Sea  $S = \bigcap_{R \in \mathcal{R}} R$  (notar que  $S$  es relación de equivalencia). Tomamos  $GX = X/S$ .

**Lema 2.1.12.** *Sean  $X$  un espacio topológico,  $Y$  un espacio topológico Hausdorff, y  $f : X \rightarrow Y$  continua. Entonces  $f$  está bien definida en el cociente  $X/S = GX$ , es decir, existe un único  $\bar{f} : X/S \rightarrow Y$  tal que  $\bar{f} \circ q = f$ , donde  $q : X \rightarrow X/S$  es la función cociente.*

*Demostración.* Notemos primero que la unicidad es clara pues  $q$  es sobreyectiva. Hay que ver que si  $aSb \Rightarrow f(a) = f(b)$ . Definimos en  $X$  la relación  $\sim_f$  dada por

$$x_0 \sim_f x'_0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(x'_0)$$

Es claro que es una relación de equivalencia. Veamos que  $X/\sim_f$  es Hausdorff. Sean  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \in X/\sim_f$ , o sea,  $x_1 \not\sim_f x_2$ , es decir,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Como  $Y$  es Hausdorff, existen  $U_1, U_2$  abiertos de  $Y$  tales que  $f(x_1) \in U_1, f(x_2) \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Luego,  $x_1 \in f^{-1}(U_1), x_2 \in f^{-1}(U_2), f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$ . Es claro que

$$q(x_1) = \bar{x}_1 \in q(f^{-1}(U_1))$$

y

$$q(x_2) = \bar{x}_2 \in q(f^{-1}(U_2))$$

Además, por cómo es  $\sim_f$  se tiene que  $q(f^{-1}(U_1)) \cap q(f^{-1}(U_2)) = \emptyset$  y  $q(f^{-1}(U_1)), q(f^{-1}(U_2))$  son abiertos en  $X/\sim_f$  pues  $q^{-1}(q(f^{-1}(U_j))) = f^{-1}(U_j)$  es abierto en  $X$  para  $j = 1, 2$  (esta igualdad se deduce fácilmente de la definición de  $q$  y  $\sim_f$ ). Así,  $X/\sim_f$  es Hausdorff.

Supongamos  $f(a) \neq f(b)$ , entonces  $a \not\sim_f b$ , luego,  $a \notin Sb$ , absurdo.  $\square$

Notemos que del lema se deduce que  $X/S$  es Hausdorff (también puede verse esto ‘a mano’). En efecto, supongamos  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \in X/S$  entonces  $x_1 \notin Sx_2$ , luego, existe  $R \in \mathcal{R}$  tal que  $x_1 \notin Rx_2$ . Llamemos  $q_R : X \rightarrow X/R$  a la función cociente. Como  $q_R$  es continua y  $X/R$  es Hausdorff,  $q_R$  pasa al cociente  $X/S$  como  $\bar{q} : X/S \rightarrow X/R$ . Ahora bien,

$$\bar{q}(q(x_1)) = q_R(x_1) \neq q_R(x_2) = \bar{q}(q(x_2))$$

y como  $X/R$  es Hausdorff, existen  $U_1$  y  $U_2$  abiertos que separan  $\bar{q}(q(x_1))$  y  $\bar{q}(q(x_2))$ , luego,  $\bar{q}^{-1}(U_1)$  y  $\bar{q}^{-1}(U_2)$  son abiertos disjuntos que separan  $q(x_1) = \bar{x}_1$  y  $q(x_2) = \bar{x}_2$ .

Para terminar de definir el funtor  $G$ , hay que definirlo sobre los morfismos. Sean  $X, Y$  espacios topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  continua. Llamando  $q_Y : Y \rightarrow Y/S_Y = GY$  a la función cociente, tenemos  $q_Y \circ f : X \rightarrow Y/S_Y$  y  $GY$  es Hausdorff, entonces por el lema, existe  $\overline{q_Y \circ f} : GX \rightarrow GY$ . Definimos  $Gf = \overline{q_Y \circ f} : GX \rightarrow GY$ . Además, usando el lema, es fácil ver que  $G$  es un funtor.

Veamos que  $G$  es adjunto a izquierda de  $D$ . Sean  $X, Y$  espacios topológicos, con  $Y$  Hausdorff. Se tienen las biyecciones:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{H}aus}(GX, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y) \\ f : GX \rightarrow Y &\mapsto f \circ q : X \rightarrow Y \\ \bar{g} : GX \rightarrow Y &\longleftarrow g : X \rightarrow Y \end{aligned}$$

Notar que del lema anterior se deduce que son biyectivas y mutuamente inversas.

Sea  $\tau : T \rightarrow \mathcal{H}aus$  un diagrama pequeño. Por 2.1.11 los límites en  $\mathcal{H}aus$  coinciden con los de  $\mathcal{T}op$ . Más aún,  $\varinjlim \tau$  existe y se identifica con el cociente Hausdorff más grande de  $\varinjlim D\tau$ .

### Espacios de Kelley

Un espacio topológico Hausdorff  $X$  se llamará un espacio de Kelley si tiene la topología final respecto de las inclusiones de sus subespacios compactos, es decir si para todo  $F \subseteq X$  vale:  $F$  es cerrado en  $X$  si y sólo si  $F \cap K$  es cerrado en  $X$  para todo compacto  $K$  de  $X$ .

Es conocido que espacios localmente compactos y Hausdorff son espacios de Kelley, que suma directa de espacios de Kelley es un espacio de Kelley y que subespacios cerrados y cocientes Hausdorff de espacios de Kelley son espacios de Kelley.

Notaremos  $\mathcal{K}e$  a la subcategoría plena de  $\mathcal{T}op$  cuyos objetos son los espacios de Kelley.

Si  $Y$  es un espacio topológico Hausdorff,  $Y_{\mathcal{K}e}$  será el espacio topológico con el mismo conjunto base que  $Y$  y con la siguiente topología:  $F$  es cerrado en  $Y_{\mathcal{K}e}$  si y sólo si  $F \cap K$  es cerrado en  $Y$  para todo  $K$  compacto de  $Y$ . Es fácil ver que esto define una topología en  $Y$  (pues como  $Y$  es Hausdorff, los compactos son cerrados, y de aquí se obtiene que  $Y$  es cerrado en  $Y_{\mathcal{K}e}$  y el resto es evidente). Además, es claro que la topología de  $Y_{\mathcal{K}e}$ , es más fina que la de  $Y$ , y, en particular, los compactos en  $Y_{\mathcal{K}e}$  son compactos en  $Y$ . Por lo tanto,  $Y_{\mathcal{K}e}$  resulta un espacio de Kelley.

Además, si  $X$  es un espacio de Kelley e  $Y$  es Hausdorff, las funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  se factorizan por  $Y_{\mathcal{K}e}$ : en efecto, veamos que  $\bar{f} : X \rightarrow Y_{\mathcal{K}e}$  definida como  $f$  es continua. Sea  $F$  cerrado en  $Y_{\mathcal{K}e}$ , queremos ver que  $\bar{f}^{-1}(F) = f^{-1}(F)$  es cerrado en  $X$ . Basta ver que  $f^{-1}(F) \cap K$  es cerrado en  $X$  para todo  $K$  compacto de  $X$ . Sea  $K$  compacto de  $X$ , basta ver que  $f^{-1}(F) \cap K$  es cerrado en  $K$ , pues  $K$  es cerrado en  $X$ , pero  $f^{-1}(F) \cap K = f|_K^{-1}(F)$  y  $f|_K : K \rightarrow Y$  continua (pero  $F$  no tiene por qué ser cerrado en  $Y$ ). Ahora bien,  $f(K)$  es compacto en  $Y$ , luego  $F \cap f(K)$  es cerrado en  $Y$  (pues  $F$  es cerrado en  $Y_{\mathcal{K}e}$ ), entonces  $f|_K^{-1}(F \cap f(K))$  es cerrado en  $K$ , pero

$$f|_K^{-1}(F \cap f(K)) = f|_K^{-1}(F) \cap f|_K^{-1}(f(K)) = f|_K^{-1}(F) \cap K = f|_K^{-1}(F)$$

Así,  $f|_K^{-1}(F)$  es cerrado en  $K$ . Luego,  $f = i \circ \bar{f}$ , con  $i : Y_{\mathcal{K}e} \rightarrow Y$  continua pues la topología de  $Y_{\mathcal{K}e}$  es más fina que la de  $Y$ .

Un enunciado equivalente de esta propiedad es que el funtor  $Y \mapsto Y_{\mathcal{K}e}$  es adjunto a derecha de la inclusión de  $\mathcal{K}e$  en  $\mathcal{H}aus$ . En efecto, llamemos  $F_{\mathcal{K}e}$  al funtor  $Y \mapsto Y_{\mathcal{K}e}$  y  $R$  a la inclusión de  $\mathcal{K}e$  en  $\mathcal{H}aus$ . Sea  $A \in \mathcal{K}e$  y  $B \in \mathcal{H}aus$ . Tenemos la biyección natural

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{K}e}(A, F_{\mathcal{K}e}(B)) & \longleftrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{H}aus}(R(A), B) \\ f & \longmapsto & i_{B_{\mathcal{K}e}B} \circ f \\ \bar{f} & \longleftarrow & f \end{array}$$

Se sigue de los lemas y proposiciones anteriores que la categoría  $\mathcal{K}e$  admite límites y colímites y se pueden describir como sigue.

Sea  $R' : \mathcal{K}e \rightarrow \mathcal{T}op$  la inclusión y  $d : T \rightarrow \mathcal{K}e$  un diagrama pequeño. Entonces  $\varinjlim d$  es el cociente Hausdorff más grande de  $\varinjlim R' \circ d$  (y este cociente es un espacio de Kelley). En efecto,

$$\varinjlim_{(\mathcal{H}aus)} R \circ d = R(\varinjlim_{(\mathcal{K}e)} F_{\mathcal{K}e}(R(d))) = R(\varinjlim_{(\mathcal{K}e)} d)$$

y vimos que  $\varinjlim_{(\mathcal{H}aus)} R \circ d$  es el cociente hausdorff más grande de  $\varinjlim_{(\mathcal{T}op)} R' \circ d$ . En particular, si  $\varinjlim_{(\mathcal{T}op)} R' \circ d$  es hausdorff,  $\varinjlim_{(\mathcal{K}e)} d$  coincide con  $\varinjlim_{(\mathcal{T}op)} R' \circ d$ .

Similarmente se tiene  $\varprojlim_{(\mathcal{K}e)} d \simeq (\varprojlim_{(\mathcal{T}op)} R \circ d)_{\mathcal{K}e}$ . Usamos el dual de 2.1.11. Si  $\varprojlim_{(\mathcal{H}aus)} Rd$  existe, entonces  $\varprojlim_{(\mathcal{K}e)} d$  existe y se tiene

$$\varprojlim_{(\mathcal{K}e)} d \simeq F_{\mathcal{K}e}(\varprojlim_{(\mathcal{H}aus)} Rd) \simeq (\varprojlim_{(\mathcal{H}aus)} d)_{\mathcal{K}e}$$

Luego, el conjunto base del límite en  $\mathcal{K}e$  es el límite de los conjuntos bases, pero la topología es más fina que la del límite.

Como un espacio de Kelley  $X$  es el colímite (en  $\mathcal{T}op$  o  $\mathcal{K}e$ ) de sus subespacios compactos  $K$ , cada subconjunto abierto  $U$  de  $X$  es el colímite de subespacios localmente compactos  $K \cap U$ . Entonces, un subconjunto abierto de un espacio de Kelley es un espacio de Kelley.

## Grupoides

Sean  $\mathcal{C}$  es una categoría pequeña y  $\Sigma$  la clase de todos los morfismos de  $\mathcal{C}$ . Entonces la categoría  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  es un grupoide. Decimos que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  es el grupoide asociado a  $\mathcal{C}$ . Es claro que el funtor  $F : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{G}rpd$  que manda una categoría pequeña  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  (con  $\Sigma$  el conjunto de morfismos de  $\mathcal{C}$ ) es adjunto a izquierda de la inclusión  $i$  de  $\mathcal{G}rpd$  en  $\mathcal{C}at$ , pues si  $A$  es un objeto de  $\mathcal{C}at$  y  $B$  es un objeto de  $\mathcal{G}rpd$  se tiene biyección

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}rpd}(F(A), B) & \longleftrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}at}(A, i(B)) \\ G & \longmapsto & G \circ P_{\text{Fl}(A)} \\ G & \longleftarrow & H \end{array} \quad \text{donde } H = G \circ P_{\text{Fl}(A)}$$

Similarmente, para cada categoría  $\mathcal{C}$ , sea  $\mathcal{C}^*$  la subcategoría de  $\mathcal{C}$  con los mismos objetos, y cuyos morfismos son los isomorfismos de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\mathcal{C}^*$  es grupoide, y si llamamos  $\tilde{F} : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{G}rpd$  al funtor que manda  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{C}^*$ , se tiene que  $\tilde{F}$  es adjunto a derecha de  $i$ . Si  $A$  es un objeto de  $\mathcal{G}rpd$  y  $B$  es un objeto de  $\mathcal{C}at$ , se tiene biyección

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(A), B) & \longleftrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{G}rpd}(A, \tilde{F}(B)) \\ G & \longmapsto & G : A \rightarrow B^* \\ G & \longleftarrow & G \end{array} \quad (\text{como } A \text{ es un grupoide, } G(A) \subseteq B^*)$$

Apliquemos ahora 2.1.9 y 2.1.11. Como la inclusión  $i : \mathcal{G}rpd \rightarrow \mathcal{C}at$  es plenamente fiel y tiene adjunto a izquierda y como todo diagrama pequeño de  $\mathcal{C}at$  tiene colímite, entonces también todo diagrama pequeño de  $\mathcal{G}rpd$  tendrá colímite. Más aún,  $i$  conmuta con colímites porque tiene adjunto a derecha. En otras palabras, si  $d : T \rightarrow \mathcal{C}at$  es un diagrama pequeño y  $d(t)$  es un grupoide  $\forall t \in \text{Obj}(T)$ , entonces el colímite de  $d$  en  $\mathcal{C}at$  es un grupoide y es el colímite del diagrama  $d' : T \rightarrow \mathcal{G}rpd$  inducido por  $d$  (pues sabemos que  $\lim_{\rightarrow(\mathcal{G}rpd)} d'$  y  $\lim_{\rightarrow(\mathcal{C}at)} d$  existen y  $\lim_{\rightarrow(\mathcal{C}at)} d = i(\lim_{\rightarrow(\mathcal{G}rpd)} d') = \lim_{\rightarrow(\mathcal{G}rpd)} d$  que es un grupoide).

Por otra parte, como la inclusión  $i$  tiene adjunto a derecha y es plenamente fiel y como todo diagrama pequeño de  $\mathcal{C}at$  tiene límite, esto también vale para  $\mathcal{G}rpd$ . Más aún,  $i$  conmuta con límites porque tiene adjunto a izquierda. Entonces los límites en  $\mathcal{G}rpd$  se pueden construir como los de  $\mathcal{C}at$ , o sea  $\lim_{\rightarrow(\mathcal{C}at)} i \circ d' = i(\lim_{\rightarrow(\mathcal{G}rpd)} d')$ .

**Nota importante 2.1.13 (Consideraciones conjuntísticas).** Si  $\mathcal{C}$  es una categoría pequeña, toda localización  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  de  $\mathcal{C}$  existe. Además, no es difícil de ver que  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  existe cuando  $\Sigma$  es un conjunto. Sin embargo, cuando  $\Sigma$  no es un conjunto, la existencia de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  es una pregunta delicada de la teoría de conjuntos.

Las referencias usuales sobre localización de categorías (entre ellas [3]) ignoran estos problemas conjuntísticos. Algunos matemáticos (siguiendo a Grothendieck) evitan estas dificultades imaginando la existencia de un universo más grande en el cual  $\mathcal{C}$  es pequeña y construyendo la localización en ese universo. Sin embargo, la pregunta sobre la existencia de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  en ‘nuestro universo’ es importante para otras escuelas de pensamiento y, en particular, para los topólogos, que necesitan localizar respecto a teorías de homología.

## 2.2. El cálculo de fracciones

Volvamos a la situación de 2.1.9. Sean  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores,  $G$  adjunto a izquierda de  $D$  y sea  $\phi : GD \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  una transformación natural. Veremos primero una construcción simple de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  por medio del functor  $DG$  y de una transformación natural  $\psi : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow DG$  cuasi inversa a  $\phi$ .

Para ello asociemos a cada morfismo  $\gamma : c \rightarrow DGc'$  de  $\mathcal{C}$  el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} c & & c' \\ & \searrow \gamma & \swarrow \psi_{c'} \\ & DGc' & \end{array}$$

Como  $\psi$  es cuasi inverso a  $\phi$ ,  $\phi G \circ G\psi$  es la identidad de  $G$ , entonces  $G\psi$  es un isomorfismo (pues  $\phi$  es isomorfismo por hipótesis de 2.1.9) y entonces  $P_{\Sigma}\psi$  es un isomorfismo. En particular tenemos una función

$$\gamma \mapsto \gamma_* = (P_{\Sigma}\psi_{c'})^{-1} \circ P_{\Sigma}(\gamma)$$

de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, DGc')$  a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}(c, c')$ .

**Lema 2.2.1.** *La función  $\gamma \mapsto \gamma_*$  es una biyección de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, DGc')$  a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}(c, c')$ .*

*Demostración.* Si definimos  $H$  por la ecuación  $g = H \circ P_\Sigma$ , se sigue que

$$H(c, c')\gamma_* = (HP_\Sigma\Psi_{c'})^{-1} \circ (HP_\Sigma(\gamma)) = (G\psi_{c'})^{-1} \circ G(\gamma)$$

y como  $(G\psi_{c'})^{-1} = \phi Gc'$  (pues  $\phi Gc' \circ G\psi_{c'} = \text{Id}_{c'}$  y por hipótesis  $\phi Gc'$  es un isomorfismo) se tiene que

$$H(c, c')(\gamma_*) = \phi Gc' \circ G(\gamma) = \varphi(c, Gc')(\gamma)$$

donde  $\varphi(c, Gc') : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, DGc') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Gc, Gc')$  es el isomorfismo de adjunción asociado a  $\phi$ . Como  $H(c, c')$  es una biyección, esto completa la demostración.  $\square$

Por lo tanto podemos identificar el conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}(c, c')$  con  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, DGc')$ . Si  $\gamma : c \rightarrow DGc'$  y  $\gamma' : c' \rightarrow DGc''$  son dos morfismos de  $\mathcal{C}$ , tenemos que la composición  $\gamma'_* \circ \gamma_*$  es de la forma  $\gamma''_*$ , donde  $\gamma'' = (\psi_{DGc''})^{-1} \circ DG\gamma' \circ \gamma$ , en efecto,

$$\gamma''_* = (P_\Sigma\psi_{c''})^{-1} \circ P_\Sigma((\psi_{DGc''})^{-1} \circ DG\gamma' \circ \gamma) = (P_\Sigma\psi_{c''})^{-1} \circ P_\Sigma((\psi_{DGc''})^{-1} \circ DG\gamma') \circ P_\Sigma\gamma$$

y como  $\psi$  es una transformación natural se tiene que  $(\psi_{DGc''})^{-1} \circ DG\gamma' = \gamma' \circ \psi_{c'}^{-1}$  y entonces

$$\gamma''_* = (P_\Sigma\psi_{c''})^{-1} \circ P_\Sigma(\gamma' \circ \psi_{c'}^{-1}) \circ P_\Sigma\gamma = (P_\Sigma\psi_{c''})^{-1} \circ P_\Sigma\gamma' \circ P_\Sigma\psi_{c'}^{-1} \circ P_\Sigma\gamma = \gamma'_* \circ \gamma_*$$

Esto viene del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & c & & c' & & c'' \\
 & & \searrow \gamma & & \swarrow \psi'_c & & \swarrow \gamma' & & \swarrow \psi_{c''} \\
 & & DGc' & & & & DGc'' & & \\
 & & \searrow DG\gamma' & & \swarrow \psi_{DGc''} & & & & \\
 & & & & DG DGc'' & & & & 
 \end{array}$$

Generalizamos ahora esta idea. Consideremos las subclases  $\Sigma$  de  $\text{Mor}\mathcal{C}$  tales que:

- Las identidades de  $\mathcal{C}$  están en  $\Sigma$
- Si  $u : X \rightarrow Y, v : Y \rightarrow Z$  están en  $\Sigma$ , entonces  $v \circ u \in \Sigma$
- Dado  $s : X \rightarrow X'$ , con  $s \in \Sigma$  y  $u : X \rightarrow Y$ , existen  $Y'$  objeto de  $\mathcal{C}$ ,  $t : Y \rightarrow Y'$ ,  $t \in \Sigma$  y  $u' : X' \rightarrow Y'$  tales que  $tu = u's$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y \\
 s \downarrow & & \downarrow t \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y'
 \end{array}$$



- d) Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son morfismos de  $\mathcal{C}$  y  $s : X \rightarrow X'$  es un morfismo de  $\Sigma$  tal que  $fs = gs$ , entonces existe un morfismo  $t : Y \rightarrow Y'$  en  $\Sigma$  tal que  $tf = tg$

$$X' \xrightarrow{s} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y \xrightarrow{t} Y'$$

**Definición 2.2.2.** Cuando a), b), c) y d) se satisfacen decimos que  $\Sigma$  admite un cálculo de fracciones a izquierda.

Si  $\Sigma$  satisface a) y b), decimos que  $\Sigma$  es multiplicativamente cerrada.

La condición c) se llama condición de Ore.

Cuando  $\Sigma$  admite un cálculo de fracciones a izquierda tenemos la siguiente descripción de los morfismos de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ .

Llamaremos a un diagrama de  $\mathcal{C}$  de la forma

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y$$

con  $s \in \Sigma$ , una fracción a izquierda y lo notaremos  $s \setminus f$  o  $s^{-1}f$ . Notaremos por  $H(X, Y)$  a la clase de todas estas fracciones, donde  $s \in \Sigma$  y  $Z$  son cualesquiera.

Consideramos en  $H(X, Y)$  la siguiente relación (de equivalencia):  $s \setminus f \sim s' \setminus f'$  si y sólo si existe una fracción

$$X \xrightarrow{g} Z_3 \xleftarrow{t} Y$$

con  $t \in \Sigma$  y un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_2 & & \\ & f' \nearrow & \downarrow b & \nwarrow s' & \\ X & \xrightarrow{g} & Z_3 & \xleftarrow{t} & Y \\ & f \searrow & \uparrow a & \swarrow s & \\ & & Z_1 & & \end{array}$$

Es decir, si existen  $a, b$  en  $\mathcal{C}$  tales que  $af = bf'$  y  $as = bs' \in \Sigma$ . Veamos que es una relación de equivalencia. La reflexividad y simetría son triviales. Veamos la transitividad. Supongamos que  $s \setminus f \sim s' \setminus f'$  y  $s' \setminus f' \sim s'' \setminus f''$  y que tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_2 & & \\ & f'' \nearrow & \downarrow b' & \nwarrow s'' & \\ & g' \nearrow & Z_4 & \nwarrow t' & \\ X & \xrightarrow{f'} & Z_1 & \xleftarrow{s'} & Y \\ & f \searrow & \downarrow b & \swarrow s & \\ & g \searrow & Z_3 & & \\ & & \uparrow a & & \\ & & Z_0 & & \end{array}$$

Por c) aplicado a las flechas  $t$  y  $t'$  obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{t'} & Z_4 \\ t \downarrow & & \downarrow u \\ Z_3 & \xrightarrow{h} & W \end{array}$$

con  $u \in \Sigma$ . Tenemos  $ut' = ht$ , luego  $ua's' = hbs'$ , y entonces, por d), existe  $\tilde{t} : W \rightarrow V$  tal que  $\tilde{t}ua' = \tilde{t}hb$  y  $\tilde{t} \in \Sigma$ . Consideremos

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_2 & & \\ & f'' \nearrow & \downarrow \tilde{t}ub' & \nwarrow s'' & \\ X & \longrightarrow & V & \longleftarrow & Y \\ & f \searrow & \uparrow \tilde{t}ha & \swarrow s & \\ & & Z_1 & & \end{array}$$

Tenemos que  $\tilde{t}has = \tilde{t}ht = \tilde{t}ut' = \tilde{t}ub's''$  y este morfismo pertenece a  $\Sigma$  pues como  $\tilde{t}, u, t' \in \Sigma$ , por b),  $\tilde{t}ut' \in \Sigma$ . También,  $\tilde{t}haf = \tilde{t}hb'f' = \tilde{t}ua'f' = \tilde{t}ub'f''$ . Así,  $\sim$  es relación de equivalencia. Notaremos  $\text{Hom}_\Sigma(X, Y) = H(X, Y) / \sim$ .

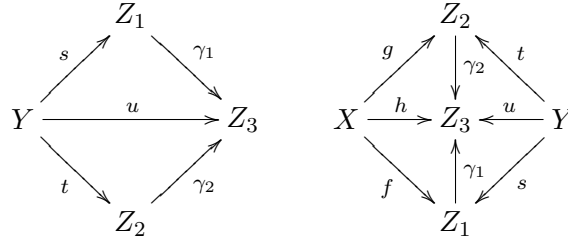
**Nota importante 2.2.3 (Consideraciones conjuntísticas).** No hay razón a priori para que  $\text{Hom}_\Sigma(X, Y)$  sea un conjunto. Para que lo sea, podemos pedirle a  $\Sigma$  que sea localmente pequeño a izquierda, esto es, que para todo  $Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  exista un conjunto  $\Sigma_Y$  de morfismos de  $\Sigma$ , todos con dominio  $Y$ , tal que para todo  $\alpha : Y \rightarrow Z \in \Sigma$ , existe  $\beta : Z \rightarrow Z_1$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $\beta\alpha : Y \rightarrow Z_1 \in \Sigma_Y$ . Veamos que si  $\Sigma$  es localmente pequeño a izquierda, entonces  $\text{Hom}_\Sigma(X, Y)$  es un conjunto para todo  $X, Y$ . Para ello consideramos a  $\Sigma_Y$  como los objetos de una categoría pequeña, donde un morfismo  $\gamma$  de  $s : Y \rightarrow Z_1$  a  $t : Y \rightarrow Z_2$  será un morfismo  $\gamma : Z_1 \rightarrow Z_2$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $\gamma s = t$ . La condición c) (condición de Ore) dice que  $\Sigma_Y$  es una categoría filtrante.

Sea  $H^s(X, Y)$  el conjunto de las fracciones  $s \setminus f$ . Notar que es un conjunto pues está en biyección con  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{rg}(s))$ . Consideremos el funtor  $F : \Sigma_Y \rightarrow \text{Set}$  que manda  $s : Y \rightarrow Z$  a  $H^s(X, Y)$  y que manda un morfismo  $\gamma : Z_1 \rightarrow Z_2$  de  $s : Y \rightarrow Z_1$  a  $t : Y \rightarrow Z_2$  a la función que manda  $s \setminus f \mapsto t \setminus (\gamma \circ f)$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z_1 \xleftarrow{s} Y \\ & & \downarrow \gamma \swarrow t \\ & & Z_2 \end{array}$$

Es fácil ver que  $\text{Hom}_\Sigma(X, Y) = \text{colim}_{s \in \Sigma_Y} F(s)$ , pues  $\Sigma_Y$  es una categoría filtrante y de los

diagramas



(donde  $h = \gamma_2 \circ g = \gamma_1 \circ f$ ) y notando que

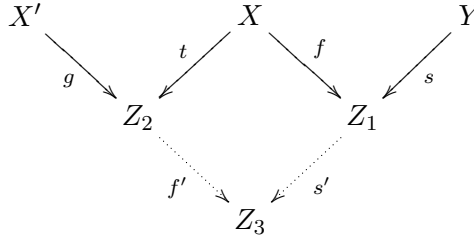
$$s \setminus f \xrightarrow{F(\gamma_1)} u \setminus (\gamma_1 \circ f) \quad t \setminus g \xrightarrow{F(\gamma_2)} u \setminus (\gamma_2 \circ f)$$

vemos que  $s \setminus f$  y  $t \setminus g$  ‘se igualan más adelante’ si y sólo si  $s \setminus f \sim t \setminus g$  en el sentido visto antes. Notar que para la vuelta,  $u$  en principio pertenece a  $\Sigma$  y no a  $\Sigma_Y$ , pero usando  $\Sigma$  localmente pequeño y componiendo con un  $\beta$  adecuado conseguimos  $\beta u \in \Sigma_Y$ .  $\square$

Veamos ahora cómo se componen las fracciones en  $\text{Hom}_\Sigma(X, Y)$ . Definimos la composición de la siguiente manera

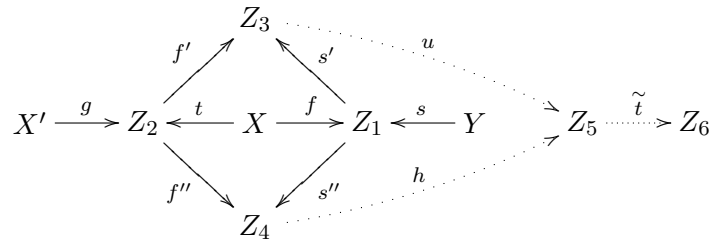
$$s \setminus f \circ t \setminus g = ss' \setminus f'g$$

donde  $s' \in \Sigma$  y  $f' \in \text{Fl}(\mathcal{C})$  son morfismos tales que  $s'f = f't$ :



Veamos que la composición queda bien definida. Probaremos primero que no depende de la elección de  $f'$  y  $s'$ .

Supongamos  $f''$  y  $s''$  es otra elección. Queremos ver que  $s's \setminus f'g \sim s''s \setminus f''g$ . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo de flechas sólidas.



Aplicamos c) al diagrama formado por  $s'$  y  $s''$  para obtener  $u$  y  $h$  tales que  $us' = hs''$  con  $u \in \Sigma$ . Luego,  $us'f = hs''f$  y entonces  $uf't = hf''t$  y por lo tanto, por d) existe  $\tilde{t}$  tal que

$\tilde{t}uf' = \tilde{t}hf''$ . Además,  $\tilde{t}us' = \tilde{t}hs'' \in \Sigma$  (pues  $\tilde{t}, u, s' \in \Sigma$ ) y se tiene

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_2 & & \\
 & f'g \nearrow & \downarrow \tilde{t}u & \nwarrow s's & \\
 X' & \xrightarrow{\alpha} & Z_6 & \xleftarrow{\beta} & Y \\
 & f''g \searrow & \uparrow \tilde{t}h & \swarrow s''s & \\
 & & Z_4 & & 
 \end{array}$$

(donde  $\alpha = \tilde{t}uf' = \tilde{t}hf''$  y  $\beta = \tilde{t}us's = \tilde{t}hs''s \in \Sigma$ ) de donde  $s's \setminus f'g \sim s''s \setminus f''g$ .

Queremos ver ahora que si  $s \setminus f \sim s' \setminus f'$  entonces  $s \setminus f \circ t \setminus g \sim s' \setminus f' \circ t \setminus g$ . Para esto necesitaremos de un lema previo.

**Lema 2.2.4.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\Sigma$  una clase de morfismos de  $\mathcal{C}$  multiplicativamente cerrada y que cumple la condición de Ore. Entonces, dados  $f_i : X_i \rightarrow Y$  y  $s_i : X_i \rightarrow X'_i$  morfismos de  $\mathcal{C}$  con  $1 \leq i \leq n$ , con  $s_i \in \Sigma \forall i$ , existen  $g_i : X'_i \rightarrow Y'$  y  $t : Y \rightarrow Y'$  morfismos de  $\mathcal{C}$  con  $1 \leq i \leq n$  y  $t \in \Sigma$  tales que  $g_i s_i = t f_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \xrightarrow{f_i} & Y \\
 s_i \downarrow & \parallel & \downarrow t \\
 X'_i & \xrightarrow{g_i} & Y'
 \end{array}$$

*Demostración.* Caso  $n = 2$ : Por c) existen morfismos  $t_1, t_2, h_1, h_2$ , con  $t_1, t_2 \in \Sigma$  tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y \\
 s_1 \downarrow & & \downarrow t_1 \\
 X'_1 & \xrightarrow{h_1} & Y'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \\
 s_2 \downarrow & & \downarrow t_2 \\
 X'_2 & \xrightarrow{h_2} & Y'
 \end{array}$$

conmutan. Aplicando c) al diagrama formado por  $t_1$  y  $t_2$  obtenemos  $t'_1 : Z_1 \rightarrow Y'$  y  $t'_2 : Z_2 \rightarrow Y'$  con  $t'_1 \in \Sigma$  tales que  $t'_1 t_1 = t'_2 t_2$ . Sea  $t = t'_1 t_1 = t'_2 t_2$ . Notemos que  $t : Y \rightarrow Y'$  y que  $t \in \Sigma$  pues  $t_1, t'_1 \in \Sigma$ . Sean  $g_i = t'_i h_i : X'_i \rightarrow Y'$  para  $i = 1, 2$ . Obtenemos que  $g_i s_i = t'_i h_i s_i = t'_i t_i f_i = t f_i$  para  $i = 1, 2$ .

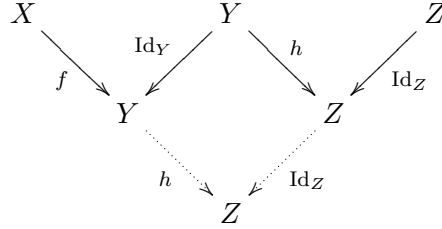
El caso general se obtiene usando el caso  $n = 2$  y aplicando inducción.  $\square$

Usando el lema terminaremos de probar que la composición está bien definida. Con-

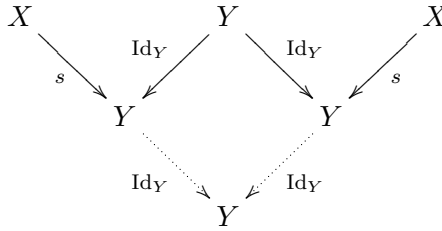


**Teorema 2.2.5 (Gabriel-Zisman).** Si  $\Sigma$  admite un cálculo de fracciones a izquierda y es localmente pequeño a izquierda, entonces la categoría  $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$  construída como arriba existe y es una localización de  $\mathcal{C}$  con respecto a  $\Sigma$ . Además, el funtor  $q : \mathcal{C} \rightarrow \Sigma^{-1}\mathcal{C}$ , correspondiente a la localización, le asigna a cada  $f : X \rightarrow Y$  la fracción  $\text{Id}_Y \setminus f$ .

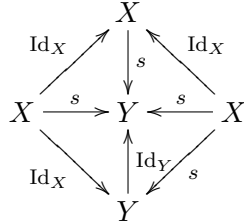
*Demostración.* Notemos primero que  $q$  es un funtor pues si  $h : Y \rightarrow Z$  entonces  $\text{Id}_Z \setminus h \circ \text{Id}_Y \setminus f = \text{Id}_Z \setminus hf$  ya que tenemos un diagrama conmutativo:



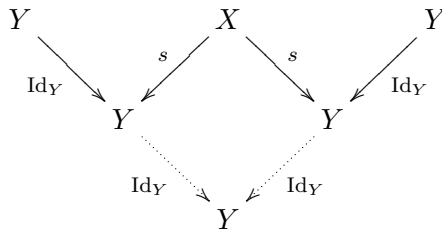
Por otra parte, si  $s \in \Sigma$  entonces  $q(s)$  es un isomorfismo pues del diagrama



se tiene  $s \setminus \text{Id}_Y \circ q(s) = s \setminus \text{Id}_Y \circ \text{Id}_Y \setminus s = s \setminus s \sim \text{Id}_X \setminus \text{Id}_X$ , donde la última equivalencia se deduce del diagrama



y  $q(s) \circ s \setminus \text{Id}_Y = \text{Id}_Y \setminus s \circ s \setminus \text{Id}_Y = \text{Id}_Y \setminus \text{Id}_Y$  ya que se tiene



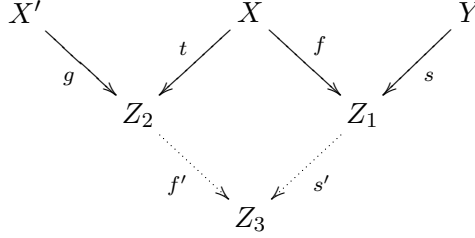
Así  $q(s)$  es un isomorfismo  $\forall s \in \Sigma$ . Supongamos que  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es otro funtor que invierte los morfismos de  $\Sigma$ . Definamos  $\Sigma^{-1}F : \Sigma^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  por  $\Sigma^{-1}F(s \setminus f) = F(s)^{-1} \circ F(f)$ . Veamos que está bien definido. Supongamos que  $s \setminus f \sim s' \setminus f'$ , entonces existen  $a, b \in \text{Fl}(\mathcal{C})$

tales que  $as = bs' \in \Sigma$  y  $af = bf'$ . Luego, notando que  $F(b)$  es un isomorfismo pues  $F(bs')$  y  $F(s')$  lo son y que  $F(a)$  es un isomorfismo pues  $F(as)$  y  $F(s)$  lo son, obtenemos

$$\begin{aligned} F(s')^{-1} \circ F(f') &= F(s')^{-1} \circ F(b)^{-1} \circ F(b) \circ F(f') = F(bs')^{-1} \circ F(b'f) = \\ &= F(as)^{-1} \circ F(af) = F(s')^{-1} \circ F(f') = F(s)^{-1} \circ F(a)^{-1} \circ F(a) \circ F(f) = \\ &= F(s)^{-1} \circ F(f) \end{aligned}$$

Así  $\Sigma^{-1}F$  está bien definido.

Además,  $\Sigma^{-1}F(\text{Id}_X \setminus \text{Id}_X) = \text{id}_X$  y si se tiene



entonces como  $f't = s'f$  aplicando  $F$  queda  $F(f')F(t) = F(s')F(f)$  de donde

$$F(s')^{-1} \circ F(f') = F(f) \circ F(t)^{-1}$$

y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1}F(s \setminus f \circ t \setminus g) &= \Sigma^{-1}F(s' \setminus s \setminus f' \setminus g) = F(s's)^{-1} \circ F(f'g) = \\ &= F(s)^{-1} \circ F(s')^{-1} \circ F(f') \circ F(g) = F(s')^{-1} \circ F(f) \circ F(t)^{-1} \circ F(g) = \\ &= \Sigma^{-1}F(s \setminus f) \circ \Sigma^{-1}F(t \setminus g) \end{aligned}$$

Luego  $\Sigma^{-1}F$  es funtor. Además es claro que  $F = \Sigma^{-1}F \circ q$  y la unicidad de la factorización se deduce del hecho que si  $F = G \circ q$  entonces  $G(\text{Id} \setminus f) = G(q(f)) = F(f)$  y si  $s \in \Sigma$ , como  $(\text{Id} \setminus s)^{-1} = s \setminus \text{Id}$  entonces  $G(s \setminus \text{Id}) = G(\text{Id} \setminus s)^{-1} = F(s)^{-1}$  y, por lo tanto,

$$G(s \setminus f) = G(s \setminus \text{Id} \circ \text{Id} \setminus f) = G(s \setminus \text{Id}) \circ G(\text{Id} \setminus f) = F(s)^{-1}F(f)$$

Luego  $(\Sigma^{-1}C, q)$  cumple la propiedad universal.  $\square$

*Observación 2.2.6.* Se puede hacer una construcción análoga para fracciones a derecha.

**Ejemplo 2.2.7.** Comparemos el cálculo de fracciones hecho recién con el caso visto al comienzo de esta sección para ver que ese era un caso particular de lo de recién.

Sea  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  adjunto a izquierda de  $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  y sea  $\psi : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow DG$  un morfismo de adjunción de  $G$  a  $D$ . Supongamos que  $D$  es plenamente fiel (ver 2.1.9). Sea  $\Sigma$  la intersección de todas las subclases de  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  que contienen las identidades, los morfismos  $\psi_c : c \rightarrow DGc$  y que son estables por composición. Veamos que  $\Sigma$  admite un cálculo de fracciones a izquierda.

Por definición de  $\Sigma$  es claro que satisface a) y b). Veamos que satisface c). Es claro que basta verlo para los  $s : X \rightarrow X'$  de la forma  $\psi_X : X \rightarrow DGX$  y para éstos podemos

tomar  $t = \psi_Y$  y  $u' = DGu$ , ya que, por ser  $\psi$  una transformación natural se tiene que  $\psi_Y u = DGu \psi_X$ . Veamos d). Es claro también que basta verlo para los  $s$  de la forma  $\psi_X : X \rightarrow DGX$ . Supongamos que tenemos  $f, g : DGX \rightarrow Y$  tales que  $f\psi_X = g\psi_X$ . Con las notaciones de d), sea  $t = \psi_Y : Y \rightarrow DGY$ . Ahora bien, por ser  $\psi$  una transformación natural, tenemos  $\psi_Y \circ g = DGf \circ \psi_{DGX}$  y  $\psi_Y \circ f = DGg \circ \psi_{DGX}$ . Para ver  $\psi_Y \circ f = \psi_Y \circ g$  veremos que  $DGf \circ \psi_{DGX} = DGg \circ \psi_{DGX}$ . Como  $\psi_{DG}$  y  $DG\psi$  tienen el mismo inverso  $D\phi_G$ , entonces coinciden y se tiene

$$\begin{aligned} DGf \circ \psi_{DGX} &= DGf \circ DG\psi_X = DG(f \circ \psi_X) = DG(g \circ \psi_X) = DGg \circ DG\psi_X = \\ &= DGg \circ \psi_{DGX} \end{aligned}$$

de donde  $\psi_Y \circ f = \psi_Y \circ g$ , como queríamos.



## Capítulo 3

# Categorías de modelos

En este capítulo estudiamos las categorías de modelos, que fueron introducidas por Quillen en 1967 ([10]) como una abstracción y generalización de la teoría de homotopía clásica de espacios topológicos y conjuntos simpliciales. Una categoría de modelos es una categoría con tres clases de morfismos, llamados fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles que cumplen ciertos axiomas (ver 3.1.1). En las categorías de modelos se puede desarrollar una teoría de homotopía de forma similar a lo que ocurre en los espacios topológicos. Además, permiten dar una descripción sencilla de la localización respecto a las equivalencias débiles como veremos en la primer sección de este capítulo.

La definición de categoría de modelos se ha ido modificando y adaptando como comentamos en 3.1.2. Actualmente son de gran importancia y sirven de base para el desarrollo de otras teorías de homotopía.

Seguimos básicamente el paper original de Quillen ([10]), ampliando y completando las demostraciones. Compararemos la teoría de homotopía resultante con la teoría de homotopía clásica de espacios topológicos, para tratar de entender algunas de las ideas que motivaron a Quillen.

En la primera sección comenzamos definiendo las categorías de modelos y dando algunos ejemplos. Probamos luego que si  $\mathcal{C}$  es una categoría de modelos, las categorías sobre y bajo un objeto contruidas a partir de  $\mathcal{C}$  heredan de ésta una estructura de categorías de modelos. Definimos luego la relación de homotopía y probamos algunos resultados y herramientas importantes, entre los cuales cabe mencionar el reemplazo fibrante y cofibrante (3.1.31). Estos resultados son utilizados al final de la sección para probar que la localización de una categoría de modelos  $\mathcal{C}$  respecto a la clase de equivalencias débiles existe (es decir, es una categoría en sentido usual) y es equivalente a la subcategoría plena de  $\mathcal{C}$  formada por los objetos que son, al mismo tiempo, cofibrantes y fibrantes (ver 3.1.7), cocientada por la relación de homotopía. Este teorema (3.1.32) es uno de los resultados principales del trabajo de Quillen.

En las secciones 2 y 3 completamos el desarrollo de la teoría de homotopía en las categorías de modelos punteadas, definiendo y trabajando con importante estructura extra que poseen estas categorías, como son los funtores loop y suspensión, las sucesiones exactas de la fibra y la cofibra y el corchete de Toda, extendiendo los resultados ya conocidos en *Top*.

En la sección 4 comenzamos con el estudio de los funtores de Quillen, recordando

la definición de funtores derivados. Los funtores de Quillen son de suma importancia y permiten comparar teorías de homotopía de distintas categorías de modelos. La idea es que en ciertas condiciones, una adjunción de funtores entre dos categorías de modelos pasa a las categorías homotópicas, y con hipótesis adicionales, resulta una equivalencia entre ambas categorías homotópicas, y por lo tanto ambas teorías de homotopía coinciden.

En la sección 5 definimos las categorías de modelos cerradas y probamos algunos resultados interesantes. En particular, el lema de Ken Brown (3.5.9), es un resultado muy útil en categorías de modelos, que, aunque no requiere que sean cerradas, lo hemos incluido en esta sección porque los corolarios que presentamos sí necesitan que la categoría de modelos sea cerrada.

En la sección 6 completamos el desarrollo de los funtores de Quillen para categorías de modelos cerradas, siguiendo lo expuesto en [5].

### 3.1. Los axiomas

**Definición 3.1.1.** Una categoría de modelos es una categoría  $\mathcal{C}$  junto con tres clases de morfismos en  $\mathcal{C}$ , llamados fibraciones (Fib), cofibraciones (Cof) y equivalencias débiles (WE) que satisfacen los siguientes axiomas:

M0.  $\mathcal{C}$  tiene límites y colímites finitos.

M1. Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

donde  $i$  es una cofibración,  $p$  es una fibración y donde, además,  $i$  es una equivalencia débil o  $p$  es una equivalencia débil existe  $\varphi : B \rightarrow X$  que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

conmute.

M2. Cualquier morfismo  $f$  se factoriza como  $f = pi$  donde  $i$  es una cofibración y una equivalencia débil y  $p$  es una fibración. También  $f$  se factoriza como  $f = pi$  donde  $i$  es una cofibración y  $p$  es una fibración y una equivalencia débil.

M3. Las fibraciones son estables por composición, cambio de base y todo isomorfismo es una fibración. Las cofibraciones son estables por composición, cambio de cobase y todo isomorfismo es una cofibración.

M4. La extensión de base de un morfismo que es una fibración y una equivalencia débil es una equivalencia débil. La extensión de cobase de un morfismo que es una cofibración y una equivalencia débil es una equivalencia débil.

M5. Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos de  $\mathcal{C}$ . Si dos de los morfismos  $f, g, gf$  son equivalencias débiles entonces el otro también lo es (esto se llama axioma 2 de 3). Además, todo isomorfismo es una equivalencia débil.

*Nota 3.1.2.* La definición de categorías de modelos que hemos dado es la original que da Quillen en [10]. Hemos preferido ésta por ser más general y por ser la primera que se ha dado. Sin embargo, muchos otros matemáticos, entre ellos el mismo Quillen, han ido modificando esta definición, pidiéndole nuevos axiomas o reforzando los anteriores. La razón es que la mayoría de los ejemplos conocidos cumplen también las otras axiomáticas más fuertes. Cabe destacar que en la actualidad se trabaja con categorías de modelos cerradas (que definiremos más adelante), se pide que las factorizaciones del axioma M2 sean functoriales y que la categoría admita límites y colímites pequeños, en lugar de finitos.

**Ejemplo importante 3.1.3.** Veremos más adelante que la categoría de espacios topológicos con

- Fib = fibrationes de Serre
- WE = equivalencias homotópicas débiles
- Cof = funciones que tienen la LLP respecto de las funciones que son, a la vez, fibrationes de Serre y equivalencias (homotópicas) débiles,

es una categoría de modelos.

Si  $\mathcal{C}$  es una categoría de modelos, entonces  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  hereda una estructura natural de categoría de modelos, como muestra la siguiente observación importante.

**Observación importante 3.1.4.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos. Entonces  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  con

$$\begin{aligned} \text{Fib}(\mathcal{C}^{\text{op}}) &= \text{Cof}(\mathcal{C}) \\ \text{Cof}(\mathcal{C}^{\text{op}}) &= \text{Fib}(\mathcal{C}) \\ \text{WE}(\mathcal{C}^{\text{op}}) &= \text{WE}(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

es una categoría de modelos. Por lo tanto hay una forma dual de cada lema, proposición o teorema que enunciemos.

**Proposición 3.1.5.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de modelos. Entonces  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  es una categoría de modelos, donde un morfismo  $(f, g)$  de  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  es una fibration (resp. cofibration, resp. equivalencia débil) si y sólo si  $f$  y  $g$  son ambas fibrationes (resp. cofibrationes, resp. equivalencias débiles).

*Demostración.* El axioma M0 es claro por un resultado general de categorías.

Veamos M1. Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} (A_1, A_2) & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & (X_1, X_2) \\ (i_1, i_2) \downarrow & & \downarrow (p_1, p_2) \\ (B_1, B_2) & \xrightarrow{(g_1, g_2)} & (Y_1, Y_2) \end{array}$$

donde  $(i_1, i_2)$  es una cofibración,  $(p_1, p_2)$  es una fibración, y alguna de las dos es una equivalencia débil. Tenemos entonces diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ i_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ B_2 & \xrightarrow{g_2} & Y_2 \end{array}$$

en  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  respectivamente, con  $i_1, i_2$  cofibraciones y  $p_1, p_2$  fibraciones. Además,  $i_1$  o  $p_1$  es una equivalencia débil e  $i_2$  o  $p_2$  es una equivalencia débil. Por lo tanto, existen  $h_1$  morfismo de  $\mathcal{C}$  y  $h_2$  morfismo de  $\mathcal{D}$  tales que  $h_j i_j = f_j$  y  $p_j h_j = g_j$  para  $j = 1, 2$ . Entonces,  $(h_1, h_2)$  es el levantado buscado. Los otros axiomas se prueban de la misma manera, pasando a las categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ , aplicando los axiomas allí y ‘juntando’ los resultados para obtener la validez del axioma en  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ . Cabe notar que si tenemos en pullback en  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} (A_1, A_2) & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & (X_1, X_2) \\ (k_1, k_2) \downarrow & \text{pull} & \downarrow (h_1, h_2) \\ (B_1, B_2) & \xrightarrow{(g_1, g_2)} & (Y_1, Y_2) \end{array}$$

entonces

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ k_1 \downarrow & \text{pull} & \downarrow h_1 \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ k_2 \downarrow & \text{pull} & \downarrow h_2 \\ B_2 & \xrightarrow{g_2} & Y_2 \end{array}$$

son pullbacks en  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  respectivamente. □

En los preliminares habíamos definido las categorías sobre un objeto y bajo un objeto (1.4.7) y los funtores olvido (1.4.9). En el caso de que  $\mathcal{C}$  sea una categoría de modelos, las categorías  ${}^A\mathcal{C}$  y  ${}_B\mathcal{C}$  heredan una estructura de categoría de modelos, como muestra la proposición que sigue.

**Proposición 3.1.6.** *Sean  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos y  $A$  y  $B$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Entonces  ${}^A\mathcal{C}$  con:*

$$\begin{aligned} \text{Fib}({}^A\mathcal{C}) &= \{f / O(f) \in \text{Fib}(\mathcal{C})\} \\ \text{Cof}({}^A\mathcal{C}) &= \{f / O(f) \in \text{Cof}(\mathcal{C})\} \\ \text{WE}({}^A\mathcal{C}) &= \{f / O(f) \in \text{WE}(\mathcal{C})\} \end{aligned}$$

es una categoría de modelos.

Dualmente, la categoría  ${}_B\mathcal{C}$  con

$$\begin{aligned} \text{Fib}({}_B\mathcal{C}) &= \{f / O(f) \in \text{Fib}(\mathcal{C})\} \\ \text{Cof}({}_B\mathcal{C}) &= \{f / O(f) \in \text{Cof}(\mathcal{C})\} \\ \text{WE}({}_B\mathcal{C}) &= \{f / O(f) \in \text{WE}(\mathcal{C})\} \end{aligned}$$

es una categoría de modelos.

*Demostración.* M0 se deduce de 1.4.10.

Veamos M1. Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo en  $A\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} (B, \beta) & \xrightarrow{f} & (X, \alpha) \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ (C, \gamma) & \xrightarrow{g} & (Y, \delta) \end{array}$$

con  $i$  cofibración,  $p$  fibración y alguna de las dos equivalencia débil. Aplicando el functor olvido queda un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

con  $i$  cofibración en  $\mathcal{C}$ ,  $p$  fibración en  $\mathcal{C}$  y alguna de las dos equivalencia débil en  $\mathcal{C}$ . Por lo tanto, por M1 para  $\mathcal{C}$ , existe  $\varphi : C \rightarrow X$  tal que  $\varphi i = f$  y  $p\varphi = g$ . Ahora bien, como  $i$  y  $f$  son morfismos en  $A\mathcal{C}$  se tiene que  $i\beta = \gamma$  y  $f\beta = \alpha$  de donde

$$\varphi\gamma = \varphi i\beta = f\beta = \alpha$$

y por lo tanto  $\varphi : (C, \gamma) \rightarrow (X, \alpha)$  es un morfismo en  $A\mathcal{C}$  y luego es el levantado buscado.

Para ver M2, supongamos que tenemos  $f : (B, \beta) \rightarrow (C, \gamma)$  morfismo de  $A\mathcal{C}$ . Miramos  $f : B \rightarrow C$  en  $\mathcal{C}$  y lo factorizamos (por M2 para  $\mathcal{C}$ ) como  $f = pi$  con  $i : B \rightarrow D$  cofibración y equivalencia débil y  $p : D \rightarrow C$  fibración. El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \beta \swarrow & \downarrow i\beta & \searrow \gamma & \\ B & \xrightarrow{i} & D & \xrightarrow{p} & C \end{array}$$

dice que tenemos una factorización  $f = pi$  en  $A\mathcal{C}$ , con  $i : (B, \beta) \rightarrow (D, i\beta)$  cofibración y equivalencia débil y  $p : (D, i\beta) \rightarrow (C, \gamma)$  fibración.

La otra factorización es totalmente análoga.

Veamos ahora M3. Es trivial que las fibraciones son estables por composición y que todo isomorfismo es una fibración. Sean  $p$  una fibración en  $A\mathcal{C}$  y  $q$  una extensión de base de  $p$ . Como vimos que el functor  $O$  es adjunto a derecha de un functor  $L$  sabemos que conmuta con pullbacks. Entonces aplicando  $O$  al pullback que da  $q$  como extensión de base de  $p$  se obtiene un pullback en  $\mathcal{C}$  y  $O(q)$  es la extensión de base de  $O(p)$  en este pullback. Como  $p$  es una fibración en  $A\mathcal{C}$ , entonces  $O(p)$  es una fibración en  $\mathcal{C}$  y luego, por el axioma M3 para  $\mathcal{C}$  se tiene que  $O(q)$  es una fibración en  $\mathcal{C}$  y por lo tanto  $q$  es una fibración en  $A\mathcal{C}$ .

La parte de cofibraciones se prueba en forma totalmente análoga, pues vimos que  $O$  conmuta con pushouts (ver 1.4.13).

M4 se prueba en forma análoga a M3.

M5 es trivial pues  $O(fg) = O(f)O(g)$ .

Así tenemos la primera parte de la proposición.

La segunda parte se deduce de la primera parte junto con 1.4.8 y 3.1.4.  $\square$

En adelante  $\mathcal{C}$  denotará una categoría de modelos. Notaremos con  $\emptyset$  al objeto inicial de  $\mathcal{C}$  y con  $e$  al objeto final de  $\mathcal{C}$  (notar que existen por M0).

**Definición 3.1.7.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos,  $\emptyset$  su objeto inicial y  $e$  su objeto final. Un objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  se llamará cofibrante si  $\emptyset \rightarrow X$  es una cofibración y se llamará fibrante si  $X \rightarrow e$  es una fibración.

Además, un morfismo que sea fibración y equivalencia débil se llamará fibración trivial y un morfismo que sea cofibración y equivalencia débil se llamará cofibración trivial.

*Observación 3.1.8.* En  $\mathcal{Top}$  todo objeto es fibrante y la clase de objetos cofibrantes incluye los CW-complejos.

En efecto, si  $X$  es un espacio topológico y tenemos un diagrama de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{f} & X \\ i_0 \downarrow & \nearrow K & \downarrow \\ D^n \times I & \longrightarrow & * \end{array}$$

entonces la flecha punteada  $K$  existe definiendo  $K(x, t) = f(x)$ . Por lo tanto,  $X \rightarrow *$  es una fibración de Serre, es decir,  $X$  es fibrante.

Por otra parte, si  $X$  es un CW-complejo, tomando  $A = \emptyset$  en la proposición 1.5.6 obtenemos que  $\emptyset \rightarrow X$  tiene la LLP respecto de cualquier función  $p$  que sea a la vez fibración y equivalencia débil. Por lo tanto,  $\emptyset \rightarrow X$  es una cofibración y  $X$  es cofibrante.

**Definición 3.1.9.** Sean  $f, g : A \rightarrow B$  morfismos. Decimos que  $f$  es homotópico a  $g$  a izquierda (y lo notamos  $f \stackrel{l}{\sim} g$ ) si hay un diagrama de la forma:

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{f+g} & B \\ \nabla \downarrow & \searrow \partial_0 + \partial_1 & \uparrow h \\ A & \xleftarrow{\sigma} & \tilde{A} \end{array}$$

donde  $\sigma$  es una equivalencia débil.

Dualmente decimos que  $f$  es homotópico a  $g$  a derecha (y lo notamos  $f \stackrel{r}{\sim} g$ ) si hay un diagrama de la forma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & \xleftarrow{s} & B \\ \uparrow k & \searrow (d_0, d_1) & \downarrow \Delta \\ A & \xrightarrow{(f, g)} & B \times B \end{array}$$

donde  $s$  es una equivalencia débil.

*Nota 3.1.10.* En  $\mathcal{Top}$  dos funciones  $f$  y  $g$  que son homotópicas en el sentido usual son homotópicas a izquierda y a derecha. En efecto, sea  $h : A \times I \rightarrow B$  la homotopía.

Tomamos  $\tilde{A} = A \times I$ ,  $\partial_0, \partial_1 : A \rightarrow A \times I$ , definidas por  $\partial_0(a) = (a, 0)$ ,  $\partial_1(a) = (a, 1)$  y  $\sigma : A \times I \rightarrow A$  definida por  $\sigma(a, t) = a$ . Se tiene que  $\sigma$  es una equivalencia homotópica, y por lo tanto una equivalencia débil. Luego  $f \stackrel{l}{\sim} g$ .

Además tomamos  $\tilde{B} = B^I$  y  $k : A \rightarrow B^I$  dada por  $k(a)(t) = h(a, t)$ . Consideramos  $s : B \rightarrow B^I$  tal que  $s(b)(t) = b$  (es decir  $s(b)$  es el camino constante  $b$ ) y  $d_0, d_1 : B^I \rightarrow B$  definidas por  $d_0(\gamma) = \gamma(0)$  y  $d_1(\gamma) = \gamma(1)$ . Se tiene que  $d_0$  y  $d_1$  son inversas homotópicas para  $s$  y por lo tanto  $s$  es una equivalencia débil. Luego  $f \stackrel{x}{\sim} g$ .

**Definición 3.1.11.** Sean  $A$  y  $B$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Un cilindro de  $A$  es un objeto  $IA$  junto con morfismos

$$A \vee A \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} IA \xrightarrow{\sigma} A$$

tales que  $\sigma(\partial_0 + \partial_1) = \nabla_A$ ,  $\partial_0 + \partial_1$  es una cofibración y  $\sigma$  es una equivalencia débil.

Dualmente, un objeto de caminos de  $B$  es un objeto  $B^I$  junto con una factorización

$$B \xrightarrow{s} B^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} B \times B$$

de  $\Delta_B$  donde  $s$  es una equivalencia débil y  $(d_0, d_1)$  es una fibración.

**Nota importante 3.1.12.** Quillen, en [10], nota al cilindro del objeto  $A$  como  $A \times I$ , debido a que en  $\mathcal{Top}$  los cilindros usuales son  $A \times I$ . Sin embargo, hemos preferido cambiar la notación, para que no se confunda con la notación de productos que introdujimos en los preliminares.

**Ejemplo 3.1.13.** En  $\mathcal{Top}$ , si  $A$  es un CW-complejo,  $A \times I$  con  $\sigma$  definida como en 3.1.10 y  $\partial_0 = i_0$ ,  $\partial_1 = i_1$ , es un cilindro de  $A$ . En efecto, como  $\sigma$  es una equivalencia homotópica débil, entonces resta ver que  $i_0 + i_1 : A \vee A \rightarrow A \times I$  es una cofibración. Pero, como  $(A \times I, A \times \{0\} \cup A \times \{1\})$  es un CW-complejo relativo, por 1.5.6 se obtiene que  $i_0 + i_1$  tiene LLP respecto de las funciones que son, a la vez, fibraciones de Serre y equivalencias débiles, con lo cual  $i_0 + i_1$  es cofibración.

Por otra parte,  $B^I = \{\gamma : I \rightarrow B \text{ continuas}\}$  con  $s$ ,  $d_0$  y  $d_1$  definidas como en 3.1.10 es un objeto de caminos para  $B$ . En efecto, vimos que  $s$  es una equivalencia débil. Veamos que  $(d_0, d_1) : B^I \rightarrow B \times B$  es una fibración de Serre. Supongamos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{Top}$

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{K} & B^I \\ i_0 \downarrow & & \downarrow (d_0, d_1) \\ D^n \times I & \xrightarrow{(h_0, h_1)} & B \times B \end{array}$$

Sea  $K' : D^n \times I \rightarrow B$  definida por  $K'(x, t) = K(x)(t)$ . Definamos  $H' : D^n \times I \times I \rightarrow B$  por

$$H'(x, s, t) = \begin{cases} h_0(x, s - 4t) & \text{si } t \leq \frac{s}{4} \\ K'(x, \frac{t - \frac{s}{4}}{1 - \frac{s}{2}}) & \text{si } \frac{s}{4} \leq t \leq 1 - \frac{s}{4} \\ h_1(x, s - 4 + 4t) & \text{si } t \geq 1 - \frac{s}{4} \end{cases}$$

Se tiene que  $H'$  está bien definida y es continua. Sea  $H : D^n \rightarrow B^I$  definida por  $H(x, s)(t) = H'(x, s, t)$ . Por la ley exponencial,  $H$  es continua. Además se tiene  $(d_0, d_1)H = (h_0, h_1)$  y  $H i_0 = k$ . Así,  $(d_0, d_1)$  es una fibración de Serre.

**Definición 3.1.14.** Sean  $f, g : A \rightarrow B$  morfismos de  $\mathcal{C}$ . Una homotopía a izquierda de  $f$  a  $g$  es un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{f+g} & B \\ \nabla \downarrow & \searrow^{\partial_0+\partial_1} & \uparrow h \\ A & \xleftarrow{\sigma} & \tilde{A} \end{array}$$

donde  $\partial_0 + \partial_1$  es una cofibración y por lo tanto  $\tilde{A}$  es un cilindro de  $A$ .

Dualmente, una homotopía a derecha de  $f$  a  $g$  es un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & \xleftarrow{s} & B \\ \uparrow k & \searrow^{(d_0, d_1)} & \downarrow \Delta \\ A & \xrightarrow{(f, g)} & B \times B \end{array}$$

donde  $\tilde{B}$  es un objeto de caminos de  $B$ .

**Lema 3.1.15.** Si  $f, g \in \text{Hom}(A, B)$  y  $f \stackrel{l}{\sim} g$ , entonces hay una homotopía a izquierda  $h : IA \rightarrow B$  de  $f$  a  $g$ .

*Demostración.* Dado un diagrama como en la definición de  $f \stackrel{l}{\sim} g$  usamos M2 para factorizar  $\partial_0 + \partial_1 = \rho\alpha$ ,  $\rho : A' \rightarrow \tilde{A}$ ,  $\alpha : A \vee A \rightarrow A'$  donde  $\alpha$  es una cofibración y  $\rho$  es una fibración trivial. Notar que  $\alpha = \partial'_0 + \partial'_1$  con  $\partial'_0 = \alpha \text{in}_1$  y  $\partial'_1 = \alpha \text{in}_2$ . Por M5,  $\sigma' = \sigma\rho$  es una equivalencia débil, y entonces  $A'$  con  $\partial'_0, \partial'_1$  y  $\sigma'$  es un cilindro de  $A$ . Luego,  $h' = h\rho$  es una homotopía de  $f$  a  $g$ .  $\square$

**Lema 3.1.16.** Sea  $A$  un objeto cofibrante y sea  $IA$  un cilindro para  $A$ . Entonces  $\partial_0 : A \rightarrow IA$  y  $\partial_1 : A \rightarrow IA$  son cofibraciones triviales.

*Demostración.* El morfismo  $\text{in}_1 : A \rightarrow A \vee A$  es una cofibración por ser la extensión de cobase de  $\emptyset \rightarrow A$  y por M3. Luego  $\partial_0 = (\partial_0 + \partial_1)\text{in}_1$  es una cofibración. Además,  $\sigma\partial_0 = \text{id}_A$  entonces, por M5,  $\partial_0$  es una equivalencia débil. Así,  $\partial_0$  es una cofibración trivial. Análogamente,  $\partial_1$  es una cofibración trivial.  $\square$

*Nota 3.1.17.* En el caso particular de  $\mathcal{T}op$ , este lema dice que si  $A$  es un CW-complejo, entonces  $i_0 : A \rightarrow A \times I$  (e  $i_1$ ) tienen la propiedad de levantamiento del axioma M1 respecto de las fibraciones de Serre, es decir, si tenemos un diagrama conmutativo en  $\mathcal{T}op$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ A \times I & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

con  $p$  fibración de Serre, existe  $H : A \times I \rightarrow X$  tal que  $Hi_0 = \alpha$  y  $pH = h$ .



**Corolario 3.1.18 (Teorema de levantamiento de homotopía).** Sean  $A$  un objeto cofibrante,  $p : X \rightarrow Y$  una fibrición,  $\alpha : A \rightarrow X$  y  $h : IA \rightarrow Y$  una homotopía a izquierda con  $h\partial_0 = p\alpha$ . Entonces existe una homotopía a izquierda  $H : IA \rightarrow X$  con  $H\partial_0 = \alpha$  y  $pH = h$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ IA & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

*Demostración.* Se deduce trivialmente de M1. □

El enunciado dual es el teorema de extensión de homotopía.

**Corolario 3.1.19 (Teorema de extensión de homotopía).** Sean  $B$  un objeto fibrante,  $i : X \rightarrow Y$  una cofibración,  $\alpha : Y \rightarrow B$  y  $h : X \rightarrow B^I$  una homotopía a derecha con  $d_0h = \alpha i$ . Entonces existe una homotopía a derecha  $H : Y \rightarrow B^I$  con  $d_0H = \alpha$  y  $Hi = h$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & B^I \\ i \downarrow & \nearrow H & \downarrow d_0 \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

**Observación importante 3.1.20.** Veremos que las cofibraciones en  $\mathcal{T}op$  definidas como en 3.1.3 son cofibraciones en el sentido usual (es decir cumplen la propiedad de extensión de homotopía). Sean  $H : X \times I \rightarrow B$  es una homotopía e  $i : X \rightarrow Y$  una cofibración (en el sentido de la definición del ejemplo 3.1.3) y sea  $\alpha : Y \rightarrow B$  una función continua tal que  $Hi_0 = \alpha i$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ \downarrow i & \nearrow i \times id_I & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{i_0} & Y \times I \\ & \searrow \alpha & \downarrow H \\ & & B \end{array}$$

Como  $I$  es localmente compacto y Hausdorff se tiene función continua  $\tilde{H} : X \rightarrow B^I$  (aplicando la ley exponencial) y si  $d_0 : B^I \rightarrow B$  está definida por  $d_0(\gamma) = \gamma(0)$  se tiene  $d_0\tilde{H} = Hi_0 = \alpha i$ . Como todo objeto es fibrante entonces  $B^I$  es un espacio de caminos de  $B$ . Luego,  $\tilde{H}$  es una homotopía a derecha y aplicando 3.1.19 se tiene que existe  $\bar{H} : Y \rightarrow B^I$  con  $d_0\bar{H} = \alpha$  y  $\bar{H}i = \tilde{H}$ . Aplicando otra vez la ley exponencial conseguimos  $G : Y \times I \rightarrow B$  continua tal que  $G(y, t) = \bar{H}(y)(t)$  y entonces se tiene que  $G(y, 0) = \alpha(y)$  y  $G(i(x), t) = H(x, t)$ . Por lo tanto,  $i$  es una cofibración en sentido topológico usual. □

Por otra parte, 3.1.18 dice para  $\mathcal{T}op$  lo siguiente.

Sean  $A$  un CW-complejo,  $p : X \rightarrow Y$  una fibrición de Serre,  $\alpha : A \rightarrow X$  y  $h : A \times I \rightarrow Y$  tales que  $hi_0 = p\alpha$ . Entonces existe  $H : A \times I \rightarrow X$  con  $Hi_0 = \alpha$  y  $pH = h$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ A \times I & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

En otras palabras, una fibrición de Serre tiene la RLP respecto de  $i_0 : A \rightarrow A \times I$  para todo CW-complejo  $A$  (ver 1.5.4).

**Lema 3.1.21.** *Sea  $A$  un objeto cofibrante y sean  $IA$  y  $I'A$  dos cilindros de  $A$ . El resultado de ‘pegar’  $IA$  con  $I'A$  por la identificaci3n  $\partial_1 A = \partial'_0 A$ , definido como el objeto  $\tilde{A}$  en el pushout:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\partial_1} & IA \\ \partial'_0 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_1 \\ I'A & \xrightarrow{\text{in}_2} & \tilde{A} \end{array}$$

es tambi3n un cilindro  $I''A$  de  $A$  con  $\partial''_0 = \text{in}_1 \partial_0$ ,  $\partial''_1 = \text{in}_2 \partial'_1$ ,  $\sigma'' = \sigma + \sigma'$ .

*Demostraci3n.* Tenemos que

$$\sigma''(\partial''_0 + \partial''_1) = \sigma''(\text{in}_1 \partial_0 + \text{in}_2 \partial'_1) = \sigma'' \text{in}_1 \partial_0 + \sigma'' \text{in}_2 \partial'_1 = \sigma \partial_0 + \sigma' \partial'_1 = \text{Id}_A + \text{Id}_A$$

Adem3s, por 3.1.16 y M4 tenemos que  $\text{in}_1$  e  $\text{in}_2$  son equivalencias d3biles. Entonces como  $\partial''_0 = \text{in}_1 \partial_0$ , por M5,  $\partial''_0$  es una equivalencia d3bil y como  $\sigma'' \partial''_0 = \text{Id}_A$ , nuevamente por M5 obtenemos que  $\sigma''$  es una equivalencia d3bil. Resta ver que  $\partial''_0 + \partial''_1$  es cofibraci3n. Para ello consideremos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}'_1 \\ A & \xrightarrow{\text{in}'_2} & A \vee A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & IA \\ \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_3 \\ A & \xrightarrow{\text{in}_4} & IA \vee A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\partial_0} & IA \\ \text{in}'_1 \downarrow & & \downarrow \text{in}_3 \\ A \vee A & \xrightarrow{\partial_0 \vee \text{Id}_A} & IA \vee A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{\partial_1 \vee \text{Id}_A} & IA \vee A \\ \partial'_0 + \partial'_1 \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{IA \vee \partial'_1} \\ I'A & \xrightarrow{\text{in}_2} & I''A \end{array}$$

Notemos que efectivamente conmutan pues

$$(\partial_0 \vee \text{Id}_A) \text{in}'_1 = (\text{in}_3 \partial_0 + \text{in}_4 \text{Id}_A) \text{in}'_1 = \text{in}_3 \partial_0$$

y

$$\begin{aligned} (\text{Id}_{IA \vee \partial'_1})(\partial_1 \vee \text{Id}_A) &= (\text{in}_1 \text{Id}_{IA} + \text{in}_2 \partial'_1)(\text{in}_3 \partial_1 + \text{in}_4 \text{Id}_A) = \\ &= ((\text{in}_1 \text{Id}_{IA} + \text{in}_2 \partial'_1) \text{in}_3 \partial_1) + ((\text{in}_1 \text{Id}_{IA} + \text{in}_2 \partial'_1) \text{in}_4 \text{Id}_A) = \\ &= \text{in}_1 \partial_1 + \text{in}_2 \partial'_1 = \text{in}_2 \partial'_0 + \text{in}_2 \partial'_1 = \text{in}_2(\partial'_0 + \partial'_1) \end{aligned}$$

Nos proponemos ver que los últimos dos diagramas de arriba son pushouts. Para eso consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\emptyset & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\partial_0} & IA \\
\downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}'_1 & & \downarrow \text{in}_3 \\
A & \xrightarrow{\text{in}'_2} & A \vee A & \xrightarrow{\partial_0 \vee \text{Id}_A} & IA \vee A
\end{array}$$

que resulta de ‘pegar’ dos de los diagramas anteriores. Como

$$(\partial_0 \vee \text{Id}_A)\text{in}'_2 = (\text{in}_3\partial_0 + \text{in}_4\text{Id}_A)\text{in}'_2 = \text{in}_4$$

entonces el diagrama total es uno de los pushouts de antes y por lo tanto la parte derecha del diagrama anterior también es pushout. Entonces como  $\partial_0$  es cofibración (por 3.1.16) se tiene, por M3, que  $\partial_0 \vee \text{Id}_A$  es cofibración.

Por otra parte, consideramos el siguiente diagrama conmutativo que resulta de ‘pegar’ otros dos diagramas anteriores

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\partial_0} & IA \\
\text{in}'_1 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_3 \\
A \vee A & \xrightarrow{\partial_0 \vee \text{Id}_A} & IA \vee A \\
\partial'_0 + \partial'_1 \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{IA} \vee \partial'_1 \\
I'A & \xrightarrow{\text{in}_2} & I''A
\end{array}$$

La parte superior es pushout por lo visto antes y como

$$(\partial'_0 + \partial'_1)\text{in}_1 = \partial'_0 \quad \text{y} \quad (\text{Id}_{IA} \vee \partial'_1)\text{in}_3 = (\text{in}_1\text{Id}_{IA} + \text{in}_2\partial'_1)\text{in}_3 = \text{in}_1$$

se tiene que el diagrama total es el pushout del enunciado del lema. Entonces la parte inferior del diagrama anterior también es pushout.

Por lo tanto, como  $\partial'_0 + \partial'_1$  es cofibración, por M3 se obtiene que  $\text{Id}_{IA} \vee \partial'_1$  también lo es. Así  $(\text{Id}_{IA} \vee \partial'_1) \circ (\partial_0 \vee \text{Id}_A)$  es cofibración, pero

$$\begin{aligned}
(\text{Id}_{IA} \vee \partial'_1) \circ (\partial_0 \vee \text{Id}_A) &= (\text{in}_1\text{Id}_{IA} + \text{in}_2\partial'_1) \circ (\text{in}_3\partial_0 + \text{in}_4\text{Id}_A) = \\
&= ((\text{in}_1\text{Id}_{IA} + \text{in}_2\partial'_1) \circ \text{in}_3\partial_0) + ((\text{in}_1\text{Id}_{IA} + \text{in}_2\partial'_1) \circ \text{in}_4\text{Id}_A) = \\
&= \text{in}_1\partial_0 + \text{in}_2\partial'_1 = \\
&= \partial''_0 + \partial''_1
\end{aligned}$$

luego  $\partial''_0 + \partial''_1$  es cofibración. □

*Nota 3.1.22.* En  $\mathcal{Top}$ , el lema anterior es claro, pegar dos cilindros, la tapa del primero con la base del segundo, sigue siendo un cilindro. Esto se usa para definir la composición (o concatenación) de homotopías que, por ejemplo, muestra la transitividad de la relación ‘ser homotópico a’. Esta aplicación se ve en categorías de modelos en general en el siguiente lema.

**Lema 3.1.23.** Si  $A$  es cofibrante, entonces  $\overset{l}{\sim}$  es una relación de equivalencia en  $\text{Hom}(A, B)$ .

*Demostración.* Para ver que la relación es reflexiva basta tomar  $\tilde{A} = A$  y  $h = f$ . Además es trivial ver que es simétrica (basta intercambiar  $\partial_0$  y  $\partial_1$ ). Para ver que es transitiva, supongamos que  $f_0 \overset{l}{\sim} f_1$  y  $f_1 \overset{l}{\sim} f_2$  con homotopías  $h : IA \rightarrow B$  y  $h' : I'A \rightarrow B$ . Consideramos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{f_0+f_1} & B \\ \Delta \downarrow & \searrow_{\partial_0+\partial_1} & \uparrow h \\ A & \xleftarrow{\sigma} & IA \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{f_1+f_2} & B \\ \Delta \downarrow & \searrow_{\partial'_0+\partial'_1} & \uparrow h' \\ A & \xleftarrow{\sigma'} & I'A \end{array}$$

Tomando pushout se tiene un morfismo  $h'' : I''A \rightarrow B$  y un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\partial'_0} & I'A \\ \partial_1 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_2 \\ IA & \xrightarrow{\text{in}_1} & I''A \\ & \searrow h & \downarrow h'' \\ & & B \end{array}$$

Análogamente obtenemos  $\sigma''$  tal que  $\sigma''\text{in}_1 = \sigma$  y  $\sigma''\text{in}_2 = \sigma'$ . y se tienen:

$$\begin{aligned} \sigma''\partial''_0 &= \sigma''\text{in}_1\partial_0 = \sigma\partial_0 = id_A \\ \sigma''\partial''_1 &= \sigma''\text{in}_2\partial'_1 = \sigma'\partial'_1 = id_A \\ h''\partial''_0 &= h''\text{in}_1\partial_0 = h\partial_0 = f_0 \\ h''\partial''_1 &= h''\text{in}_2\partial'_1 = h'\partial'_1 = f_2 \end{aligned}$$

con lo cual el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{f_0+f_2} & B \\ \Delta \downarrow & \searrow_{\partial''_0+\partial''_1} & \uparrow h'' \\ A & \xleftarrow{\sigma''} & I''A \end{array}$$

conmuta, por lo que  $f_0 \overset{l}{\sim} f_2$ . □

**Lema 3.1.24.** Sean  $A$  un objeto cofibrante y  $f, g \in \text{Hom}(A, B)$ . Entonces:

1.  $f \overset{l}{\sim} g \Rightarrow f \overset{r}{\sim} g$
2.  $f \overset{r}{\sim} g \Rightarrow$  existe una homotopía a derecha  $k : A \rightarrow B^I$  de  $f$  a  $g$  con  $s : B \rightarrow B^I$  cofibración trivial.
3. Si  $f \overset{r}{\sim} g$  y  $u : B \rightarrow C$  entonces  $uf \overset{r}{\sim} ug$ .

*Demostración.*

1. Por 3.1.15 hay una homotopía a izquierda  $h : IA \rightarrow B$  de  $f$  a  $g$  y por M2 hay un objeto de caminos de  $B$ ,  $B^I$  (basta usar M2 para factorizar  $\Delta = ps$  con  $p$  fibración y  $s$  cofibración trivial). Por 3.1.16 y M1, como

$$(f\sigma, h)\partial_0 = (f\sigma\partial_0, h\partial_0) = (f, f) = \Delta f = psf$$

la flecha punteada existe en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{sf} & B^I \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow K & \downarrow p=(d_0, d_1) \\ IA & \xrightarrow{(f\sigma, h)} & B \times B \end{array}$$

Sea  $k = K\partial_1 : A \rightarrow B^I$ . Se tiene

$$(d_0, d_1)k = (d_0k, d_1k) = (d_0K\partial_1, d_1K\partial_1) = (f\sigma\partial_1, h\partial_1) = (f, g)$$

Por lo tanto  $k$  es la homotopía a derecha buscada.

2. Sea  $k' : A \rightarrow B^{I'}$  una homotopía a derecha de  $f$  a  $g$  y sea  $\rho s$ , con  $s : B \rightarrow \tilde{B}$  y  $\rho : \tilde{B} \rightarrow B^{I'}$  una factorización de  $s' : B \rightarrow B^{I'}$  con  $s$  una cofibración trivial y  $\rho$  una fibración. Por M5,  $\rho$  es una equivalencia débil. Sea  $(d_0, d_1) = (d'_0, d'_1)\rho : \tilde{B} \rightarrow B \times B$ . Entonces  $(d_0, d_1)$  es una fibración por M3 y entonces  $\tilde{B}$  con  $d_0, d_1$  y  $s$  es un objeto de caminos de  $B$ . Como  $A$  es cofibrante, por M1 se tiene que existe  $k$  en

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \tilde{B} \\ \downarrow & \nearrow k & \downarrow \rho \\ A & \xrightarrow{k'} & B^{I'} \end{array}$$

y  $k$  es la homotopía a derecha buscada.

3. Sea  $k$  como en el ítem 2 y sea  $C^I$  un objeto de caminos para  $C$  con  $(d'_0, d'_1)$  y  $s'$ . Por M1 existe  $\phi$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s'u} & C^I \\ s \downarrow & \nearrow \phi & \downarrow (d'_0, d'_1) \\ B^I & \xrightarrow{(d_0u, d_1u)} & C \times C \end{array}$$

y  $\phi k : A \rightarrow C^I$  es una homotopía a derecha de  $uf$  a  $ug$ .

□

Si  $A$  y  $B$  son objetos de  $\mathcal{C}$  definimos  $\pi^r(A, B)$  (resp.  $\pi^l(A, B)$ ) como el conjunto de clases de equivalencia de  $\text{Hom}(A, B)$  respecto a la relación de equivalencia generada por  $\overset{r}{\sim}$  (resp.  $\overset{l}{\sim}$ ). Cuando  $A$  es cofibrante y  $B$  es fibrante,  $\overset{r}{\sim}$  y  $\overset{l}{\sim}$  coinciden y son relaciones de equivalencia por los resultados 3.1.23, 3.1.24 (item 1) y sus duales. En este caso, notaremos a la relación de equivalencia con el signo  $\sim$  y la llamaremos homotopía. Notaremos  $\pi_0(A, B)$  ó  $\pi(A, B)$  al conjunto de clases de equivalencia.

**Lema 3.1.25.** *Si  $A$  es cofibrante, la composición en  $\mathcal{C}$  induce una función*

$$\pi^r(A, B) \times \pi^r(B, C) \rightarrow \pi^r(A, C)$$

*Demostración.* Basta ver que si  $f, g \in \text{Hom}(A, B)$ ,  $u \in \text{Hom}(B, C)$  y  $f \overset{r}{\sim} g$  entonces  $uf \overset{r}{\sim} ug$  que es el 3.1.24 item 3 y que si  $u, v \in \text{Hom}(B, C)$ ,  $f \in \text{Hom}(A, B)$  y  $u \overset{r}{\sim} v$  entonces  $uf \overset{r}{\sim} vf$ , lo que es inmediato de la definición.  $\square$

**Proposición 3.1.26.** *Sea  $A$  cofibrante y sea  $p : X \rightarrow Y$  una fibración trivial. Entonces  $p$  induce una biyección  $p_* : \pi^l(A, X) \rightarrow \pi^l(A, Y)$ .*

*Demostración.* La función está bien definida pues  $f \overset{l}{\sim} g \Rightarrow pf \overset{l}{\sim} pg$  (esto es inmediato de la definición). La función es sobreyectiva por M1. Por lema 4, si  $f, g \in \text{Hom}(A, X)$  y  $pf, pg$  representan el mismo elemento de  $\pi^l(A, Y)$ , entonces hay una homotopía a izquierda  $h : IA \rightarrow Y$  de  $pf$  a  $pg$ . Si  $H$  es un levantado en

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{f+g} & X \\ \partial_0 + \partial_1 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ IA & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

entonces  $H$  es una homotopía a izquierda de  $f$  a  $g$ . Esto muestra que  $p_*$  es inyectiva.  $\square$

**Observación importante 3.1.27.** La proposición anterior tiene su análogo en  $\mathcal{Top}$  que es el siguiente teorema (teorema 6.31, [13], pág. 89).

Si  $f : Z \rightarrow Y$  es una  $n$ -equivalencia ( $n = \infty$  está permitido), entonces para todo CW-complejo  $X$  la función  $f_* : [X, Z] \rightarrow [X, Y]$  (donde  $[X, Y]$  denota las clases de homotopía de funciones continuas de  $X$  a  $Y$ ) es sobreyectiva si  $\dim X \leq n$  y biyectiva si  $\dim X < n$ . Similarmente para  $f_* : [(X, x_0)(Z, z_0)] \rightarrow [(X, x_0)(Y, y_0)]$ , donde  $x_0, y_0$  y  $z_0$  son puntos base con  $f(z_0) = y_0$ .

Notar que si  $n = \infty$ ,  $f$  es una equivalencia homotópica débil. La idea de la demostración es usar el siguiente resultado (teorema 6.30, [13], pág. 88) que permite ‘levantar’, como ocurre en la proposición anterior).

Si  $f : Z \rightarrow Y$  es una  $n$ -equivalencia y  $(X, A)$  es un CW-complejo relativo con  $\dim(X, A) \leq n$ , entonces, dadas funciones  $g : A \rightarrow Z$ ,  $h : X \rightarrow Y$ , tales que  $h|_A = f \circ g$ , existe  $h' : X \rightarrow Z$  con  $h'|_A = g$  y  $f \circ h' \simeq h(\text{rel}A)$  ( $n = \infty$  está permitido).

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow & \nearrow h' & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

$\simeq$

## Categorías Homotópicas

Comenzaremos ahora a estudiar la categoría homotópica de una categoría de modelos  $\mathcal{C}$ , que es, por definición, la localización de  $\mathcal{C}$  respecto de la clase de equivalencias débiles.

Sean  $\mathcal{C}_c$ ,  $\mathcal{C}_f$  y  $\mathcal{C}_{cf}$  las subcategorías plenas de  $\mathcal{C}$  cuyos objetos son respectivamente los objetos cofibrantes, fibrantes y los objetos que son a la vez fibrantes y cofibrantes de  $\mathcal{C}$ . Por 3.1.25 podemos definir una categoría  $\pi\mathcal{C}_c$  con los mismos objetos de  $\mathcal{C}_c$  y con  $\text{Hom}_{\pi\mathcal{C}_c}(A, B) = \pi^r(A, B)$  y con la composición inducida por la de  $\mathcal{C}_c$ . Si notamos la clase de homotopía a derecha de un morfismo  $f : A \rightarrow B$  por  $\bar{f}$  obtenemos un funtor

$$\mathcal{C}_c \rightarrow \pi\mathcal{C}_c$$

que es la identidad en los objetos y que manda a cada morfismo  $f$  de  $\mathcal{C}_c$  a la clase  $\bar{f}$  en  $\pi\mathcal{C}_c$ .

Similarmente, por el dual de 3.1.25 podemos definir  $\pi\mathcal{C}_f$  (resp.  $\pi\mathcal{C}_{cf}$ ) como la categoría con los mismos objetos de  $\mathcal{C}_f$  (resp.  $\mathcal{C}_{cf}$ ) y con  $\pi^l(A, B)$  (resp.  $\pi(A, B)$ ) como morfismos de  $A$  en  $B$ .

**Definición 3.1.28.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos. La categoría homotópica de  $\mathcal{C}$  es la localización de  $\mathcal{C}$  con respecto a la clase de equivalencias débiles y se nota por  $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$ . La localización de  $\mathcal{C}_c$  (resp.  $\mathcal{C}_f$ ) con respecto a la clase de morfismos de  $\mathcal{C}_c$  (resp.  $\mathcal{C}_f$ ) que son equivalencias débiles en  $\mathcal{C}$  se denotará con  $\gamma_c : \mathcal{C}_c \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_c$  (resp.  $\gamma_f : \mathcal{C}_f \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_f$ ).

Usaremos la notación  $[X, Y]$  para  $\text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y)$ .

**Lema 3.1.29.**

1. Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor que manda equivalencias débiles de  $\mathcal{C}$  a isomorfismos en  $\mathcal{B}$ . Si  $f \stackrel{l}{\sim} g$  ó  $f \stackrel{r}{\sim} g$ , entonces  $F(f) = F(g)$  en  $\mathcal{B}$ .
2. Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor que manda equivalencias débiles de  $\mathcal{C}_c$  a isomorfismos en  $\mathcal{B}$ . Si  $f \stackrel{r}{\sim} g$ , entonces  $F(f) = F(g)$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.*

1. Sea  $h : IA \rightarrow B$  una homotopía a izquierda de  $f$  a  $g$ . Como  $\sigma$  es una equivalencia débil,  $F(\sigma)$  es un isomorfismo y como  $F(\sigma)F(\partial_0) = F(\sigma)F(\partial_1) = id_{F(A)}$  se tiene  $F(\partial_0) = F(\partial_1)$  y entonces  $F(f) = F(h)F(\partial_0) = F(h)F(\partial_1) = F(g)$ .
2. La demostración es la misma que la del ítem 1 porque, por 3.1.23 (ítem 2), podemos suponer que  $s : B \rightarrow B^I$  es una cofibración y entonces  $B^I$  es un objeto de  $\mathcal{C}_c$ .

□

Por 3.1.29, los funtores  $\gamma_c$ ,  $\gamma_f$  y  $\gamma$  inducen funtores  $\bar{\gamma}_c : \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_c$ ,  $\bar{\gamma}_f : \pi\mathcal{C}_f \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_f$  y  $\bar{\gamma} : \pi\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  (si estas localizaciones existen, cosa que veremos más adelante).

*Nota 3.1.30.* En  $\mathcal{T}op$ , si uno quiere invertir las equivalencias homotópicas (fuertes), basta cocientar los morfismos por la relación de equivalencia ‘ser homotópico a’. Tenemos además un functor  $q : \mathcal{T}op \rightarrow [\mathcal{T}op]$  definido por  $q(X) = X$  en los objetos y  $q(f) = [f]$  (la clase de  $f$ ) en las flechas, que manda equivalencias homotópicas en isomorfismos y cumple la siguiente propiedad universal. Dada una categoría  $\mathcal{D}$  y un functor  $F : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{D}$  que manda equivalencias homotópicas de  $\mathcal{T}op$  a isomorfismos en  $\mathcal{D}$ , existe un único functor  $\overline{F} : [\mathcal{T}op] \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $\overline{F}q = F$ .

En efecto, es fácil ver que si un functor  $F$  invierte equivalencias homotópicas y  $f \sim g$  entonces  $F(f) = F(g)$ , de hecho, la demostración es la misma que la de la primera parte del lema anterior, usando que  $\sigma : A \times I \rightarrow A$  definida por  $\sigma(a, t) = a$  es un retracts por deformación fuerte, y, en particular, una equivalencia homotópica. Es decir,  $[\mathcal{T}op]$  es la localización de  $\mathcal{T}op$  respecto de las equivalencias homotópicas.

**Lema 3.1.31 (Reemplazos fibrante y cofibrante).** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos. Existe una aplicación  $Q$  que a cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  le asigna un objeto cofibrante  $Q(X)$  de  $\mathcal{C}$  (con  $Q(X) = X$  si  $X$  es cofibrante) de forma tal que*

- i) Se tiene una fibración trivial  $p_X : Q(X) \rightarrow X$ .*
- ii) A cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  le asocia un morfismo  $Q(f) : Q(X) \rightarrow Q(Y)$  tal que  $p_Y Q(f) = f p_X$ .*

*$Q$  se llamará reemplazo cofibrante.*

*Dualmente, existe una aplicación  $R$  que a cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  le asigna un objeto fibrante  $R(X)$  de  $\mathcal{C}$  (con  $R(X) = X$  si  $X$  es fibrante) de forma tal que*

- i) Se tiene una cofibración trivial  $i_X : X \rightarrow R(X)$ .*
- ii) A cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  le asocia un morfismo  $R(f) : R(X) \rightarrow R(Y)$  tal que  $R(f)i_X = i_Y f$ .*

*$R$  se llamará reemplazo fibrante.*

*Además,  $R$ ,  $Q$  y  $RQ$  inducen funtores  $\overline{R} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_f$ ,  $\overline{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_c$  y  $\overline{RQ} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{cf}$ .*

*Demostración.* Para cada objeto  $X$  elegimos una fibración trivial  $p_X : Q(X) \rightarrow X$ , con  $Q(X)$  cofibrante (basta factorizar  $\emptyset \rightarrow X$  en una cofibración seguida de una fibración trivial) y una cofibración trivial  $i_X : X \rightarrow R(X)$  con  $R(X)$  fibrante (factorizar  $X \rightarrow e$ ). Tomamos  $Q(X) = X$  y  $p_X = id_X$  si  $X$  es cofibrante y  $R(X) = X$  y  $i_X = id_X$  si  $X$  es fibrante. Para cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  podemos elegir un morfismo  $Q(f) : Q(X) \rightarrow Q(Y)$  tal que  $p_Y Q(f) = f p_X$ . En efecto, como  $\emptyset \rightarrow Q(X)$  es cofibración y  $p_Y$  es fibración trivial, por M1, existe  $Q(f)$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \longrightarrow & Q(Y) \\
 \downarrow & \nearrow Q(f) & \downarrow p_Y \\
 Q(X) & \xrightarrow{f p_X} & Y
 \end{array}$$



Además, por lema 7,  $Q(f)$  es único salvo homotopía a izquierda. Análogamente, podemos elegir un morfismo  $R(f) : R(X) \rightarrow R(Y)$  tal que  $R(f)i_X = i_Y f$ , que es único salvo homotopía a derecha. Si  $g : Y \rightarrow Z$ , como  $p_Z Q(g)Q(f) = g p_Y Q(f) = g f p_X$ , se sigue que  $Q(gf) \stackrel{l}{\sim} Q(g)Q(f)$  y como  $p_X id_{Q(X)} = id_X p_X$  se tiene que  $Q(id_X) \stackrel{l}{\sim} id_{Q(X)}$ . Entonces,  $Q(gf) \stackrel{r}{\sim} Q(g)Q(f)$  y  $Q(id_X) \stackrel{r}{\sim} id_{Q(X)}$  por 3.1.24 ítem 1. Por lo tanto, queda bien definido un functor  $\overline{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_c$  por  $\overline{Q}(X) = Q(X)$  y  $\overline{Q}(f) = \overline{Q(f)}$ .

Análogamente, hay un functor  $\overline{R} : \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_f$ .

Si  $X$  es cofibrante,  $f, g \in \text{Hom}(X, Y)$  y  $f \stackrel{r}{\sim} g$ , por 3.1.24 ítem 3,  $i_Y f \stackrel{r}{\sim} i_Y g$  y entonces por el dual de 3.1.26 se tiene  $R(f) \stackrel{r}{\sim} R(g)$ . Luego,  $\overline{R}$  restringido a  $\mathcal{C}_c$  induce un functor  $\pi\mathcal{C}_c \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$  (notar que si  $X$  es cofibrante, entonces  $R(X)$  también lo es pues  $\emptyset \rightarrow X \rightarrow R(X)$  es cofibración) y existe un functor bien definido,  $\overline{RQ} : \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$  dado por  $X \mapsto RQ(X)$ ,  $f \mapsto RQ(f)$ .  $\square$

**Teorema 3.1.32.** *La localización  $\text{Ho}\mathcal{C}$  existe y el functor  $\overline{\gamma} : \pi\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  es una equivalencia de categorías. Más aún, las categorías  $\text{Ho}\mathcal{C}$ ,  $\text{Ho}\mathcal{C}_c$  y  $\text{Ho}\mathcal{C}_f$  existen y se tiene un diagrama de funtores*

$$\begin{array}{ccc} \pi\mathcal{C}_c & \xrightarrow{\overline{\gamma}_c} & \text{Ho}\mathcal{C}_c \\ \uparrow a & & \downarrow b \sim \\ \pi\mathcal{C}_{cf} & \xrightarrow{\overline{\gamma}} & \text{Ho}\mathcal{C} \\ \downarrow c & & \uparrow d \sim \\ \pi\mathcal{C}_f & \xrightarrow{\overline{\gamma}_f} & \text{Ho}\mathcal{C}_f \end{array}$$

donde el símbolo  $\hookrightarrow$  denota una inclusión plena y el símbolo  $\xrightarrow{\sim}$  denota una equivalencia de categorías.

Además, si  $\overline{\gamma}^{-1}$  es una cuasi inversa de  $\overline{\gamma}$ , entonces el functor plenamente fiel  $a\overline{\gamma}^{-1}b$  es adjunto a derecha de  $\overline{\gamma}_c$  y el functor plenamente fiel  $c\overline{\gamma}^{-1}d$  es adjunto a izquierda de  $\overline{\gamma}_f$ .

*Demostración.* Efectuamos los reemplazos cofibrante y fibrante y siguiendo con las notaciones del lema anterior obtenemos funtores  $\overline{R} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_f$ ,  $\overline{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_c$  y  $\overline{RQ} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{cf}$ .

Sea  $\text{Ho}\mathcal{C}$  la categoría que tiene los mismos objetos de  $\mathcal{C}$  con

$$\text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y) = \text{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(RQX, RQY) = \pi(RQX, RQY)$$

y la composición inducida de  $\mathcal{C}$ . Sea  $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  dado por  $\gamma(X) = X$ ,  $\gamma(f) = \overline{RQ}(f)$ . Como  $RQ(X) = X$  para  $X$  objeto de  $\mathcal{C}_{cf}$ , es claro que el functor  $\overline{\gamma} : \pi\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  es plenamente fiel. Por 3.1.26 y su dual, las fibrationes triviales y las cofibraciones triviales en  $\pi\mathcal{C}_{cf}$  se hacen isomorfismos en  $\pi\mathcal{C}_{cf}$  pues si  $p : X \rightarrow Y$  es una fibration trivial (resp. cofibración trivial) entonces induce biyección

$$p_* : \pi(A, X) \rightarrow \pi(A, Y) \quad (\text{resp. } p^* : \pi(Y, A) \rightarrow \pi(X, A))$$

y luego,  $p_* : \pi(Y, X) \rightarrow \pi(Y, Y)$  es biyectiva, por lo tanto existe  $h : Y \rightarrow X$  tal que  $ph = id_Y$  (en  $\pi\mathcal{C}_{cf}$ ) y se tiene  $p_*(hp) = php = p = p_*(id_X)$  de donde  $hp = id_X$ . Por lo

tanto, por M2 y M5, toda equivalencia débil se hace un isomorfismo en  $\pi\mathcal{C}_{cf}$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia débil en  $\mathcal{C}$  entonces como  $fp_X = p_YQ(f)$  por M5, se tiene que  $Q(f)$  es una equivalencia débil en  $\mathcal{C}_c$  y de la misma manera,  $RQ(f)$  es una equivalencia débil en  $\pi\mathcal{C}_{cf}$  y entonces  $\gamma(f) = \overline{RQ(f)}$  es un isomorfismo. Se sigue que para todo  $X$ , los morfismos  $p_X : Q(X) \rightarrow X$  y  $i_{Q(X)} : Q(X) \rightarrow RQ(X)$  inducen un isomorfismo entre  $X$  y  $RQ(X)$  en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y como  $\bar{\gamma}$  es plenamente fiel se tiene que es una equivalencia de categorías.

Veremos ahora que  $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  tiene la propiedad universal de la definición de localización. Ya vimos que  $\gamma$  manda equivalencias débiles de  $\mathcal{C}$  a isomorfismos en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ . Supongamos que  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  hace lo mismo. Definimos  $\theta : \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  por  $\theta(X) = F(X)$  y para  $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y)$  elegimos  $f : RQ(X) \rightarrow RQ(Y)$  que represente  $\alpha$  y tomamos  $\theta(\alpha)$  dado por el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{\theta(\alpha)} & F(Y) \\
F(p_X) \uparrow \sim & & F(p_Y) \uparrow \sim \\
F(QX) & & F(QY) \\
F(i_{QX}) \downarrow \sim & & F(i_{QY}) \downarrow \sim \\
F(RQX) & \xrightarrow{F(f)} & F(RQY)
\end{array}$$

Por 3.1.29 ítem 1,  $\theta(\alpha)$  es independiente de la elección de  $f$  y luego es claro que  $\theta$  es un funtor, de hecho, el único funtor que cumple  $\theta\gamma = F$ . Esto prueba la existencia de  $\text{Ho}\mathcal{C}$ .

La existencia de  $\text{Ho}\mathcal{C}_c$  y la equivalencia  $\pi\mathcal{C}_{cf} \xrightarrow{\sim} \text{Ho}\mathcal{C}_c$  puede probarse de la misma manera, usando el funtor  $\mathcal{C}_c \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$  inducido por  $\bar{R}$  y 3.1.29 ítem 2. La última parte del teorema se deduce del hecho que el funtor inclusión  $\pi\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \pi\mathcal{C}_c$  es adjunto a derecha del funtor  $\bar{R}' : \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$  ya que  $\pi^r(X, Y) \simeq \pi(RX, Y)$  si  $X$  es un objeto de  $\mathcal{C}_c$  y  $Y$  es un objeto de  $\mathcal{C}_{cf}$  por el dual del 3.1.26, con  $i_X : X \rightarrow R(X)$ , y del hecho de que, salvo la equivalencia,  $\text{Ho}\mathcal{C}_c \simeq \text{Ho}\mathcal{C} \simeq \pi\mathcal{C}_{cf}$  el funtor  $\bar{\gamma}_c : \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_c$  'es' el funtor  $R'$ .  $\square$

**Corolario 3.1.33.** *Si  $A$  es cofibrante y  $B$  es fibrante entonces*

$$\text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(A, B) \simeq \pi(A, B)$$

*Demostración.*  $\text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(A, B) = \pi(RQA, RQB) = \pi(RA, QB) \simeq \pi(A, QB) \simeq \pi(A, B)$  por el 3.1.26 y su dual (análogo a lo hecho en la última parte de la demostración del teorema 3.1.32).  $\square$

**Corolario 3.1.34.** *El funtor  $\bar{\gamma}_c : \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_c$  admite un cálculo de fracciones a izquierda y el funtor  $\bar{\gamma}_f : \pi\mathcal{C}_f \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_f$  admite un cálculo de fracciones a derecha.*

*Demostración.* Se deduce de lo visto antes sobre cálculo de fracciones, pues  $\bar{\gamma}_c$  tiene un adjunto a derecha plenamente fiel.  $\square$

*Nota 3.1.35.* En general la localización  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  no se puede calcular por fracciones a izquierda o derecha.

*Observación 3.1.36.* En el ejemplo de  $\mathcal{Top}$ , tenemos que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_f$  y la homotopía usual coincide en  $\mathcal{C}_c$  con la definida arriba. Entonces  $\pi\mathcal{C}_{c,f} = \pi\mathcal{C}_c$  es la categoría homotópica de espacios cofibrantes que resulta equivalente a la categoría homotópica usual de CW-complejos.

**Observación importante 3.1.37.** Más aún, en  $\mathcal{Top}$  cuando uno quiere invertir las equivalencias débiles, se queda con los CW-complejos y usa el teorema de Whitehead ([13], pág. 89) y entonces toma clases de equivalencia de morfismos vía homotopía. Más precisamente, dado  $Y$  espacio topológico, existe un CW-complejo  $Y'$ , y una equivalencia débil  $f : Y' \rightarrow Y$ . Esto permite ‘reemplazar’ el espacio topológico  $Y$  por el CW-complejo  $Y'$  y está relacionado con la demostración del teorema 3.1.32, en la cual se efectúa un reemplazo cofibrante (análogo a ‘quedarse’ con los CW-complejos) y luego un reemplazo fibrante (que en  $\mathcal{Top}$  no es necesario pues todo objeto es fibrante).

**Ejemplo 3.1.38.** Este ejemplo muestra que si bien la categoría  $\text{Ho}\mathcal{C}$  está determinada por la categoría  $\mathcal{C}$  y la clase de equivalencias débiles, la estructura de categoría de modelos en  $\mathcal{C}$  no lo está. Por ejemplo, sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña y consideramos en  $\mathcal{C}$  las dos estructuras de categoría de modelos que siguen:

1. fibraciones: isomorfismos, cofibraciones: todos los morfismos de  $\mathcal{C}$ , equivalencias débiles: todos los morfismos de  $\mathcal{C}$ .
2. fibraciones: todos los morfismos de  $\mathcal{C}$ , cofibraciones: isomorfismos, equivalencias débiles: todos los morfismos de  $\mathcal{C}$ .

Notamos que son dos estructuras diferentes de categoría de modelos para  $\mathcal{C}$  con la misma clase de equivalencias débiles.

## 3.2. Los funtores loop y suspensión

En esta sección  $\mathcal{C}$  denotará una categoría de modelos y  $f, g : A \rightarrow B$  serán dos morfismos, con  $A$  cofibrante y  $B$  fibrante.

**Definición 3.2.1.** Sean  $h : IA \rightarrow B$  y  $h' : I'A \rightarrow B$  dos homotopías a izquierda de  $f$  a  $g$ . Una homotopía a izquierda de  $h$  a  $h'$  será un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 IA & \vee_{A \vee A} & I'A & \xrightarrow{h+h'} & B \\
 \sigma+\sigma' \downarrow & & \searrow^{j_0+j_1} & & \uparrow H \\
 A & & \xleftarrow{\tau} & JA & 
 \end{array}$$

donde  $j_0 + j_1$  es una cofibración,  $\tau$  es una equivalencia débil y  $IA \vee_{A \vee A} I'A$  denota al pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 A \vee A & \xrightarrow{\partial_0+\partial_1} & IA \\
 \partial'_0+\partial'_1 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_1 \\
 I'A & \xrightarrow{\text{in}_2} & IA \vee_{A \vee A} I'A
 \end{array}$$

Decimos que  $h$  es homotópica a  $h'$  a izquierda si existe tal homotopía a izquierda y lo notaremos  $h \stackrel{l}{\sim} h'$ .

*Nota 3.2.2.*

1. Como en la sección anterior,  $JA$  denotará un objeto de  $\mathcal{C}$  junto con una cofibración  $j_0 + j_1$  y una equivalencia débil  $\tau$  como en la definición anterior.
2. Pensando en  $Top$ , queremos definir el  $\pi_1$ , para lo cual necesitamos homotopía entre caminos (en cierto sentido). Sea  $X$  un espacio topológico. Un camino en  $X$  puede pensarse como una homotopía entre las funciones punto inicial y punto final que salen del singleton y llegan a  $X$ . Pegando dos caminos (o lazos)  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$  con los mismos puntos iniciales y finales obtenemos una función

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 : I \underset{\{0,1\}}{\vee} I \simeq S^1 \rightarrow X$$

$\gamma_1$  y  $\gamma_2$  resultarán homotópicos si  $f$  se puede extender de manera continua al disco. Pensando en esta idea, podríamos definir homotopías entre homotopías, cambiando en singleton por otro espacio topológico  $A$ , resultando que si  $h, h' : IA \rightarrow X$  son dos homotopías entre  $f$  y  $g$ , una homotopía  $H$  entre  $h$  y  $h'$  es una función continua  $H : A \times D^2 \rightarrow X$  tal que  $H|_{S^1} = h + h'$ . (también puede verse como una homotopía usual relativa a  $i_0(A) \cup i_1(A)$ ). Notemos también que como la inclusión  $S^1 \hookrightarrow D^2$  es una cofibración y  $D^2 \rightarrow *$  es una equivalencia homotópica se obtiene que  $A \times S^1 \hookrightarrow A \times D^2$  es una cofibración (para cada  $a \in A$  fijo, extendiendo homotopías según la fórmula y luego pego las extensiones) y  $A \times D^2 \rightarrow A$  tal que  $(a, x) \mapsto a$  es una equivalencia homotópica. Así, el  $A \times D^2$  hace las veces del  $JA$  en la definición anterior.

**Definición 3.2.3.** Sea  $h : IA \rightarrow B$  una homotopía a izquierda de  $f$  a  $g$  y sea  $k : A \rightarrow B^I$  una homotopía a derecha de  $f$  a  $g$ . Una correspondencia entre  $h$  y  $k$  será un morfismo  $H : A \times I \rightarrow B^I$  tal que  $H\partial_0 = k$ ,  $H\partial_1 = sg$ ,  $d_0H = h$ ,  $d_1H = g\sigma$ . Diremos que  $h$  y  $k$  se corresponden si existe tal correspondencia.

Usaremos los siguientes diagramas para indicar una homotopía a izquierda  $h$ , una homotopía a derecha  $k$  y una correspondencia  $H$  entre  $h$  y  $k$ :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet \\ & & \\ & & \bullet \\ & & \downarrow k \\ & & \bullet \\ & & f \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ & & \xrightarrow{g\sigma} \\ & & \bullet \\ & & \downarrow sg \\ \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet \\ f & & g \end{array}$$

*Nota 3.2.4.* En  $Top$ , si  $h : IA \rightarrow B$  es una homotopía, y definimos  $k : A \rightarrow B^I$  por  $k(a)(t) = h(a, t)$ , una correspondencia entre  $h$  y  $k$  es por ejemplo la función  $H : IA \rightarrow B^I$  definida por  $H(a, t)(s) = h(a, 1 - (1 - t)(1 - s))$ .

**Lema 3.2.5.** Dado  $IA$  y una homotopía a derecha  $k : A \rightarrow B^I$ , existe una homotopía a izquierda  $h : IA \rightarrow B$  que se corresponde con  $k$ . Dualmente, dados  $B^I$  y  $h$ , existe una  $k$  que se corresponde con  $h$ .

*Demostración.* Por M1, existe  $H$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{k+sg} & B^I \\ \partial_0 + \partial_1 \downarrow & \nearrow H & \downarrow d_1 \\ IA & \xrightarrow{g\sigma} & B \end{array}$$

ya que  $d_1(k + sg) = d_1k + d_1sg = g + g = g\sigma(\partial_0 + \partial_1)$ ,  $\partial_0 + \partial_1$  es cofibración y  $d_1$  es fibración trivial, por dual al lema 3.1.16. Definiendo  $h = d_0H$ , se tiene que  $H\partial_0 = k$ ,  $H\partial_1 = sg$ ,  $d_0H = h$  y  $d_1H = g\sigma$ , por lo que  $h$  se corresponde con  $k$ .  $\square$

*Nota 3.2.6.* En  $Top$ , si  $IA$  y  $B^I$  son los usuales, este lema es trivial por la ley exponencial.

**Lema 3.2.7.** *Supongamos que  $h : IA \rightarrow B$  y  $h' : I'A \rightarrow B$  son dos homotopías a izquierda de  $f$  a  $g$  y que  $k : A \rightarrow B^I$  es una homotopía a derecha de  $f$  a  $g$  tal que  $h$  y  $k$  se corresponden. Entonces  $h'$  y  $k$  se corresponden si y sólo si  $h'$  es homotópica a  $h$  a izquierda.*

*Demostración.* Sea  $H : IA \rightarrow B^I$  una correspondencia entre  $h$  y  $k$  y sea  $H' : I'A \rightarrow B^I$  una correspondencia entre  $h'$  y  $k$ . Sean  $JA$ ,  $j_0 + j_1$  y  $\tau$  como en la definición 3.2.1. Se tiene que existe  $K$  en

$$\begin{array}{ccc} IA \vee I'A & \xrightarrow{H+H'} & B^I \\ \downarrow j_0 + j_1 & \nearrow K & \downarrow d_1 \\ JA & \xrightarrow{g\tau} & B \end{array}$$

pues  $g\tau(j_0 + j_1) = g\sigma + g\sigma' = d_1(H + H')$ ,  $j_0 + j_1$  es cofibración y  $d_1$  es fibración trivial. Luego  $d_0K : A \times J \rightarrow B$  es una homotopía a izquierda de  $h$  a  $h'$  ya que

$$d_0K(j_0 + j_1) = d_0(H + H') = d_0H + d_0H' = h + h'$$

Recíprocamente, supongamos que tenemos  $H : IA \rightarrow B^I$  una correspondencia entre  $h$  y  $k$  y una homotopía a izquierda  $K : JA \rightarrow B$  de  $h$  a  $h'$ . Entonces  $in_1 : IA \rightarrow IA \vee I'A$  es una cofibración, por ser la extensión de cobase de  $\partial_0 + \partial_1$  que es una cofibración. Luego,  $j_0 : IA \rightarrow JA$  es una cofibración pues  $j_0 = (j_0 + j_1) \circ in_1$  y  $(j_0 + j_1)$  y  $in_1$  son cofibraciones. También,  $j_0$  es una equivalencia débil por M5, ya que  $\tau j_0 = \sigma$ . Por lo tanto, por M1, la flecha punteada existe en:

$$\begin{array}{ccc} IA & \xrightarrow{H} & B^I \\ j_0 \downarrow & \nearrow \phi & \downarrow (d_0, d_1) \\ JA & \xrightarrow{(K, g\tau)} & B \times B \end{array}$$

y  $\phi j_1 : I'A \rightarrow B^I$  es una correspondencia entre  $h'$  y  $k$ , ya que  $\phi j_1 \partial'_0 = \phi j_0 \partial_0 = H \partial_0 = k$ ,  $\phi j_1 \partial'_1 = \phi j_0 \partial_1 = H \partial_1 = sg$ ,  $d_0 \phi j_1 = K j_1 = h'$ ,  $d_1 \phi j_1 = g\tau j_1 = g\sigma'$ .  $\square$

**Corolario 3.2.8.** ‘Ser homotópico a izquierda’ es una relación de equivalencia en la clase de homotopías a izquierda de  $f$  a  $g$  y las clases de equivalencia forman un conjunto  $\pi_1^l(A, B, f, g)$ . Dualmente, las clases de homotopía a derecha de homotopías a derecha forman un conjunto  $\pi_1^r(A, B, f, g)$ .

La correspondencia da una biyección  $\pi_1^l(A, B, f, g) \simeq \pi_1^r(A, B, f, g)$ .

*Demostración.* Por lema 3.2.7 resulta claro que ser homotópico a izquierda es relación de equivalencia. Por lema 3.2.5 toda  $h$  se corresponde con una  $k$  con  $B^I$  fijo, y usando nuevamente el lema 3.2.7 se obtiene que las clases de equivalencia forman un conjunto. La biyección  $\pi_1^l(A, B, f, g) \simeq \pi_1^r(A, B, f, g)$  es clara del lema 3.2.7 y su dual.  $\square$

Por el corolario, podemos escribir  $\pi_1(A, B, f, g)$  para las clases de equivalencia de homotopías de  $f$  a  $g$ .

*Nota 3.2.9.* El corolario anterior demuestra para categoría de modelos un hecho bien conocido en  $\mathcal{Top}$ . De la misma forma, imitaremos la definición de composición e inversas de homotopías de  $\mathcal{Top}$  y sus propiedades básicas en la definición y proposición siguientes.

**Definición 3.2.10.** Sean  $f_1, f_2, f_3 \in \text{Hom}(A, B)$ , sea  $h: IA \rightarrow B$  una homotopía a izquierda de  $f_1$  a  $f_2$  y sea  $h': I'A \rightarrow B$  una homotopía a izquierda de  $f_2$  a  $f_3$ . La composición de  $h$  y  $h'$ , que notaremos  $h \cdot h'$ , es la homotopía  $h'': I''A \rightarrow B$  dada por  $h''\text{in}_1 = h$ ,  $h''\text{in}_2 = h'$ , donde  $I''A$  es el cilindro construido en el lema 3.1.21.

Si  $f, g \in \text{Hom}(A, B)$  y  $h: IA \rightarrow B$  es una homotopía a izquierda de  $f$  a  $g$ , la inversa de  $h$ , que notaremos  $h^{-1}$ , es la homotopía a izquierda  $h': I'A \rightarrow B$  de  $g$  a  $f$ , donde  $I'A$  es el cilindro de  $A$  dado por  $I'A = IA$ ,  $\partial'_0 = \partial_1$ ,  $\partial'_1 = \partial_0$ ,  $\sigma' = \sigma$  y donde  $h' = h$ .

Usaremos los siguientes diagramas para representar  $h \cdot h'$  y  $h^{-1}$ :

$$\begin{array}{c} f_1 \quad h \quad f_2 \quad h' \quad f_3 \qquad g \quad h^{-1} \quad f \\ \bullet \quad \quad \bullet \quad \quad \bullet \qquad \bullet \quad \quad \bullet \end{array}$$

Composición e inversa para homotopías a derecha se definen dualmente y se representarán con diagramas similares a los anteriores pero con líneas verticales.

**Proposición 3.2.11.** La composición de homotopías a izquierda induce una función  $\pi_1^l(A, B, f_1, f_2) \times \pi_1^l(A, B, f_2, f_3) \rightarrow \pi_1^l(A, B, f_1, f_3)$  y similarmente para homotopías a derecha. La composición de homotopías a izquierda y a derecha es compatible con la biyección del corolario 3.2.8. Finalmente, la categoría con objetos los elementos de  $\text{Hom}(A, B)$ , con morfismos de  $f$  a  $g$  los elementos de  $\pi_1(A, B, f, g)$  y con composición de morfismos inducida por la composición de homotopías, es un grupoide, donde la inversa de la clase de  $h$  en  $\pi_1^l(A, B, f, g)$  es la clase de  $h^{-1}$ .

*Demostración.* Sean  $h$  una homotopía a izquierda de  $f_1$  a  $f_2$ ,  $h'$  una homotopía a izquierda de  $f_2$  a  $f_3$ ,  $k$  una homotopía a derecha de  $f_1$  a  $f_2$  y  $k'$  una homotopía a derecha de  $f_2$  a  $f_3$ . Sea  $H$  una correspondencia entre  $h$  y  $k$  y  $H'$  una correspondencia entre  $h'$  y  $k'$ . Tenemos

la siguiente correspondencia entre  $h \cdot h'$  y  $k \cdot k'$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 \bullet & \xrightarrow{f_3\sigma} & \bullet & \xrightarrow{f_3\sigma'} & \bullet \\
 k' \downarrow & & k' \downarrow & & s'f_3 \downarrow \\
 \bullet & \xrightarrow{f_2\sigma} & \bullet & \xrightarrow{h'} & \bullet \\
 k \downarrow & & sf_2 \downarrow & & sf_3 \downarrow \\
 \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet & \xrightarrow{h'} & \bullet
 \end{array}$$

Luego, por el lema 3.2.7 esto prueba las primeras dos afirmaciones del teorema.

Veamos que la composición es asociativa: Sean  $h, h', h'' \in \pi_1(A, B, f, g)$ ,  $h : IA \rightarrow B$ ,  $h' : I'A \rightarrow B$ ,  $h'' : I''A \rightarrow B$  y llamemos  $\partial_0, \partial_1 : A \rightarrow IA$ ,  $\sigma : IA \rightarrow A$ ,  $\partial'_0, \partial'_1 : A \rightarrow I'A$ ,  $\sigma' : IA \rightarrow A$ ,  $\partial''_0, \partial''_1 : A \rightarrow I''A$  y  $\sigma'' : IA \rightarrow A$  a los morfismos correspondientes dados por la definición de cilindro de  $A$ . Tenemos las composiciones  $(h \cdot h') \cdot h''$  y  $h \cdot (h' \cdot h'')$  dadas por los diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\partial_1} & IA \\
 \partial'_0 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_1 \\
 I'A & \xrightarrow{\text{in}_2} & IA_3 \\
 & \searrow h' & \downarrow h \\
 & & B
 \end{array} & & \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\partial_1^3} & IA_3 \\
 \partial''_0 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_3 \\
 I''A & \xrightarrow{\text{in}_4} & IA_4 \\
 & \searrow h'' & \downarrow (h \cdot h') \cdot h'' \\
 & & B
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\partial'_1} & I'A \\
 \partial''_0 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}'_1 \\
 I''A & \xrightarrow{\text{in}'_2} & IA_5 \\
 & \searrow h'' & \downarrow h' \\
 & & B
 \end{array} & & \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\partial_1} & IA \\
 \partial_0^5 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}'_3 \\
 IA_5 & \xrightarrow{\text{in}'_4} & IA_6 \\
 & \searrow h' \cdot h'' & \downarrow h \\
 & & B
 \end{array}
 \end{array}$$

donde a los cilindros de  $A$   $IA_j$  para  $j = 3, 4, 5, 6$  les corresponden los morfismos  $\partial_0^j, \partial_1^j, \sigma^j$  dados por (cf. 3.1.21):

$$\begin{aligned}
 \partial_0^3 &= \text{in}_1 \partial_0, & \partial_1^3 &= \text{in}_2 \partial_1, & \sigma^3 &= \sigma + \sigma' \\
 \partial_0^4 &= \text{in}_3 \partial_0^3, & \partial_1^4 &= \text{in}_4 \partial_1^3, & \sigma^4 &= \sigma^3 + \sigma'' \\
 \partial_0^5 &= \text{in}'_1 \partial_0, & \partial_1^5 &= \text{in}'_2 \partial_1, & \sigma^5 &= \sigma' + \sigma'' \\
 \partial_0^6 &= \text{in}'_3 \partial_0, & \partial_1^6 &= \text{in}'_4 \partial_1^5, & \sigma^6 &= \sigma + \sigma^5
 \end{aligned}$$

Para probar la asociatividad hay que ver que  $(h \cdot h') \cdot h''$  y  $h \cdot (h' \cdot h'')$  son homotópicas a izquierda (como homotopías). Para ello necesitamos un objeto  $JA$  como en la definición. Pondremos  $IA_4$  en lugar de  $JA$ . Necesitamos para ello un morfismo de  $IA_6$  a  $IA_4$ . Lo

construimos de la siguiente manera: sea  $j_2 : IA_5 \rightarrow IA_4$  definido por  $j_2 = \text{in}_3 \text{in}_2 + \text{in}_4$  (notar que está bien definido, es decir, existe, pues de las igualdades anteriores se deduce  $\text{in}_3 \text{in}_2 \partial'_1 = \text{in}_4 \partial''_0$ ). Sea ahora  $j_1 : IA_6 \rightarrow IA_4$  definido por  $j_1 = \text{in}_3 \text{in}_1 + j_2$  (también está bien definido, análogo al anterior).

Tenemos el pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 A \vee A & \xrightarrow{\partial_0^4 + \partial_1^4} & IA_4 \\
 \partial_0^6 + \partial_1^6 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_5 \\
 IA_6 & \xrightarrow{\text{in}_6} & IA_3 \\
 & \searrow j_1 & \downarrow \text{Id} + j_1 \\
 & & B
 \end{array}$$

y  $\text{Id} + j_1$  existe pues

$$\begin{aligned}
 j_1(\partial_0^6 + \partial_1^6) &= j_1 \partial_0^6 + j_1 \partial_1^6 = j_1 \text{in}_3 \partial_0 + j_1 \text{in}'_4 \partial_1^5 = \text{in}_3 \text{in}_1 \partial_0 + j_2 \partial_1^5 = \partial_0^4 + j_2 \text{in}'_2 \partial_1'' = \\
 &= \partial_0^4 + \text{in}_4 \partial_1'' = \partial_0^4 + \partial_1^4
 \end{aligned}$$

Tenemos entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 IA_4 \vee_{A \vee A} IA_6 & \xrightarrow{(h \cdot h') \cdot h'' + h \cdot (h' \cdot h'')} & B \\
 \sigma^4 + \sigma^6 \downarrow & \searrow \text{Id} + j_1 & \uparrow (h \cdot h') \cdot h'' \\
 A & \xleftarrow{\sigma^4} & IA_4
 \end{array}$$

Necesitamos que  $\sigma^4$  sea una equivalencia débil y que  $\text{Id} + j_1$  sea una cofibración. Como  $A$  es cofibrante, por lema 3.1.16,  $\partial_1$  es una cofibración trivial. Luego, por M4,  $\text{in}_2$  es una equivalencia débil y como  $\sigma^3 \text{in}_2 = \sigma'$  y  $\sigma'$  es una equivalencia débil, por M5, se tiene que  $\sigma^3$  también lo es. Repitiendo este razonamiento se obtiene que  $\sigma^4$  también es una equivalencia débil. Ahora bien,  $\text{Id} + j_1$  no tiene por qué ser cofibración. Consideremos entonces una factorización  $\text{Id} + j_1 = pi$  donde  $p : JA \rightarrow IA_4$  es una fibración trivial y  $i : IA_4 \vee_{A \vee A} IA_6 \rightarrow JA$  es una cofibración. Luego  $\sigma^4 p$  es una equivalencia débil, y se tiene:

$$\begin{array}{ccc}
 IA_4 \vee_{A \vee A} IA_6 & \xrightarrow{(h \cdot h') \cdot h'' + h \cdot (h' \cdot h'')} & B \\
 \sigma^4 + \sigma^6 \downarrow & \searrow i & \uparrow ((h \cdot h') \cdot h'') p \\
 A & \xleftarrow{\sigma^4 p} & JA
 \end{array}$$

Con lo cual,  $(h \cdot h') \cdot h''$  y  $h \cdot (h' \cdot h'')$  son homotópicas a izquierda.

Si  $h : IA \rightarrow B$  es una homotopía a izquierda de  $f$  a  $g$  y  $H : IA \rightarrow B^I$  es una correspondencia de  $h$  con alguna homotopía a derecha  $k$ , entonces los diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{g\sigma} & \bullet & \xrightarrow{g\sigma} & \bullet \\
 k \downarrow & k\sigma & \downarrow k & H & \downarrow sg \\
 \bullet & \xrightarrow{f\sigma} & \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{g\sigma} & \bullet & \xrightarrow{g\sigma} & \bullet \\
 k \downarrow & H & \downarrow sg & sg\sigma & \downarrow sg \\
 \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet & \xrightarrow{g\sigma} & \bullet
 \end{array}$$



dicen que  $f\sigma \cdot h$  y  $k$  se corresponden y que  $h \cdot g\sigma$  y  $k$  se corresponden, luego, por lema 3.2.7 se tiene que  $h$  y  $f\sigma \cdot h$  son homotópicas a izquierda y  $h \cdot g\sigma$  y  $h$  son homotópicas a izquierda, lo que demuestra la existencia de las identidades, y por lo tanto, se obtiene que  $\text{Hom}(A, B)$  definida como en el enunciado de la proposición es una categoría.

Finalmente, sea  $I'A$  el cilindro de  $A$  con  $I'A = IA$ ,  $\partial'_0 = \partial_1$ ,  $\partial'_1 = \partial_0$  y  $\sigma' = \sigma$ , sea  $H' : I'A \rightarrow B^I$ ,  $H' = H$ , sea  $H'' : I'A \rightarrow B^I$  una correspondencia de  $h^{-1}$  con alguna  $k''$  y sea  $\tilde{H} : IA \rightarrow B^I$ ,  $\tilde{H} = H''$ . Entonces los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g\sigma} & \bullet & \xrightarrow{g\sigma} & \bullet \\ \text{sg} \downarrow & H' & \downarrow k & H & \downarrow \text{sg} \\ \bullet & \xrightarrow{h^{-1}} & \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet \\ g & & f & & g \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f\sigma} & \bullet & \xrightarrow{f\sigma} & \bullet \\ \text{sf} \downarrow & \tilde{H} & \downarrow k'' & H'' & \downarrow \text{sf} \\ \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet & \xrightarrow{h^{-1}} & \bullet \\ f & & g & & f \end{array}$$

muestran que  $h^{-1} \cdot h \sim g\sigma \cdot g\sigma \sim g\sigma$  (por lema 3.2.7 y porque vimos que  $g\sigma$  es neutro) donde  $\sim$  denota homotopía. Análogamente,  $h \cdot h^{-1}h \sim f\sigma \cdot f\sigma \sim f\sigma$ , lo que prueba la última afirmación de la proposición.  $\square$

Es claro que si  $i : A' \rightarrow A$  es un morfismo entre objetos cofibrantes, entonces hay un functor  $i^* : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A', B)$ , que manda  $f$  a  $fi$  y una homotopía a derecha  $k : A \rightarrow B^I$  a  $ki : A' \rightarrow B^I$ . De la misma manera, si  $j : B \rightarrow B'$  es un morfismo entre objetos fibrantes, entonces hay un functor  $j_* : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, B')$ .

**Lema 3.2.12.** *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, B, f, g) & \xrightarrow{i^*} & \pi_1(A', B, fi, gi) \\ j_* \downarrow & & j_* \downarrow \\ \pi_1(A, B', jf, jg) & \xrightarrow{i^*} & \pi_1(A', B', jfi, jgi) \end{array}$$

conmuta.

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \pi_1(A, B, f, g)$  y representemos  $\alpha$  por  $k : A \rightarrow B^I$ . Por lema 3.1.24 podemos suponer que  $s : B \rightarrow B^I$  es una cofibración trivial. Además, análogamente a lo hecho en la demostración de dicho lema, podemos construir un cilindro  $IA$  de  $A$  tal que  $\sigma : IA \rightarrow A$  sea una fibración trivial. Luego, por lema 3.2.5, conseguimos  $h : IA \rightarrow B$  que se corresponde con  $k$ . Llamemos  $H$  a dicha correspondencia.

Por M1 existen las flechas punteadas en:

$$\begin{array}{ccc} A' \vee A' & \xrightarrow{\partial_0 i + \partial_1 i} & IA \\ \partial'_0 + \partial'_1 \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow \sigma \\ A' \times I & \xrightarrow{i\sigma'} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s'j} & (B')^I \\ s \downarrow & \nearrow \psi & \downarrow (d'_0, d'_1) \\ B^I & \xrightarrow{(jd_0, jd_1)} & B' \times B' \end{array}$$

Entonces  $\psi H : A' \times I \rightarrow (B')^I$  es una correspondencia entre  $jh$  y  $\psi k$  pues

$$d'_0 \psi H = jd_0 H = jh, \quad d'_1 \psi H = jd_1 H = (jh)\sigma, \quad \psi H \partial_0 = \psi k \quad \text{y} \quad \psi H \partial_1 = \psi sk = s'(jk)$$

Luego,  $\psi k$  representa  $j_*\alpha$  y entonces,  $\psi ki$  representa  $i^*j_*\alpha$ . Similarmente,  $H\varphi$  es una correspondencia entre  $h\varphi$  y  $ki$ , luego  $h\varphi$  representa  $i^*\alpha$  y entonces  $jh\varphi$  representa  $j_*i^*\alpha$ . Por último,  $\psi H\varphi$  es una correspondencia entre  $jh\varphi$  y  $\psi ki$  lo cual prueba que  $i^*j_*\alpha = j_*i^*\alpha$ .  $\square$

Trabajaremos ahora en categorías punteadas. Definiremos primero la fibra y la cofibra de un morfismo.

**Definición 3.2.13.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría punteada,  $X, Y$  objetos de  $\mathcal{C}$  y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de  $\mathcal{C}$ . La fibra de  $f$  es el pullback  $X \times_Y^*$ :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y^* & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & \text{pull} & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & Y \end{array}$$

La cofibra de  $f$  es el pushout  $Y \vee_X^*$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow f & \text{push} & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{j} & Y \vee_X^* \end{array}$$

**Definición 3.2.14.** Una categoría de modelos punteada es una categoría de modelos que es, además, una categoría punteada. Si  $\mathcal{C}$  es una categoría de modelos punteada y  $A$  es un objeto cofibrante y  $B$  es un objeto fibrante, notaremos  $\pi_1(A, B) = \pi_1(A, B, 0, 0)$ . Notar que  $\pi_1(A, B)$  es un grupo por la proposición anterior.

*Nota 3.2.15.* En  $\mathcal{Top}^*$  esta definición de fibra coincide con la ya conocida. Además, por lo dicho en la nota 3.2.2 se tiene que en  $\mathcal{Top}^*$ ,  $\pi_1(*, (B, b_0), 0, 0)$  es el  $\pi_1(B, b_0)$  usual.

**Observación importante 3.2.16.** En  $\mathcal{Top}$  tenemos un cilindro natural dado por la multiplicación por  $I$  y por lo tanto, podemos definir los funtores loop ( $\Omega$ ) y suspensión ( $\Sigma$ ) de  $\mathcal{Top}^*$  a  $\mathcal{Top}^*$ , que resultan adjuntos por la ley exponencial. Además, ambos funtores quedan bien definidos también en  $[\mathcal{Top}^*]$  y siguen siendo adjuntos.

Si  $\mathcal{C}$  es una categoría de modelos, no hay un cilindro natural, sino una familia de cilindros no naturales que definirán los funtores loop y suspensión, no en  $\mathcal{C}$  sino en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ . El siguiente teorema construye  $\Sigma A$  y  $\Omega B$  y prueba la adjunción mencionada.

**Teorema 3.2.17.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos punteada. Entonces hay un funtor de  $(\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}} \times \text{Ho}\mathcal{C}$  a la categoría de grupos,  $A, B \mapsto [A, B]_1$  que está determinado, salvo isomorfismo canónico, por  $[A, B]_1 = \pi_1(A, B)$  si  $A$  es cofibrante y  $B$  es fibrante. Más aún, hay dos funtores de  $\text{Ho}\mathcal{C}$  a  $\text{Ho}\mathcal{C}$ , el funtor suspensión  $\Sigma$  y el funtor loop  $\Omega$  e isomorfismos canónicos:

$$[\Sigma A, B] \simeq [A, B]_1 \simeq [A, \Omega B]$$

de funtores de  $(\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}} \times \text{Ho}\mathcal{C}$  a  $\text{Set}$  (donde  $[X, Y] = \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y)$ ).

*Demostración.* Sea  $A$  cofibrante y sea  $IA$  un cilindro para  $A$ . Sea  $\pi : IA \rightarrow \Sigma A$  la cofibra de  $\partial_0 + \partial_1 : A \vee A \rightarrow IA$ . Por M3,  $\Sigma A$  es cofibrante ( $* \rightarrow \Sigma A$  es cofibración por ser la extensión de cobase de  $\partial_0 + \partial_1$  que es cofibración).

Para  $B$  fibrante, definiremos una biyección natural  $\rho : \pi(\Sigma A, B) \rightarrow \pi_1(A, B)$ . Sea  $\varphi : \Sigma A \rightarrow B$  un morfismo y sea  $\rho(\varphi)$  el elemento de  $\pi_1(A, B)$  representado por  $\varphi\pi : IA \rightarrow B$ . Si  $\varphi, \varphi' \in \text{Hom}(\Sigma A, B)$  y  $\varphi \sim \varphi'$ , hay una homotopía a derecha  $h : \Sigma A \rightarrow B^I$  de  $\varphi$  a  $\varphi'$ . Sea  $H : IA \rightarrow B^I$  una correspondencia de  $\varphi'\pi$  con alguna homotopía a derecha  $k$  de 0 a 0 (notar que de la definición de cofibra y de  $\Sigma A$  se obtiene que  $\varphi'\pi\partial_j = 0$  para  $j = 1, 2$  con lo cual  $\varphi'\pi$  es una homotopía a izquierda de 0 a 0) y consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{0\sigma} & \bullet \\
 k \downarrow & \begin{array}{c} H \\ \varphi'\pi \end{array} & \downarrow s_0 \\
 \bullet & \xrightarrow{\varphi'\pi} & \bullet \\
 s_0 \downarrow & \begin{array}{c} h\pi \\ \varphi\pi \end{array} & \downarrow s_0 \\
 \bullet & \xrightarrow{\varphi\pi} & \bullet
 \end{array}$$

Esto muestra que  $\varphi\pi$  se corresponde con  $s_0 \cdot k$  y  $\varphi'\pi$  se corresponde con  $k$ , pero como  $s_0 \cdot k$  y  $k$  representan el mismo elemento de  $\pi_1(A, B)$  (vimos que  $s_0$  es neutro), entonces  $\varphi'\pi$  y  $\varphi\pi$  también representan el mismo elemento en  $\pi_1(A, B)$ , con lo cual  $\rho(\varphi) = \rho(\varphi')$ . Esto muestra que  $\rho$  está bien definida.

Por el lema 3.2.5,  $\rho$  es sobreyectiva ya que dado un elemento de  $\pi_1(A, B)$  puedo encontrar una homotopía a izquierda  $h : IA \rightarrow B$  de 0 a 0 que lo represente, luego,  $h\partial_0 = 0$  y  $h\partial_1 = 0$ , por lo tanto existe la flecha punteada  $\varphi$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 A \vee A & \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} & IA \\
 \downarrow & \text{push} & \downarrow \pi \\
 * & \longrightarrow & \Sigma A \\
 & \searrow & \downarrow \varphi \\
 & & B
 \end{array}$$

$h$  (curved arrow from  $IA$  to  $B$ )

con lo cual,  $\varphi\pi = h$ .

Veamos que  $\rho$  es inyectiva. Si  $\rho(\varphi) = \rho(\varphi')$ , entonces, con las notaciones de la definición 3.2.1, hay una homotopía a izquierda  $H : JA \rightarrow B$  de  $\rho(\varphi)$  a  $\rho(\varphi')$ . Sea  $\tilde{H} : IA \rightarrow B^I$  una correspondencia entre  $\varphi\pi$  y  $k$ . Entonces existe  $K' : A \times J \rightarrow B^I$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 IA & \vee_{A \vee A} & IA & \xrightarrow{\tilde{H} + \tilde{H}} & B^I \\
 j_0 + j_1 \downarrow & & \downarrow K' & & \downarrow d_1 \\
 JA & \xrightarrow{0\tau} & B & & B
 \end{array}$$

pues  $0\tau(j_0 + j_1) = 0\sigma + 0\sigma' = d_1(\tilde{H} + \tilde{H})$ ,  $j_0 + j_1$  es cofibración y  $d_1$  es fibración trivial. Luego  $H' = d_0K' : JA \rightarrow B$  es una homotopía a izquierda de  $\varphi\pi$  a  $\varphi\pi$  ya que

$$d_0K'(j_0 + j_1) = d_0(\tilde{H} + \tilde{H}) = \varphi\pi + \varphi\pi$$

Así,  $H'j_0 = H'j_1 = \varphi\pi$ .

Sea  $K$  la flecha punteada en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} IA & \xrightarrow{s\varphi\pi} & B^I \\ j_0 \downarrow & \nearrow K & \downarrow (d_0, d_1) \\ JA & \xrightarrow{(H, H')} & B \times B \end{array}$$

(existe pues vimos en la demostración del lema 3.2.7 que  $j_0$  es una cofibración trivial). Entonces  $Kj_1 : IA \rightarrow B^I$  es una homotopía a derecha (en el sentido de la sección anterior) de  $\varphi'\pi$  a  $\varphi\pi$ , ya que  $d_0Kj_1 = Hj_1 = \varphi'\pi$  y  $d_1Kj_1 = H'j_1 = \varphi\pi$ . Además, del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A \vee A & \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} & IA & & \\ \partial_0 + \partial_1 \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_1 & \searrow j_0 & \\ IA & \xrightarrow{\text{in}_2} & \Sigma IA \vee IA & & \\ & & \downarrow \text{in}_2 & \searrow j_0 + j_1 & \\ & & A \vee A & & \\ & & \downarrow & \searrow j_1 & \\ & & * & & JA \end{array}$$

se obtiene que  $j_0(\partial_0 + \partial_1) = j_1(\partial_0 + \partial_1)$ , luego

$$Kj_0(\partial_0 + \partial_1) = Kj_1(\partial_0 + \partial_1) = s\varphi\pi(\partial_0 + \partial_1) = s\varphi 0 = 0$$

Por lo tanto, existe  $\phi$  en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} & IA \\ \downarrow & \text{push} & \downarrow \pi \\ * & \xrightarrow{\quad} & \Sigma A \\ & & \downarrow \\ & & B \end{array} \begin{array}{l} \nearrow Kj_1 \\ \searrow \phi \end{array}$$

y  $\phi$  es una homotopía a derecha de  $\varphi'$  a  $\varphi$ . En efecto,  $d_0\phi\pi = d_0Kj_1 = \varphi'\pi$ , luego  $d_0\phi$  y  $\varphi'$  sirven como flechas punteadas en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} & IA \\ \downarrow & \text{push} & \downarrow \pi \\ * & \xrightarrow{\quad} & \Sigma A \\ & & \downarrow \\ & & B \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \varphi'\pi \\ \searrow \phi \end{array}$$

(notar que  $\varphi'\pi(\partial_0 + \partial_1) = 0$ ), por lo tanto, por unicidad, se tiene que  $d_0\phi = \varphi'$ . Análogamente  $d_1\phi = \varphi$ . Esto prueba que  $\rho$  es inyectiva.

Dualmente, si elegimos un objeto de caminos  $B^I$  y llamamos  $\Omega B$  a la fibra de  $(d_0, d_1) : B^I \rightarrow B \times B$ , entonces  $\Omega B$  es fibrante y hay una biyección natural  $\pi(A, \Omega B) \simeq \pi_1(A, B)$  cuando  $A$  es cofibrante.

Se tiene un funtor de  $(\mathcal{C}_c)^{\text{op}} \times \mathcal{C}_f$  a la categoría de grupos definido como  $(A, B) \mapsto \pi_1(A, B)$  sobre los objetos y  $(i, j) = i^* \circ j_*$  sobre las flechas. En efecto, es claro que las identidades van a identidades, y que respeta composiciones se deduce del lema anterior. De las biyecciones  $\pi(\Sigma A, B) \simeq \pi_1(A, B) \simeq \pi(A, \Omega B)$  y usando el teorema 3.1.32 y su primer corolario se tiene que este funtor induce un funtor de  $(\text{Ho}\mathcal{C}_c)^{\text{op}} \times \text{Ho}\mathcal{C}_f$  a la categoría de grupos. En efecto, fijando primero  $A$  tenemos un funtor de  $\mathcal{C}_f$  a grupos que manda equivalencias débiles a isomorfismos de grupos ya que

$$\pi_1(A, B) \simeq \pi(\Sigma A, B) \simeq \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(\Sigma A, B)$$

(pues  $\Sigma A$  es cofibrante) y si  $j : B \rightarrow B'$  es una equivalencia débil, entonces es un isomorfismo en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y por lo tanto

$$j_* : \pi_1(A, B) \simeq \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(\Sigma A, B) \rightarrow \pi_1(A, B') \simeq \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(\Sigma A, B')$$

es un isomorfismo de grupos. Así, el funtor de  $\mathcal{C}_f$  a grupos pasa a  $\text{Ho}\mathcal{C}_f$ . Para pasar a  $\text{Ho}\mathcal{C}_c$  procedemos de forma análoga fijando  $B$  y moviendo  $A$ .

Este funtor de  $(\text{Ho}\mathcal{C}_c)^{\text{op}} \times \text{Ho}\mathcal{C}_f$  a la categoría de grupos se extiende, por el teorema 3.1.32 a un funtor  $A, B \mapsto [A, B]_1$  de  $(\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}} \times \text{Ho}\mathcal{C}$  a grupos, en forma única salvo isomorfismo canónico.  $\square$

*Nota 3.2.18.* Los funtores  $\Sigma$  y  $\Omega$  están definidos en forma análoga a cómo se definen en  $\mathcal{Top}^*$ . En [12] se prueba que son funtores adjuntos en  $[\mathcal{Top}^*]$ . La demostración vista arriba tiene la misma idea de lo que se hace en  $\mathcal{Top}$ : usar ley exponencial. Pero como no tenemos esto en categorías de modelos, usamos su análogo que es la correspondencia entre homotopías a izquierda y a derecha.

*Observación 3.2.19.*  $\Sigma$  y  $\Omega$  son funtores adjuntos en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y son únicos salvo isomorfismo canónico. Además, por 1.2.7 y 1.2.14, se tiene que para todo  $X$  objeto de  $\mathcal{C}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma^n X$  es un cogrupo en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y  $\Omega^n X$  es un grupo en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ , que resultan abelianos si  $n \geq 2$ .

### 3.3. Sucesiones de la fibra y la cofibra

En esta sección  $\mathcal{C}$  denotará una categoría de modelos punteada.

Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración, donde  $B$  es fibrante y sea  $i : F \rightarrow E$  la inclusión de la fibra de  $p$  en  $E$ . Como las fibraciones son estables por cambio de base y  $p$  es fibración, entonces  $F \rightarrow *$  es fibración, de donde  $F$  es un objeto fibrante. También  $E$  es fibrante pues el morfismo  $E \rightarrow *$  es la composición de las fibraciones  $p : E \rightarrow B$  y  $B \rightarrow *$ . Notemos además que del pullback de la definición de la fibra  $F$  se obtiene que  $pi = 0$ .

Sea

$$B \xrightarrow{s^B} B^I \xrightarrow{(d_0^B, d_1^B)} B \times B$$

una factorización de  $\Delta_B$  donde  $s^B$  es una equivalencia débil y  $(d_0^B, d_1^B)$  es una fibración. Sea  $E \times_B B^I$  el pullback de  $p : E \rightarrow B$  y  $d_0^B : B^I \rightarrow B$  y sea  $B^I \times_B E$  el pullback de  $p : E \rightarrow B$  y  $d_1^B : B^I \rightarrow B$ . Sea

$$E \xrightarrow{s^E} E^I \xrightarrow{(d_0^E, p^I, d_1^E)} E \times_B B^I \times_B E$$

una factorización de  $(\text{Id}_E, s^B p, \text{Id}_E)$  en una equivalencia débil seguida de una fibración, donde  $E \times_B B^I \times_B E$  es el límite del diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ & \searrow^{d_0^B} & \nearrow \\ B^I & \xrightarrow{d_1^B} & B \\ & \searrow^p & \nearrow \\ E & & \end{array}$$

por lo visto en la proposición 1.1.2. En particular, llamando  $\text{pr}_1$ ,  $\text{pr}_2$  y  $\text{pr}_3$  a las proyecciones se tiene que  $p \text{pr}_1(d_0^E, p^I, d_1^E) = d_0^B \text{pr}_2(d_0^E, p^I, d_1^E)$ , de donde  $p d_0^E = d_0^B p^I$ . De la misma forma se obtiene  $p d_1^E = d_1^B p^I$ .

Tenemos que  $(\text{pr}_1, \text{pr}_2)$  es la extensión de base de  $(d_0^B, d_1^B)$  por  $p \times p$ . En efecto, se tiene un pullback:

$$\begin{array}{ccc} E \times_B B^I \times_B E & \xrightarrow{(\text{pr}_1, \text{pr}_3)} & E \times E \\ \text{pr}_2 \downarrow & \text{pull} & \downarrow p \times p \\ B^I & \xrightarrow{(d_0^B, d_1^B)} & B \times B \end{array}$$

ya que si tenemos  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : A \rightarrow E \times E$  y  $\beta : A \rightarrow B^I$  tales que

$$(p \times p) \circ (\alpha_1, \alpha_2) = (d_0^B, d_1^B) \beta$$

entonces  $p \alpha_1 = d_0^B \beta$  y  $p \alpha_2 = d_1^B \beta$ , luego, existe un único morfismo  $\phi : A \rightarrow E \times_B B^I \times_B E$  (que notamos  $(\alpha_1, \beta, \alpha_2)$ ) tal que  $\text{pr}_1 \phi = \alpha_1$ ,  $\text{pr}_2 \phi = \beta$  y  $\text{pr}_3 \phi = \alpha_2$ , por lo tanto existe un único morfismo  $\varphi$  (el mismo  $\phi$ ) tal que  $(\text{pr}_1, \text{pr}_3) \varphi = (\alpha_1, \alpha_2)$  y  $\text{pr}_2 \varphi = \beta$ . Así, el diagrama anterior es un pullback y luego  $(\text{pr}_1, \text{pr}_2)$  es la extensión de base de  $(d_0^B, d_1^B)$  por  $p \times p$ , con lo cual es una fibración pues  $(d_0^B, d_1^B)$  lo es. Por lo tanto,  $(d_0^E, d_1^E) = (\text{pr}_1, \text{pr}_3) \circ (d_0^B, p^I, d_1^B)$  es fibración por ser composición de dos fibraciones. Análogamente,  $(\text{pr}_1, \text{pr}_2)$ ,  $(\text{pr}_2, \text{pr}_3)$ ,  $(d_0^E, p^I)$  y  $(p^I, d_1^E)$  son fibraciones.

El morfismo  $\tilde{\text{pr}}_1 : E \times_B B^I \rightarrow E$  es la extensión de base de  $d_0^B$  por  $p$  y luego es una fibración trivial por M3 y M4, ya que como  $B$  es fibrante, por lema 3.1.16,  $d_0^B$  es una fibración trivial. Luego, por M5,  $(d_0^E, p^I)$  es una equivalencia débil ya que  $\text{Id}_E = \text{pr}_1 \circ (d_0^E, p^I) \circ s_E$ .

Llamemos  $F \times_E E^I \times_E F$  al límite del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ & \searrow^{d_0^E} & \nearrow \\ E^I & \xrightarrow{d_1^E} & E \\ & \searrow^i & \nearrow \\ F & & \end{array}$$

(cf proposición 1.1.2) y sean  $\overline{\text{pr}}_1 : F \times_E E^I \times_E F \rightarrow F$ ,  $\overline{\text{pr}}_2 : F \times_E E^I \times_E F \rightarrow E^I$  y  $\overline{\text{pr}}_3 : F \times_E E^I \times_E F \rightarrow F$  las proyecciones. Se tiene:  $d_0^E \overline{\text{pr}}_2 = i \overline{\text{pr}}_1$  y  $d_1^E \overline{\text{pr}}_2 = i \overline{\text{pr}}_3$

Sea  $j : \Omega B \rightarrow B^I$  la fibra de  $(d_0^B, d_1^B)$ , es decir,

$$\begin{array}{ccc} \Omega B & \xrightarrow{j} & B^I \\ \downarrow & \text{pull} & \downarrow (d_0^B, d_1^B) \\ * & \longrightarrow & B \times B \end{array}$$

y sea  $\pi = (\text{pr}_1, j^{-1} p^I \text{pr}_2) : F \times_E E^I \times_E F \rightarrow F \times \Omega B$  donde estamos usando la siguiente notación: si  $\alpha : X \rightarrow Y$  es un monomorfismo en una categoría y  $\beta : Z \rightarrow Y$  es un morfismo, notamos por  $\alpha^{-1} \beta$  al único morfismo  $\gamma : Z \rightarrow X$  con  $\alpha \circ \gamma = \beta$ , si tal morfismo existe (notar que en caso de que exista es único). En nuestro caso,  $j$  es monomorfismo pues es la extensión de base del monomorfismo  $* \rightarrow B \times B$ ; y como

$$(d_0^B, d_1^B) p^I \overline{\text{pr}}_2 = (d_0^B p^I \overline{\text{pr}}_2, d_1^B p^I \overline{\text{pr}}_2) = (p d_0^E \overline{\text{pr}}_2, p d_1^E \overline{\text{pr}}_2) = (p i \overline{\text{pr}}_1, p i \overline{\text{pr}}_3) = (0, 0) = 0$$

por el pullback anterior se tiene que existe un morfismo  $\phi$  tal que  $j \phi = p^I \overline{\text{pr}}_2$  luego  $\phi = j^{-1} p^I \overline{\text{pr}}_2$ .

Se tiene un pullback:

$$\begin{array}{ccc} F \times_E E^I \times_E F & \xrightarrow{\overline{\text{pr}}_2} & E^I \\ \pi \downarrow & \text{pull} & \downarrow (d_0^E, p^I) \\ F \times \Omega B & \xrightarrow{i \times j} & E \times_B B^I \end{array}$$

En efecto, sean  $\alpha : A \rightarrow E^I$  y  $\beta : A \rightarrow F \times \Omega B$  tales que  $(d_0^E, p^I) \alpha = (i \times j) \beta$ . Queremos ver que existe un único morfismo  $\phi : A \rightarrow F \times_E E^I \times_E F$  tal que  $\text{pr}_2 \phi = \alpha$  y  $\pi \phi = \beta$ . Sean  $\text{pr}_3 : F \times \Omega B \rightarrow F$  y  $\text{pr}_4 : F \times \Omega B \rightarrow \Omega B$  las proyecciones. Tenemos que

$$p d_1^E \alpha = d_1^B p^I \alpha = d_1^B j \text{pr}_4 \beta = 0 \text{pr}_4 \beta = 0$$

Por lo tanto, mirando el pullback de la fibra  $F$  se tiene que existe un único morfismo  $\psi : A \rightarrow F$  tal que  $i \psi = d_1^E \alpha$ . Ahora bien,  $i \text{pr}_3 \beta = d_0^E \alpha$  (pues  $(d_0^E, p^I) \alpha = (i \times j) \beta$ )

y  $i\psi = d_1^E \alpha$ , luego existe  $\phi = (\text{pr}_3 \beta, \alpha, \psi) : A \rightarrow F \times_E E^I \times_E F$ . Es claro que  $\text{pr}_2 \phi = \alpha$ .

Además,  $\pi \phi = (\text{pr}_1, j^{-1} p^I \text{pr}_2) \phi = (\text{pr}_3 \beta, j^{-1} p^I \alpha) = (\text{pr}_3 \beta, j^{-1} j \text{pr}_4 \beta) = \beta$ . Luego tenemos la existencia de  $\phi$ . Veamos la unicidad. Supongamos  $\phi'$  también cumple lo pedido. Entonces  $\text{pr}_3 \beta = \text{pr}_3 \pi \phi' = \text{pr}_1 \phi'$ . Además,  $\text{pr}_2 \phi' = \alpha$ . También,  $i \text{pr}_3 \phi' = d_1^E \text{pr}_2 \phi' = d_1^E \alpha$ , de donde, por unicidad de  $\psi$  se tiene que  $\text{pr}_3 \phi' = \psi$ . Así,  $\phi = (\text{pr}_3 \beta, \alpha, \psi) = \phi'$ .

Por lo tanto,  $\pi$  es una fibración trivial por M3 y M4 y luego, en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  se tiene un morfismo  $m : F \times \Omega B \rightarrow F$ , dado por la composición:

$$F \times \Omega B \xrightarrow{\gamma(\pi)^{-1}} F \times_E E^I \times_E F \xrightarrow{\gamma(\overline{\text{pr}_3})} F$$

Recordemos que notamos  $[X, Y] = \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y)$  y que  $[X, Y]_1 = [\Sigma X, Y] = [X, \Omega Y]$ . Además, si  $X$  es cofibrante e  $Y$  es fibrante tenemos biyecciones  $[X, Y] \simeq \pi(X, Y)$  y  $[X, Y]_1 \simeq \pi_1(X, Y)$ .

*Observación 3.3.1.* Sea  $A$  cofibrante y sea  $m_* : [A, F] \times [A, \Omega B] \rightarrow [A, F]$  definida por  $m_*(\alpha, \lambda) = m \circ (\alpha, \lambda)$ . Es fácil ver que  $m_*$  está bien definida, pues la función  $[A, F] \times [A, \Omega B] \rightarrow [A, F \times \Omega B]$  definida por  $(u, v) \mapsto (u, v)$  está bien definida ya que si  $h$  es una homotopía a izquierda entre  $u$  y  $u'$  y  $h'$  es una homotopía a izquierda entre  $v$  y  $v'$ , (podemos tomar  $h, h' : IA \rightarrow B$  (ambas saliendo del mismo cilindro) por lema 3.2.5) entonces  $(h, h')$  es una homotopía a izquierda entre  $(u, v)$  y  $(u, v')$ .

La motivación de lo anterior es construir un objeto de caminos  $E^I$  para  $E$  ‘relacionado’ con el  $B^I$ . En  $\mathcal{Top}$ , tomando los objetos usuales, con las notaciones de antes y siendo  $p^I : E^I \rightarrow B^I$  definida por  $p^I(\gamma) = p \circ \gamma$  es trivial que  $d_0^B p^I = p d_0^E$ ,  $d_1^B p^I = p d_1^E$  y  $p^I s^E = s^B p$  donde  $s^E : E \rightarrow E^I$  está definida por  $s^E(e)(t) = e \quad \forall t \in I$ , es decir,  $s^E(e)$  es el camino constante  $e$  y  $s^B$  se define de la misma manera. Construimos el  $E^I$  en la categoría de modelos punteada  $\mathcal{C}$  para que siga cumpliendo esto.

El pullback anterior, visto en  $\mathcal{Top}$  dice que tener un camino en  $E$  que empieza en la fibra  $F$  y tal que al proyectarlo a  $B$  da un lazo, es lo mismo que tener un camino en  $E$  que empieza y termina en la fibra. Lo que hace  $\pi$  es aplicar  $p$  al camino en  $E$  para obtener el lazo en  $B$  y devuelve además el punto inicial que estaba en  $F$ . Por lo tanto, su ‘inversa’, dado un lazo en  $B$  y un punto en la fibra, levanta el lazo a un camino en  $E$  que empiece en el punto dado y que terminará en otro punto de la fibra. Como  $p$  es una fibración, sabemos que este levantamiento existe. Por lo tanto, la función  $m : F \times \Omega B \rightarrow F$ , lo que hace es: dado un lazo en  $B$  y un punto de la fibra, levanta el camino a un camino en  $E$  que empiece en el punto dado y devuelve el punto final de este camino. Esta es la acción usual de  $\Omega B$  en  $F$  en  $\mathcal{Top}$  y da el morfismo de conexión en la sucesión exacta larga de la fibración  $p$ . De hecho, esto es lo que queremos generalizar para categorías de modelos y que veremos en los resultados siguientes.

**Proposición 3.3.2.** *Sea  $A$  cofibrante y notemos la función  $m_* : [A, F] \times [A, \Omega B] \rightarrow [A, F]$  por  $(\alpha, \lambda) \mapsto \alpha \cdot \lambda$ . Si  $\alpha \in [A, F]$  está representada por  $u : A \rightarrow F$ ,  $\lambda \in [A, \Omega B] = [A, B]_1$*



está representada por  $h : IA \rightarrow B$  con  $h(\partial_0, \partial_1) = 0$  y  $h'$  es una flecha punteada en

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{iu} & E \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow h' & \downarrow p \\ IA & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

entonces  $\alpha \cdot \lambda$  está representada por  $i^{-1}h'\partial_1 : A \rightarrow F$ .

*Demostración.* Sea  $H : IA \rightarrow B^I$  una correspondencia de  $h$  con  $k : A \rightarrow B^I$ . Sea  $K$  un levantado en

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s_E h' \partial_1} & E^I \\ \partial_1 \downarrow & \nearrow K & \downarrow (d_0^E, p^I) \\ IA & \xrightarrow{(h', H)} & E \times_B B^I \end{array}$$

Notar que existe dicho levantado pues

$$(d_0^E, p^I) s_E h' \partial_1 = (d_0^E s_E h' \partial_1, p^I s_E h' \partial_1) = (h' \partial_1, s_B p h' \partial_1) = (h' \partial_1, s_B h \partial_1) = (h' \partial_1, H \partial_1)$$

Ahora bien, como  $(d_0^E, p^I) K \partial_0 = (h', H) \partial_0 = (h' \partial_0, H \partial_0) = (iu, k) = (i \times j) \circ (u, j^{-1}k)$ , se tiene que  $K \partial_0 : A \rightarrow E^I$  induce un morfismo  $\overline{K \partial_0} : A \rightarrow F \times_E E^I \times_E F$  tal que  $\pi \overline{K \partial_0} = (u, j^{-1}k)$ , pues se tiene

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{K \partial_0} & E^I \\ \searrow \overline{K \partial_0} & & \downarrow (d_0^E, p^I) \\ F \times_E E^I \times_E F & \xrightarrow{\overline{\text{pr}}_2} & E^I \\ \downarrow \pi & \text{pull} & \downarrow \\ F \times \Omega B & \xrightarrow{i \times j} & E \times_B B^I \end{array}$$

Luego, como  $\lambda$  está representada por  $k$ , por la biyección del teorema 3.2.17 se tiene que también está representada por  $j^{-1}k : A \rightarrow B^I$ , por lo tanto,  $\alpha \cdot \lambda$  está representada por  $m \circ (u, j^{-1}k) = m \circ (\pi \overline{K \partial_0}) = \overline{\text{pr}}_3 \gamma(\pi)^{-1} \pi \overline{K \partial_0} = \overline{\text{pr}}_3 \overline{K \partial_0}$  y como  $i \overline{\text{pr}}_3 = d_1^E \overline{\text{pr}}_2$  entonces  $\overline{\text{pr}}_3 = i^{-1} d_1^E \overline{\text{pr}}_2$  y queda que  $\alpha \cdot \lambda$  está representada por

$$\overline{\text{pr}}_3 \overline{K \partial_0} = i^{-1} d_1^E \overline{\text{pr}}_2 \overline{K \partial_0} = i^{-1} d_1^E K \partial_0$$

Pero  $i^{-1} d_1^E K : IA \rightarrow F$  es una homotopía entre

$$i^{-1} d_1^E K \partial_0 \quad \text{e} \quad i^{-1} d_1^E K \partial_1 = i^{-1} d_1^E s_E h' \partial_1 = i^{-1} h' \partial_1$$

lo que prueba la proposición.  $\square$

*Nota 3.3.3.* En  $\mathcal{Top}$  si queremos definir  $m_*$  por composición con  $m$ , con las notaciones de antes, hacemos lo obvio: definimos  $(\alpha \cdot \lambda)(a) = \alpha(a) \cdot \lambda(a)$ , y esto es, levantar  $\lambda(a)$  (representada por  $h(a)$ ) empezando en  $\alpha(a)$  (representada por  $u(a)$ ) a una  $h'(a)$  y ver donde termina, o sea tomar  $h'(a, 1) = h' \partial_1(a)$ . Así, la proposición anterior, ‘traduce’ a categorías de modelos punteadas lo que uno conoce en  $\mathcal{Top}$ .

**Proposición 3.3.4.** *El morfismo  $m$  es independiente de la elección de  $p^I : E^I \rightarrow B^I$  y es una acción a derecha del grupo  $\Omega B$  en  $F$  en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ .*

*Demostración.* El diagrama de la proposición anterior es claramente independiente de  $p^I$ , luego  $m$  también lo es. Veremos que  $m_*$  es una acción a derecha del grupo  $[A, \Omega B]$  en  $[A, F]$  para todo objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$ , con lo cual se tendrá que  $m$  es una acción por la observación 1.3.5. Sean  $\alpha, \lambda, u, h$  y  $h'$  como en la proposición anterior. Es claro que  $\alpha \cdot 0 = \alpha$  pues  $i u \sigma$  es un levantado en

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i u} & E \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow i u \sigma & \downarrow p \\ I A & \xrightarrow{0} & B \end{array}$$

y luego, por la proposición anterior,  $\alpha \cdot 0$  está representado por  $i^{-1}(i u \sigma) \partial_1 = u$ , de donde  $\alpha \cdot 0 = \alpha$ . Por otra parte, sea  $\lambda_1 \in [A, B]_1$  y sea  $h_1 : I A \rightarrow B$  un representante de  $\lambda_1$ . Sea  $h'_1$  una flecha punteada en

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i(i^{-1}h'_1\partial_1)=h'_1\partial_1} & E \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow h'_1 & \downarrow p \\ I A & \xrightarrow{h_1} & B \end{array}$$

luego, por la proposición anterior,  $i^{-1}h'_1\partial_1$  representa  $(\alpha \cdot \lambda) \cdot \lambda_1$ . Como la composición de homotopías  $h \cdot h_1$  representa  $\lambda \lambda_1$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i u} & E \\ \partial_0'' \downarrow & \nearrow h' \cdot h'_1 & \downarrow p \\ I'' A & \xrightarrow{h \cdot h_1} & B \end{array}$$

muestra que  $i^{-1}(h' \cdot h'_1) \partial_1''$  representa  $\alpha \cdot (\lambda \lambda_1)$ . Pero  $(h' \cdot h'_1) \partial_1'' = h'_1 \partial_1$ , por lo tanto  $(\alpha \cdot \lambda) \cdot \lambda_1 = \alpha \cdot (\lambda \lambda_1)$ . Así,  $m_*$  es una acción a derecha para todo objeto  $A$ .  $\square$

**Definición 3.3.5.** Una sucesión de la fibra en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  es un diagrama en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  de la forma

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \quad X \times \Omega Z \rightarrow X$$

que para alguna fibración  $p : E \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}_f$  es isomorfo al diagrama

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \quad F \times \Omega B \xrightarrow{m} F$$

construido antes.

Nota 3.3.6. Dualizando la construcción anterior, puede construirse un diagrama

$$A \rightarrow X \rightarrow C \quad C \rightarrow C \vee \Sigma A$$

empezando con una cofibración  $u$  en  $\mathcal{C}_c$ , donde  $v : X \rightarrow C$  es la cofibra de  $u$  y  $n : C \rightarrow C \vee \Sigma A$  es una coacción a derecha del cogrupo  $\Sigma A$  en  $C$  y definir sucesión de la cofibra en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ .

**Proposición 3.3.7.** *Si*

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \quad F \times \Omega B \xrightarrow{m} F$$

es una sucesión de la fibra, entonces

$$\Omega B \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} E \quad \Omega B \times \Omega E \xrightarrow{n} \Omega B$$

también lo es, donde  $\partial$  es la composición

$$\Omega B \xrightarrow{(0, \text{Id})} F \times \Omega B \xrightarrow{m} F$$

y  $n_* : [A, \Omega B] \times [A, \Omega E] \rightarrow [A, \Omega B]$  está dada por  $(\lambda, \mu) \mapsto ((\Omega p)_* \mu)^{-1} \lambda$ .

*Demostración.* Podemos suponer que tenemos la sucesión de la fibra construida arriba a partir de una fibración  $p$ . Sea  $p^I : E^I \rightarrow B^I$  como en la definición de  $m$ . Sea  $E \times_B B^I \times_B^*$  el límite del diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ & \searrow^{d_0^B} & \nearrow \\ B^I & \xrightarrow{p^I} & B \\ & \nearrow & \\ * & & \end{array}$$

(cf proposición 1.1.2) y sean  $\text{pr}'_1 : E \times_B B^I \times_B^* \rightarrow E$  y  $\text{pr}'_2 : E \times_B B^I \times_B^* \rightarrow B^I$  las proyecciones.

Luego  $d_0^B \text{pr}'_2 = p \text{pr}'_1$  y  $d_1^B \text{pr}'_2 = 0$ . Se tiene entonces un pullback:

$$\begin{array}{ccc} E \times_B B^I \times_B^* & \xrightarrow{\text{pr}'_2} & B^I \\ \text{pr}'_1 \downarrow & \text{pull} & \downarrow (d_0^B, d_1^B) \\ E & \xrightarrow{(p, 0)} & B \times B \end{array}$$

Luego  $\text{pr}'_1$  es la extensión de base de  $(d_0^B, d_1^B)$  por  $(p, 0)$  y luego es una fibración. Obtenemos entonces una sucesión de la fibra:

$$\Omega B \xrightarrow{(0, j, 0)} E \times_B B^I \times_B^* \xrightarrow{\text{pr}_1} E \quad \Omega B \times \Omega E \xrightarrow{n} \Omega B$$

ya que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega B & \xrightarrow{(0,j,0)} & E \times_B B^I \times_B * & \xrightarrow{\text{pr}'_2} & B^I \\
\downarrow & & \text{pr}'_1 \downarrow & \text{pull} & \downarrow (d_0^B, d_1^B) \\
* & \longrightarrow & E & \xrightarrow{(p,0)} & B \times B
\end{array}$$

y como la parte de la derecha es pullback y el diagrama entero es un pullback se tiene que la parte de la izquierda también es un pullback, de donde  $\Omega B$  es la fibra de  $\text{pr}'_1$  y  $(0, j, 0) : \Omega B \rightarrow E \times_B B^I \times_B *$  es la inclusión de la fibra. Notar que  $n$  es la acción, construida como  $m$  antes.

Calculemos  $n$  usando la proposición 3.3.2. Sea  $\lambda \in [A, \Omega B]$  y sea  $u : A \rightarrow \Omega B$  un representante. Sea  $\mu \in [A, \Omega E]$  y sea  $h : IA \rightarrow E$  un representante. Notemos que  $h$  es una homotopía a izquierda entre 0 y 0.

Tenemos que  $(d_0^B, d_1^B)ju = 0$  y  $(ph, 0\sigma)\partial_0 = (ph\partial_0, 0\text{Id}) = (0, 0) = 0$ , y como  $(d_0^B, d_1^B)$  es fibración y  $\partial_0$  es cofibración trivial (por lema 3.1.16 ya que  $A$  es cofibrante) por M1 existe  $H : IA \rightarrow B^I$  en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{ju} & B^I \\
\partial_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow (d_0^B, d_1^B) \\
IA & \xrightarrow{(ph, 0\sigma)} & B \times B
\end{array}$$

Es claro que  $(h, H, 0)$  es un levantado en

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{(0,j,u,0)} & E \times_B B^I \times_B * \\
\partial_0 \downarrow & \nearrow (h, H, 0) & \downarrow \text{pr}'_1 \\
IA & \xrightarrow{h} & E
\end{array}$$

por lo tanto, por 3.3.2,  $(0, j, 0)^{-1}(h, H, 0)\partial_1$  representa  $n_*(\lambda, \mu)$ . Pero,

$$(0, j, 0)j^{-1}H\partial_1 = (0, H\partial_1, 0) = (h, H, 0)\partial_1$$

luego  $(0, j, 0)^{-1}(h, H, 0)\partial_1 = j^{-1}H\partial_1$ , de donde,  $j^{-1}H\partial_1$  representa  $n_*(\lambda, \mu)$  en  $[A, \Omega B]$ .

Sea  $H' : IA \rightarrow B^I$  una correspondencia entre  $H\partial_1$  y  $h' : IA \rightarrow B$ . Obtenemos entonces la correspondencia

$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & \xrightarrow{0\sigma} & \bullet & \xrightarrow{0\sigma} & \bullet \\
ju \downarrow & H & \downarrow & H' & \downarrow s^B 0 \\
\bullet & \xrightarrow{ph} & \bullet & \xrightarrow{h'} & \bullet
\end{array}$$

entre  $ju$  y  $ph \cdot h'$ . Luego, como  $\lambda$  está representada por  $u : A \rightarrow \Omega B$ , también está representada por  $ju : A \rightarrow B^I$  y por la correspondencia anterior, se tiene que  $\lambda$  también

está representada por  $ph \cdot h'$ , pero como  $\mu$  está representada por  $h$ ,  $(\Omega p)_* \mu$  está representada por  $ph$  y como  $n_*(\lambda, \mu)$  está representada por  $h'$  se obtiene que  $\lambda = (\Omega p)_* \mu \cdot n_*(\lambda, \mu)$ , donde el símbolo  $\cdot$  denota producto en el grupo  $[A, \Omega B]$ . Entonces  $n_*(\lambda, \mu) = [(\Omega p)_* \mu]^{-1} \cdot \lambda$ . Luego el  $n$  de la sucesión de la fibra dada por la fibración  $\text{pr}'_1$  coincide con el del enunciado de la proposición.

Veamos que  $(i, 0, 0) : F \rightarrow E \times_B B^I \times_B *$  es una equivalencia débil. Para eso probaremos que se tiene una factorización de  $(i, 0, 0)$  como:

$$F \xrightarrow{(s^E i, \text{Id})} E^I \times_E F \simeq E^I \times_B * \xrightarrow{(d_0^E p_1, p^I p_1, 0)} E \times_B B^I \times_B *$$

donde consideramos los pullbacks:

$$\begin{array}{ccc} E^I \times_B * & \xrightarrow{p_1} & E^I \\ \downarrow & \text{pull} & \downarrow pd_1^E \\ * & \longrightarrow & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E^I \times_E F & \xrightarrow{p_2} & E^I \\ p_3 \downarrow & \text{pull} & \downarrow d_1^E \\ F & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

Notemos primero que  $(s^E i, \text{Id}_F)$  está bien definida pues  $d_1^E s^E i = i = i \text{Id}_F$ . Se tiene que  $p_3$  es fibración trivial pues  $d_1^E$  lo es ya que  $E$  es fibrante. Luego, como  $p_3(s^E i, \text{Id}_F) = \text{Id}_F$  se tiene que  $(s^E i, \text{Id}_F)$  es una equivalencia débil.

Por otra parte, es fácil ver que se tiene un isomorfismo  $E^I \times_E F \simeq E^I \times_B *$ . Más precisamente,  $\psi : E^I \times_E F \rightarrow E^I \times_B *$ , definida por  $\psi = (p_2, 0)$  y  $\varphi : E^I \times_B * \rightarrow E^I \times_E F$  definida por  $\varphi : (p_1, (d_0^E p_1, 0))$  son isomorfismos mutuamente inversos.

Notemos que  $(d_0^E p_1, p^I p_1, 0)$  existe pues  $pd_0^E p_1 = d_0^B p^I p_1$  y  $d_1^B p^I p_1 = pd_1^E p_1 = 0$ . Se tiene un pullback:

$$\begin{array}{ccc} E^I \times_B * & \xrightarrow{p_1} & E^I \\ (d_0^E p_1, p^I p_1, 0) \downarrow & \text{pull} & \downarrow (d_0^E, p^I) \\ E^I \times_E F \simeq E^I \times_B * & \xrightarrow{(pr'_1, pr'_2)} & E \times_B B^I \end{array}$$

Por lo tanto, como  $(d_0^E, p^I)$  es una fibración trivial, se tiene que  $(d_0^E p_1, p^I p_1, 0)$  también lo es.

Finalmente,

$$(d_0^E p_1, p^I p_1, 0) \psi (s^E i, \text{Id}) = (d_0^E p_2, p^I p_2, 0) (s^E i, \text{Id}) = (d_0^E s^E i, p^I s^E i, 0) = (i, s^B pi, 0) = (i, 0, 0)$$

Por lo tanto,  $(i, 0, 0)$  es una equivalencia débil.

Veremos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \Omega B & \\ \partial \swarrow & & \searrow (0, j, 0) \\ F & \xrightarrow{(i, 0, 0)} & E \times_B B^I \times_B * \end{array}$$

de  $\text{Ho}\mathcal{C}$  conmuta. Sea  $\alpha \in [A, \Omega B]$  y sea  $k : A \rightarrow B^I$  un representante. Sea  $H$  una correspondencia de  $k$  con  $h$ . Tenemos que existe  $h'$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{0} & E \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow h' & \downarrow p \\ IA & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Entonces,  $\partial_*\alpha = 0 \cdot \alpha$  está representado por  $i^{-1}h'\partial_1 : A \rightarrow F$ . Luego,  $(i, 0, 0)_*\partial_*\alpha$  está representado por  $(h'\partial_1, 0, 0) : A \rightarrow E \times_B B^I \times_B *$  y  $(0, j, 0)_\alpha$  está representado por  $(0, k, 0) : A \rightarrow E \times_B B^I \times_B *$  y  $(h', H, 0) : A \times I \rightarrow E \times_B B^I \times_B *$  es una homotopía a izquierda entre estos morfismos, de donde, el diagrama anterior conmuta en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ . Se tiene entonces un isomorfismo entre sucesiones de fibra:

$$\begin{array}{ccc} \Omega B & \xrightarrow{\partial} & F & \xrightarrow{i} & E \\ \text{Id}_{\Omega B} \downarrow & & (i, 0, 0) \downarrow & & \downarrow \text{Id}_E \\ \Omega B & \xrightarrow{(0, j, 0)} & E \times_B B^I \times_B * & \xrightarrow{\text{pr}_1} & E \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega B \times \Omega E & \xrightarrow{n} & \Omega B \\ \text{Id}_{\Omega B \times \Omega E} \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{\Omega B} \\ \Omega B \times \Omega E & \xrightarrow{n} & \Omega B \end{array}$$

Por lo tanto, por definición,

$$\Omega B \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} E \quad \Omega B \times \Omega E \xrightarrow{n} \Omega B$$

es una sucesión de fibra. □

**Teorema 3.3.8.** *Sea*

$$\Omega B \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} E \quad \Omega B \times \Omega E \xrightarrow{n} \Omega B$$

*una sucesión de la fibra en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ , sea  $\partial : \Omega B \rightarrow F$  definido como en la proposición anterior y sea  $A$  un objeto de  $\text{Ho}\mathcal{C}$ . Entonces la sucesión:*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & [A, \Omega^{q+1}B] & \xrightarrow{(\Omega^q \partial)_*} & [A, \Omega^q F] & \xrightarrow{(\Omega^q i)_*} & [A, \Omega^q E] & \xrightarrow{(\Omega^q p)_*} & [A, \Omega^q B] & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & [A, \Omega E] & \xrightarrow{(\Omega p)_*} & [A, \Omega B] & \xrightarrow{\partial_*} & [A, F] & \xrightarrow{i_*} & [A, E] & \xrightarrow{p_*} & [A, B] \end{array}$$

*es exacta en el siguiente sentido:*

- i.  $(p_*)^{-1}\{0\} = \text{Im}i_*$ .
- ii.  $i_*\partial_* = 0$  e  $i_*\alpha_1 = i_*\alpha_2$  si y sólo si  $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda$ , para algún  $\lambda \in [A, \Omega B]$ .
- iii.  $\partial_*(\Omega p)_* = 0$  y  $\partial_*\lambda_1 = \partial_*\lambda_2$  si y sólo si  $\lambda_2 = (\Omega p)_*\mu \cdot \lambda_1$ , para algún  $\mu \in [A, \Omega E]$ .
- iv. La sucesión de grupos y morfismos desde  $[A, \Omega E]$  hacia la izquierda es exacta en el sentido usual.

*Demostración.* Podemos suponer que la sucesión de la fibra de la proposición es la construida con la fibración  $p$ .

i. Claramente  $pi = 0$ . Si  $p_*\alpha = 0$  y sea  $u : A \rightarrow E$  que represente a  $\alpha$  y sea  $h : IA \rightarrow B$  una homotopía a izquierda entre  $pu$  y  $0$  (existe pues  $p_*\alpha = 0$ ). Tenemos que existe

$k : IA \rightarrow E$  en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & E \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow k & \downarrow p \\ IA & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Como  $k\partial_1 = 0$ , entonces  $pk\partial_1 = 0$  y por lo tanto, del pullback de la definición de la fibra  $F$  se tiene que existe  $\varphi : IA \rightarrow E$  tal que  $i\varphi = k\partial_1$ . Sea  $\beta$  la clase de  $\varphi$ . Luego  $i_*(\beta) = \alpha$  pues  $i\varphi = k\partial_0$  que es homotópica a  $k\partial_1 = u$ .

ii. Con las notaciones de 3.3.2, tenemos que  $h'$  es una homotopía a izquierda entre  $iu$ , que representa  $i_*\alpha$ , a  $h'\partial_1$ , que representa  $i_*(\alpha \cdot \lambda)$ . Luego,  $i_*(\alpha \cdot \lambda) = i_*\alpha$  (esto prueba  $\Leftarrow$ ) y, en particular,  $i_*\partial_*\lambda = i_*(0 \cdot \lambda) = i_*0 = 0$ , entonces  $i_*\partial_* = 0$ . Recíprocamente, dados  $\alpha_1, \alpha_2$  con  $i_*\alpha_1 = i_*\alpha_2$ , sean  $u_1$  y  $u_2$  representantes de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  respectivamente. Por lo tanto, existe una homotopía a izquierda  $h : IA \rightarrow E$  entre  $iu_1$  y  $iu_2$ . Luego, si  $\lambda$  es la clase de  $ph$ , se tiene que  $\alpha_1 \cdot \lambda = \alpha_2$  por 3.3.2.

iii. Por la proposición anterior, tenemos una sucesión de la fibra:

$$\Omega B \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} E \quad \Omega B \times \Omega E \xrightarrow{n} \Omega B$$

llamemos  $\partial' = n \circ (0, \text{Id})$  (construido como  $\partial$  en la proposición anterior). Entonces  $\partial'_* : [A, \Omega E] \rightarrow [A, \Omega B]$  y  $\partial'_*(a) = n_*(0, a) = ((\Omega p)_*a)^{-1} \cdot 0 = ((\Omega p)_*a)^{-1}$ . Por lo tanto, por ii. se tiene que  $i_*\partial'_* = 0$  y  $i_*\lambda_1 = i_*\lambda_2$  si y sólo si  $\lambda_2 = \lambda_1 \cdot_n \mu = ((\Omega p)_*\mu)^{-1}\lambda_1$  para algún  $\mu \in [A, \Omega E]$ . Para terminar, basta notar que  $\partial_*\partial'_* = 0$  implica  $\partial_*(\Omega p)_* = 0$ .

iv. Se deduce de iii. por inducción aplicando la proposición anterior repetidamente.  $\square$

El resultado dual para sucesiones de la cofibra es el siguiente.

**Teorema 3.3.9.** *Sea*

$$A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} C \quad C \xrightarrow{n} C \vee \Sigma A$$

una sucesión de cofibra en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y sea  $\partial : C \rightarrow \Sigma A$  definida por  $\partial : (\text{Id}_C + 0) \circ n$ . Si  $B$  es un objeto de  $\text{Ho}\mathcal{C}$ , entonces la sucesión

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow [\Sigma^{q+1}A, B] \xrightarrow{(\Sigma^q \partial)^*} [\Sigma^q C, B] \xrightarrow{(\Omega^q v)^*} [\Sigma^q X, B] \xrightarrow{(\Sigma^q u)^*} [\Sigma^q A, A] \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow [\Sigma X, A] \xrightarrow{(\Sigma u)^*} [\Sigma A, B] \xrightarrow{\partial^*} [C, B] \xrightarrow{v^*} [X, B] \xrightarrow{u^*} [A, B] \end{aligned}$$

es exacta en el siguiente sentido:

i.  $(u^*)^{-1}\{0\} = \text{Im}v^*$ .

- ii.  $v^*\partial^* = 0$  y  $v^*\alpha_1 = v^*\alpha_2$  si y sólo si  $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda$ , para algún  $\lambda \in [A, \Sigma B]$  (aquí  $\cdot$  es la acción a derecha  $n^* : [C, B] \times [\Sigma A, B] \rightarrow [C, B]$ ).
- iii.  $\partial^*(\Sigma u)^* = 0$  y  $\partial^*\lambda_1 = \partial^*\lambda_2$  si y sólo si  $\lambda_2 = (\Sigma u)^*\mu \cdot \lambda_1$ , para algún  $\mu \in [\Sigma E, B]$ .
- iv. La sucesión de grupos y morfismos desde  $[\Sigma E, B]$  hacia la izquierda es exacta en sentido usual.

**Lema 3.3.10.** *Dados los diagramas*

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \\
 \varepsilon \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 F' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & B'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F \times \Omega B & \xrightarrow{m} & F \\
 \varepsilon \times \Omega \alpha \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\
 F' \times \Omega B' & \xrightarrow{m'} & F'
 \end{array}$$

donde las filas son sucesiones de fibra, si el diagrama de la izquierda conmuta, entonces el de la derecha también conmuta.

*Demostración.* Podemos suponer que  $p$  y  $p'$  son fibraciones en  $\mathcal{C}_f$  y que ambas sucesiones de la fibra se construyen en la forma usual a partir de  $p$  y  $p'$ . Sea  $A$  un objeto de  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y sean  $a \in [A, F]$  y  $b \in [A, \Omega B]$ . Elijamos representantes  $t : A \rightarrow F$  de  $a$  y  $h : IA \rightarrow B$  de  $b$ . Entonces, por 3.3.2  $a \cdot b$  se representa por  $i^{-1}h'\partial_1$ , donde  $h'$  es un levantado en:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{it} & E & \xrightarrow{\beta} & E' \\
 \partial_0 \downarrow & \nearrow h' & \downarrow p & & \downarrow p' \\
 IA & \xrightarrow{h} & B & \xrightarrow{\alpha} & B'
 \end{array}$$

Ahora bien,  $\varepsilon_*(a)$  se representa por  $\varepsilon t$  y  $(\Omega\alpha)_*(b)$  se representa por  $\alpha h$  y como  $i'\varepsilon t = \beta it$ , reescribiendo el diagrama anterior como

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\beta it = i'\varepsilon t} & E' \\
 \partial_0 \downarrow & \nearrow \beta h' & \downarrow p' \\
 IA & \xrightarrow{\alpha h} & B'
 \end{array}$$

obtenemos que  $m'(\varepsilon_*(a), (\Omega\alpha)_*(b)) = \varepsilon_*(a) \cdot (\Omega\alpha)_*(b)$  se representa por  $i'^{-1}\beta h'\partial_1$ , y como  $i'^{-1}\beta = \varepsilon i^{-1}\text{Id}$  (pues  $i'\varepsilon i^{-1}\text{Id} = \beta i i^{-1}\text{Id} = \beta \text{Id} = \beta$ ), se tiene que  $i'^{-1}\beta h'\partial_1 = \varepsilon i^{-1}h'\partial_1$  que es un representante de  $\varepsilon_*(a \cdot b)$ . Por lo tanto  $\varepsilon_*(a \cdot_m b) = \varepsilon_*(a) \cdot_{m'} (\Omega\alpha)_*(b)$ , es decir,  $\varepsilon_* m_* = m'_*(\varepsilon \times \Omega\alpha)_* : [A, F \times \Omega B] \rightarrow [A, F']$  para todo objeto  $A$  de  $\text{Ho}\mathcal{C}$ . Por lo tanto,  $\varepsilon m = m'(\varepsilon \times \Omega\alpha)$ .  $\square$

**Proposición 3.3.11.** *La clase de sucesiones de fibra en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  tiene las siguientes propiedades:*

- i. *Cualquier morfismo  $f : X \rightarrow Y$  puede ser incluido en una sucesión de fibra*

$$F \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \qquad F \times \Omega Y \longrightarrow F$$



ii. Dado un diagrama de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \\
 \gamma \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 F' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & B'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F \times \Omega B & \xrightarrow{m} & F \\
 \gamma \times \Omega \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 F' \times \Omega B' & \xrightarrow{m'} & F'
 \end{array}$$

donde las filas son sucesiones de fibra, las flechas punteadas existen.

iii. En cualquier diagrama como el del item anterior, donde las filas son sucesiones de fibra, si  $\alpha$  y  $\beta$  son isomorfismos, entonces  $\gamma$  también lo es.

*Demostración.* i. Efectuamos el reemplazo fibrante y conseguimos  $R(Y)$  objeto fibrante junto con una cofibración trivial  $i_Y : Y \rightarrow R(Y)$ . Factoricemos  $i_Y f = pi'$ , donde  $p : E \rightarrow R(Y)$  es una fibración e  $i' : X \rightarrow E$  es una cofibración trivial. Notemos que  $E$  es fibrante pues  $R(Y)$  lo es y  $p : E \rightarrow R(Y)$  es fibración. Sea  $F$  la fibra de  $p$  y sea  $i : F \rightarrow E$  la inclusión. Consideremos la sucesión de la fibra construida a partir de  $p$ :

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} R(Y) \qquad F \times \Omega(R(Y)) \xrightarrow{m} F$$

Tenemos el siguiente diagrama en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  (notar que  $i'$  e  $i_Y$  son isomorfismos en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ )

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{i'^{-1}i} & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \text{Id}_F \downarrow & & i' \downarrow & & \downarrow i_Y \\
 F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & R(Y)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F \times \Omega Y & \xrightarrow{m} & F \\
 \text{Id}_F \times \Omega i_Y \downarrow & & \downarrow \text{Id}_F \\
 F \times \Omega(R(Y)) & \xrightarrow{m} & F
 \end{array}$$

Por lo tanto

$$F \xrightarrow{i'^{-1}i} X \xrightarrow{f} Y \qquad F \times \Omega Y \xrightarrow{m} F$$

es una sucesión de fibra en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ .

iii. Si  $A$  es un objeto de  $\text{Ho}\mathcal{C}$ , por la proposición 3.3.8 se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 [A, \Omega E] & \xrightarrow{(\Omega p)_*} & [A, \Omega B] & \xrightarrow{\partial_*} & [A, F] & \xrightarrow{i_*} & [A, E] & \xrightarrow{p_*} & [A, B] \\
 \downarrow (\Omega \beta)_* & & \downarrow (\Omega \alpha)_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \alpha_* \\
 [A, \Omega E'] & \xrightarrow{(\Omega p')_*} & [A, \Omega B'] & \xrightarrow{\partial'_*} & [A, F'] & \xrightarrow{i'_*} & [A, E'] & \xrightarrow{p'_*} & [A, B']
 \end{array}$$

cuyas filas son exactas en el sentido de 3.3.8. Ahora bien, como  $\alpha$  y  $\beta$  son isomorfismos, entonces  $\Omega\alpha$ ,  $\Omega\beta$ ,  $\alpha_*$ ,  $\beta_*$ ,  $(\Omega\alpha)_*$  y  $(\Omega\beta)_*$  también lo son, luego, por el lema de los 5,  $\gamma_* : [A, F] \rightarrow [A, F']$  es un isomorfismo para todo objeto  $A$ . Por lo tanto,  $\gamma$  es un isomorfismo en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ .

ii. Reemplazando el diagrama de la proposición por uno isomorfo, podemos suponer que las filas se construyen en la forma usual a partir de fibraciones  $p$  y  $p'$  en  $\mathcal{C}_f$ . Hacemos

un reemplazo cofibrante  $\tilde{B}$  de  $B$  y obtenemos  $u : \tilde{B} \rightarrow B$  fibración trivial con  $\tilde{B}$  cofibrante. Consideremos el pullback:

$$\begin{array}{ccc} E \times_B \tilde{B} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & E \\ \text{pr}_2 \downarrow & \text{pull} & \downarrow p \\ \tilde{B} & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

Hacemos un reemplazo cofibrante  $\tilde{E}$  de  $E \times_B \tilde{B}$  y obtenemos una fibración trivial  $v : \tilde{E} \rightarrow E \times_B \tilde{B}$  con  $\tilde{E}$  cofibrante. Por M4,  $\text{pr}_1$  es una fibración trivial y  $\text{pr}_2$  es una fibración. Obtenemos:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{F} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{E} & \xrightarrow{\text{pr}_2 v} & \tilde{B} \\ \varepsilon \downarrow & & \text{pr}_1 v \downarrow & & \downarrow u \\ F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Veamos que, en efecto, existe  $\varepsilon$  tal que el diagrama conmuta. Como  $p\text{pr}_1 = u\text{pr}_2$ , entonces  $p\text{pr}_1 v \tilde{i} = u\text{pr}_2 v \tilde{i} = u0 = 0$ . Luego, mirando el pullback de la definición de la fibra  $F$  se tiene que  $\exists! \varepsilon$  tal que  $i\varepsilon = \text{pr}_1 v \tilde{i}$ , como queremos.

Ahora bien, en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ ,  $u$  y  $\text{pr}_1 v$  son isomorfismos (ya que son equivalencias débiles en  $\mathcal{C}$ ), luego, por el item (iii),  $\varepsilon$  es un isomorfismo. Por el lema anterior, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F} \times \Omega \tilde{B} & \xrightarrow{\tilde{m}} & \tilde{F} \\ \downarrow \varepsilon \times \Omega u & & \downarrow \varepsilon \\ F \times \Omega B & \xrightarrow{m} & F \end{array}$$

conmuta. Por lo tanto, la sucesión de la fibra de  $p : E \rightarrow B$  es isomorfa a la de  $\text{pr}_2 v : \tilde{E} \rightarrow \tilde{B}$ , y luego, podemos suponer que  $E$  y  $B$  son objetos de  $\mathcal{C}_f$ . Como  $p'\beta = \alpha p$ , identificando por el teorema 3.1.32 a  $[A, B]$  con  $\pi(A, B)$ , se tiene que si  $u$  representa a  $\alpha$  y  $v$  representa a  $\beta$ , entonces  $p'v \sim up$ . Sea  $h : E \times I \rightarrow B'$  una homotopía a izquierda entre  $p'v$  y  $up$ . Como  $E$  es cofibrante, por 3.1.18, existe  $H$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & E' \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p' \\ E \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Sea  $v' = H\partial_1$ , entonces  $p'v = p'H\partial_1 = h\partial_1 = up$  y  $v \sim v'$ . Como  $p'vi = upi = 0$ , existe

$\gamma : F \rightarrow F'$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{vi} & E' \\
 \searrow \gamma & & \downarrow i' \\
 F' = E' \times_{B'} * & \xrightarrow{i'} & E' \\
 \downarrow & \text{pull} & \downarrow p' \\
 * & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Luego,  $i\gamma = vi$ . Así, el primer diagrama de la proposición es conmutativo y entonces, por el lema anterior, el segundo también lo es.  $\square$

La proposición siguiente utiliza coclases dobles. Recordemos que si  $G$  es un grupo,  $S$  y  $T$  son subgrupos de  $G$  y  $g \in G$ , la coclase doble  $SgT$  se define como

$$SgT = \{sgt / s \in S, t \in T\}$$

**Proposición 3.3.12.** *Sea*

$$\begin{array}{ccc}
 A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} C \xrightarrow{\partial'} \Sigma A & & C \xrightarrow{n} C \vee \Sigma A \\
 \alpha \downarrow & \searrow f & \downarrow \delta \\
 \Omega B \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B & & F \times \Omega B \xrightarrow{m} F
 \end{array}$$

un diagrama en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  donde la primera fila, salvo  $\partial'$ , es una sucesión de cofibra y la segunda fila, salvo  $\partial$  es una sucesión de fibra y donde  $\partial' = (\text{Id}_C + 0) \circ n$  y  $\partial = m \circ (0, \text{Id}_{\Omega B})$ . Si  $fu = 0$  y  $pf = 0$ , entonces las flechas punteadas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  existen y el conjunto de posibilidades para  $\alpha$  forma una coclase doble  $(\Omega p)_*[A, \Omega E]_{\alpha_0} u^*[X, \Omega B]$  en  $[A, \Omega B]$  y el conjunto de posibilidades para  $\delta$  forma una coclase doble  $(\Sigma u)^*[\Sigma X, B]_{\delta_0} p_*[\Sigma A, E]$  en  $[\Sigma A, B]$ . Además, con la identificación  $[A, \Omega B] = [\Sigma A, E]$ , la primera coclase doble es la inversa de la segunda.

*Demostración.* Por 3.3.8, como  $pf = 0$ , existe  $\beta : X \rightarrow F$  con  $f = i\beta$ . Similarmente,  $i\beta u = fu = 0$ , entonces existe  $\alpha : A \rightarrow \Omega B$  con  $\partial\alpha = \beta u$  (pues si  $i_*\alpha_2 = 0 = i_*0$  entonces existe  $\lambda \in [A, \Omega B]$  tal que  $\alpha_2 = 0 \cdot \lambda = m \circ (0, \text{Id}) \circ \lambda = \partial_*(\lambda)$ ). Así,  $\alpha$ ,  $\beta$  existen. Supongamos que  $\alpha'$ ,  $\beta'$  son otros morfismos. Por la sucesión exacta de 3.3.8 se tiene  $\beta' = \beta \cdot \lambda = m \circ (\beta, \lambda)$  y entonces

$$\begin{aligned}
 \partial\alpha' &= \beta' u = m \circ (\beta, \lambda) u = m(\beta u, \lambda u) = m(\partial\alpha, \lambda u) = \partial\alpha \cdot (\lambda u) = (0 \cdot \alpha) \cdot \lambda u = \\
 &= 0 \cdot (\alpha \cdot \lambda u) = \partial(\alpha \cdot \lambda u)
 \end{aligned}$$

Por la exactitud,  $\alpha' = (\Omega p)_* \mu \cdot \alpha \cdot \lambda u = (\Omega p)_* \mu \cdot \alpha \cdot u^*(\lambda)$  para algún  $\mu \in [A, \Omega E]$ , y entonces  $\alpha'$  pertenece a la coclase doble  $(\Omega p)_*[A, \Omega E]_{\alpha_0} u^*[X, \Omega B]$ .

Recíprocamente, si  $\lambda \in [X, \Omega B]$  y  $\mu \in [A, \Omega E]$  y llamamos  $\alpha' = (\Omega p)_* \mu \cdot \alpha \cdot u^*(\lambda)$  y  $\beta' = \beta \cdot \lambda$  con una cuenta similar a la anterior y usando 3.3.8 se obtiene que  $\beta' u = \partial\alpha'$ .

Dualmente, se tiene para  $\gamma$ ,  $\delta$ , y entonces tenemos probada la primera afirmación de la proposición.

Para probar la segunda parte, construiremos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  tal que  $\alpha$  se corresponda con  $\delta^{-1}$ . Podemos asumir que  $u$  es una cofibración de objetos cofibrantes, que  $p$  es una fibriación de objetos fibrantes y que ambas filas del diagrama se construyen en la forma usual. En este caso, por el teorema 3.1.32 se tiene que el morfismo  $f$  de  $\text{Ho}\mathcal{C}$  se puede representar por la clase en  $\pi(X, E)$  de un morfismo de  $\mathcal{C}$ , que seguiremos llamando  $f$ . Como  $pf \sim 0$  y  $X$  es cofibrante, si  $H : X \times I \rightarrow B$  es una homotopía a izquierda entre  $pf$  y  $0$ , podemos, por 3.1.18, hallar  $H' : IA \rightarrow E$  y análogamente a lo hecho en la demostración de la proposición anterior, podemos suponer que  $pf = 0$ . (Notar que sin embargo, no podemos asumir simultáneamente que  $fu = 0$ ). Como  $fu \sim 0$ , sea  $h : A \times I \rightarrow E$  una homotopía a izquierda entre  $fu$  y  $0$ .

Sea  $q : IA \rightarrow \Sigma A$  la cofibra de  $\partial_0 + \partial_1 : A \vee A \rightarrow IA$ . Como

$$ph(\partial_0 + \partial_1) = (ph\partial_0 + ph\partial_1) = pfu + p0 = 0 + 0 = 0$$

mirando el pushout de la definición de  $\Sigma A$  se tiene que existe un único morfismo, que notaremos  $phq^{-1} : \Sigma A \rightarrow B$  tal que  $phq^{-1}q = ph$ . Dualizando la demostración de la proposición 3.3.7, del triángulo conmutativo se obtiene

$$\partial'(v + 0 + 0) = 0 + q + 0 : X \underset{A}{\vee} IA \underset{A}{\vee} * \rightarrow \Sigma A$$

donde  $v + 0 + 0$  es una equivalencia débil y  $X \underset{A}{\vee} IA \underset{A}{\vee} *$  es el colímite del diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ & \searrow \partial_0 & \\ A & \xrightarrow{\partial_1} & IA \\ & \searrow & \\ & & * \end{array}$$

(cf. 1.1.2 mirando el dual a dicha proposición)

Obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{\partial'} & \Sigma A \\ \text{Id}_A \downarrow & & \text{Id}_X \downarrow & & \uparrow (v+0+0) & & \downarrow \text{Id}_{\Sigma A} \\ A & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{\text{in}_1} & X \underset{A}{\vee} IA \underset{A}{\vee} * & \xrightarrow{(0+q+0)} & \Sigma A \\ & & \downarrow i^{-1}f & \searrow f & \downarrow f+h+0 & & \downarrow phq^{-1} \\ & & F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Por lo tanto, en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ , las primeras dos filas son isomorfas. Definimos  $\beta = i^{-1}f$ ,  $\gamma = (f + h + 0)(v + 0 + 0)^{-1}$  (notar que  $v + 0 + 0$  es una equivalencia débil, entonces

es inversible en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ ) y  $\delta = phq^{-1}$ . Pero como  $i^{-1}fu$  representa  $\beta u$ , y  $ph : IA \rightarrow B$  representa  $\delta$ , del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{fu=i(i^{-1}fu)} & E \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ IA & \xrightarrow{ph} & B \end{array}$$

y por 3.3.2 se tiene que  $\beta u \cdot \delta$  está representada por  $i^{-1}h\partial_1 = i^{-1}0 = 0$ , es decir,  $\beta u \cdot \delta = 0$ . Luego,  $\beta u = 0 \cdot \delta^{-1} = \partial(\delta^{-1})$  y podemos tomar  $\alpha = \delta^{-1}$ .  $\square$

**Definición 3.3.13.** Sean

$$A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{p} B$$

tres morfismos de  $\text{Ho}\mathcal{C}$  tales que  $fu = pf = 0$ . Construyamos un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{\partial'} & \Sigma A & & C & \xrightarrow{n} & C \vee \Sigma A \\ & & \searrow f & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & & & \\ & & & & E & \xrightarrow{p} & B & & & & \end{array}$$

eligiendo, por el dual al resultado 3.3.11 item (i), una sucesión de cofibra que contenga a  $u$  y completando luego las flechas punteadas como en la proposición anterior.

El conjunto de posibilidades para  $\delta$  forma una coclase doble  $(\Sigma u)^*[\Sigma X, B]\delta_0 p_*[\Sigma A, E]$  en  $[\Sigma A, B]$  que se llama corchete de Toda de  $u, f$  y  $p$ , y se nota  $\langle u, f, p \rangle$ .

*Nota 3.3.14.*

1. El corchete de Toda es independiente de la elección de la sucesión de cofibra, por 3.3.11 (ii) y (iii), ya que con la notación de dicha proposición, elegimos  $\alpha = \text{Id}$  y  $\beta = \text{Id}$  y por (ii) existe  $\gamma$  que, por (iii), resulta un isomorfismo.
2. El corchete de Toda  $\langle u, f, p \rangle$  puede definirse también eligiendo un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & X & & & & \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & \searrow f & & & \\ \Omega B & \xrightarrow{\partial} & F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \end{array} \quad F \times \Omega B \xrightarrow{m} F$$

donde la fila de abajo se obtiene de elegir una sucesión de fibra que contenga a  $p$  y completando luego con las flechas punteadas. Por la proposición anterior se tiene  $\langle u, f, p \rangle = (\Sigma u)^*[\Sigma X, B]\alpha^{-1}p_*[\Sigma A, E]$ ,  $\langle u, f, p \rangle \subseteq [\Sigma A, B]$ .

### 3.4. Equivalencia de teorías de homotopía

Comenzamos con algunas definiciones categóricas generales.

**Definición 3.4.1.** Sean  $\gamma : A \rightarrow A'$  y  $F : A \rightarrow B$  dos funtores. El funtor derivado a izquierda de  $F$  con respecto a  $\gamma$  es un funtor  $L^\gamma F : A' \rightarrow B$  junto con una transformación natural  $\epsilon : L^\gamma F \circ \gamma \Rightarrow F$  que cumpla la siguiente propiedad universal. Dado un funtor  $G : A' \rightarrow B$  y una transformación natural  $\delta : G \circ \gamma \rightarrow F$ , existe una única transformación natural  $\theta : G \Rightarrow L^\gamma F$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \circ \gamma & \xrightarrow{\delta} & F \\ \theta \circ \gamma \downarrow & \nearrow \epsilon & \\ L^\gamma F \circ \gamma & & \end{array}$$

conmuta.

*Nota 3.4.2.*

1.  $L^\gamma F$  es el funtor de  $A'$  en  $B$  que  $L^\gamma F$  ‘está lo más cerca posible a  $F$  desde la izquierda’. De forma parecida, podemos definir el funtor derivado a derecha de  $F$  con respecto a  $\gamma$  como un funtor  $R^\gamma F : A' \rightarrow B$  con una transformación natural  $\eta : F \rightarrow R^\gamma F \circ \gamma$  que ‘está lo más cerca posible a  $F$  desde la derecha’.
2. Estaremos interesados solamente por el caso en el que  $A$  es una categoría de modelos  $\mathcal{C}$  y  $\gamma$  es el funtor de localización  $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$ . En este caso escribiremos solamente  $LF$ .
3. Si  $\mathcal{C}$  es una categoría de modelos y  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  es un funtor, es claro que  $\epsilon : LF \circ \gamma \Rightarrow F$  es un isomorfismo si y sólo si  $F$  manda equivalencias débiles de  $\mathcal{C}$  a isomorfismos de  $\mathcal{B}$ . En este caso, podemos asumir que  $LF$  está inducido por  $F$  en el sentido que  $LF$  es el único funtor  $\text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  con  $LF \circ \gamma = F$ . Más aún,  $RF = LF$ .

**Proposición 3.4.3.** *Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor donde  $\mathcal{C}$  es una categoría de modelos. Supongamos que  $F$  manda equivalencias débiles de  $\mathcal{C}_c$  a isomorfismos de  $\mathcal{B}$ . Entonces  $LF : \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  existe. Además,  $\epsilon(X) : LF(X) \rightarrow F(X)$  es un isomorfismo si  $X$  es cofibrante.*

*Demostración.* Sean  $p_X : Q(X) \rightarrow X$ ,  $X \rightarrow Q(X)$ ,  $f \rightarrow Q(f)$  los reemplazos fibrante y cofibrante (cf. 3.1.31). Vimos que  $Q$  induce un funtor bien definido  $\bar{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_c$ . Por 3.1.29 item 2, tenemos un funtor  $FQ : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ , el cual induce un funtor  $LF : \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ya que  $Q(f)$  es una equivalencia débil si  $f$  lo es (esto se vio en la demostración del teorema 3.1.32). Sea  $\epsilon : LF \circ \gamma \rightarrow F$  la transformación natural dada por  $\epsilon(X) = F(p_X) : FQ(X) \rightarrow F(X)$ . Veamos que  $\epsilon$  tiene la propiedad universal de la definición anterior. Sea  $G : \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor y  $\delta : G \circ \gamma \rightarrow F$  una transformación natural. Definimos  $\theta(X) : G(X) \rightarrow LF(X)$  como  $\theta(X) = \delta(Q(X)) \circ G(\gamma(p_X)^{-1})$ . Es claro que  $\theta : G \circ \gamma \rightarrow LF \circ \gamma = FQ$  es una

transformación natural pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
GX & \xrightarrow{G \circ \gamma(f)} & GY \\
G(\gamma(p_X)^{-1}) \downarrow & & \downarrow G(\gamma(p_Y)^{-1}) \\
GQX & \xrightarrow{G \circ \gamma(Q(f))} & GQY \\
\delta(Q(X)) \downarrow & & \downarrow \delta(Q(Y)) \\
LF(X) = FQ(X) & \xrightarrow{LF \circ \gamma(f) = FQ(f)} & LF(Y) = FQ(Y)
\end{array}$$

y como todo morfismo en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  es una composición finita de morfismos  $\gamma(f)$  y  $\gamma(s)^{-1}$ , se tiene que  $\theta$  es una transformación natural  $\theta : G \rightarrow LF$ . Además,

$$\epsilon(\theta \circ \gamma) = F(p_X) \circ \delta(Q(X)) \circ G(\gamma(p_X)^{-1}) = \delta(X) \circ G(\gamma(p_X)) \circ G(\gamma(p_X)^{-1}) = \delta(X)$$

de donde  $\epsilon(\theta \circ \gamma) = \delta$ . La unicidad de  $\theta : G \rightarrow LF$  es clara pues  $\theta$  está determinada por  $\delta$  en  $\text{Ho}\mathcal{C}_c$  (ya que si  $X$  es cofibrante,  $LFX = FQX = FX$  y  $\epsilon(X) = id_{F(X)}$  lo que prueba la última afirmación del teorema) y hay equivalencia de categorías  $\text{Ho}\mathcal{C}_c \simeq \text{Ho}\mathcal{C}$ .  $\square$

**Definición 3.4.4.** Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un funtor donde  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  son categorías de modelos. El funtor derivado a izquierda total de  $F$  será el funtor  $\underline{L}F : \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}'$  dado por  $\underline{L}F = L^\gamma(\gamma' \circ F)$  donde  $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  y  $\gamma' : \mathcal{C}' \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}'$  son los funtores de localización.

*Observación 3.4.5.* Notar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\
\gamma \downarrow & & \downarrow \gamma' \\
\text{Ho}\mathcal{C} & \xrightarrow{\underline{L}F} & \text{Ho}\mathcal{C}'
\end{array}$$

no conmuta, pero hay una transformación natural  $\epsilon : \underline{L}F \circ \gamma \rightarrow \gamma' \circ F$  tal que el par  $(\underline{L}F, \epsilon)$  ‘está lo más cerca posible de hacerlo conmutativo’.

**Corolario 3.4.6.** Si  $F$  manda equivalencias débiles de  $\mathcal{C}_c$  a equivalencias débiles de  $\mathcal{C}'$ , entonces  $\underline{L}F : \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}'$  existe y  $\epsilon(X) : \underline{L}F(X) \rightarrow \gamma'(F(X))$  es un isomorfismo en  $\text{Ho}\mathcal{C}'$  para  $X$  cofibrante.

**Proposición 3.4.7.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  categorías de modelos punteadas con funtores suspensión  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y  $\text{Ho}\mathcal{C}'$  respectivamente. Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un funtor exacto a derecha (es decir, compatible con colímites finitos) que manda cofibraciones en  $\mathcal{C}$  a cofibraciones en  $\mathcal{C}'$  y equivalencias débiles en  $\mathcal{C}_c$  a equivalencias débiles en  $\mathcal{C}'$ . Entonces  $\underline{L}F : \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}'$  es compatible con coproductos finitos, hay un isomorfismo canónico de funtores

$\underline{L}F \circ \Sigma \simeq \Sigma' \underline{L}F$  y con respecto a este isomorfismo,  $\underline{L}(F)$  manda sucesiones de cofibra en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  a sucesiones de cofibra en  $\text{Ho}\mathcal{C}'$ .

*Demostración.*  $\underline{L}F$  existe por 3.4.3 ya que  $\gamma' \circ F$  manda equivalencias débiles de  $\mathcal{C}_c$  a isomorfismos en  $\text{Ho}\mathcal{C}'$  y podemos suponer que  $\underline{L}F(A) = F(A)$  si  $A$  es cofibrante. Si  $A_1$  y  $A_2$  son objetos de  $\mathcal{C}_c$ , entonces  $A_1 \vee A_2$ , el coproducto de  $A_1$  y  $A_2$  en  $\mathcal{C}$ , es también el coproducto de  $A_1$  y  $A_2$  en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  (pues el funtor  $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  conmuta con colímites finitos, por lo visto en el capítulo 2). Por hipótesis,  $F(\mathcal{C}_c) \subseteq \mathcal{C}'_c$  y entonces

$$\underline{L}F(A_1 \vee A_2) = F(A_1 \vee A_2) = F(A_1) \vee F(A_2) = \underline{L}F(A_1) \vee \underline{L}F(A_2)$$

donde el último coproducto es en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ . Esto prueba la primera afirmación sobre  $\underline{L}F$ .

Si  $A$  es cofibrante, dado un cilindro  $IA$  tenemos que

$$L(A) \vee L(A) = L(A \vee A) \xrightarrow{L(\partial_0)+L(\partial_1)} L(IA) \xrightarrow{L(\sigma)} L(A)$$

es una factorización de  $\nabla_{L(A)}$  en la cofibración  $L(\partial_0) + L(\partial_1) = L(\partial_0 + \partial_1)$  seguida de la equivalencia débil  $L(\sigma)$  (notar que si  $A$  es cofibrante, entonces  $IA$  es cofibrante). Luego,  $L(IA)$  es un cilindro de  $L(A)$ . Por lo tanto, como  $F$  es compatible con pushouts, se tiene  $F(\Sigma A) = \Sigma F(A)$ . Y como  $F(A)$  es cofibrante  $\Sigma F(A)$  representa  $\Sigma(F(A))$  en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y luego tenemos probada la segunda afirmación.

Finalmente, notemos que si  $i : A \rightarrow B$  es una cofibración en  $\mathcal{C}_c$  y  $i \times I : IA \rightarrow IB$  es una elección compatible en el sentido dual al de que  $p^I : E^I \rightarrow B^I$  era una elección compatible en la sección anterior (más precisamente,  $\sigma^B(i \times I) = i\sigma^A$ ,  $\partial_0^B(i \times I) = i\partial_0^A$  y  $\partial_1^B(i \times I) = i\partial_1^A$ ) entonces  $F(i \times I) : F(IA) \rightarrow F(B \times I)$  es también una elección compatible para  $I(FA) \rightarrow I(FB)$ . Se sigue que  $F$  manda el diagrama de  $\mathcal{C}_c$

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{q} C \quad C \xrightarrow{\text{in}_3} C \underset{B}{\vee} B \times I \underset{B}{\vee} C \xleftarrow{\varepsilon} C \vee \Sigma A$$

donde  $\varepsilon$  es una equivalencia débil (notar que  $\gamma(\varepsilon)^{-1}\gamma(\text{in}_3)$  representará la coacción del cogrupo  $\Sigma A$  en  $C$  en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ ) al diagrama

$$F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(q)} F(C)$$

$$F(C) \xrightarrow{\text{in}_3} F(C) \underset{F(B)}{\vee} F(B) \times I \underset{F(B)}{\vee} F(C) \xleftarrow{F(\varepsilon)} F(C) \vee \Sigma F(A)$$

lo que prueba la última parte de la proposición.  $\square$

**Teorema 3.4.8.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  categorías de modelos y sean  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  y  $R : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  un par de funtores adjuntos, con  $L$  adjunto a izquierda de  $R$ . Supongamos que  $L$  preserva cofibraciones y que manda equivalencias débiles de  $\mathcal{C}_c$  a equivalencias débiles de  $\mathcal{C}'$ . Supongamos también que  $R$  preserva fibraciones y que  $R$  manda equivalencias débiles de  $\mathcal{C}'_f$  a equivalencias débiles de  $\mathcal{C}$ . Entonces los funtores:

$$\underline{L}L : \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}' \quad \text{y} \quad \underline{R}R : \text{Ho}\mathcal{C}' \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$$

son canónicamente adjuntos. Supongamos además que para  $X$  en  $\mathcal{C}_c$  y  $Y$  en  $\mathcal{C}'_f$  un morfismo  $LX \rightarrow Y$  es una equivalencia débil si y sólo si el morfismo asociado  $X \rightarrow RY$  es una equivalencia débil. Entonces los morfismos de adjunción

$$\underline{L}(L) \circ \underline{R}(R) \rightarrow id \quad \text{y} \quad id \rightarrow \underline{R}(R) \circ \underline{L}(L)$$



son isomorfismos, y entonces las categorías  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y  $\text{Ho}\mathcal{C}'$  son equivalentes. Más aún, si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  son punteadas, entonces las equivalencias  $\underline{L}(L)$  y  $\underline{R}(R)$  son compatibles con los funtores loop y suspensión y con las sucesiones de la fibra y la cofibra en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  y  $\text{Ho}\mathcal{C}'$ .

*Demostración.* Por simplicidad escribiremos  $\underline{L}$  por  $\underline{L}L$  y notaremos  $u^\flat : X \rightarrow RY$  (resp.  $v^\sharp : LX \rightarrow Y$ ) a los morfismos que corresponden a  $u : LX \rightarrow Y$  (resp.  $v : X \rightarrow RY$ ). Si  $X$  es cofibrante, dado un cilindro  $X \times I$  tenemos que

$$L(X) \vee L(X) = L(X \vee X) \xrightarrow{L(\partial_0) + L(\partial_1)} L(X \times I) \xrightarrow{L(\sigma)} L(X)$$

es una factorización de  $\nabla_{L(X)}$  en la cofibración  $L(\partial_0) + L(\partial_1) = L(\partial_0 + \partial_1)$  seguida de la equivalencia débil  $L(\sigma)$  (notar que si  $X$  es cofibrante, entonces  $X \times I$  es cofibrante). Luego,  $L(X \times I)$  es un cilindro de  $L(X)$ . Entonces, a cada homotopía a izquierda  $h : X \times I \rightarrow RY$  entre  $f$  y  $g : X \rightarrow Y$  le corresponde la homotopía  $h^\sharp : LX \times I \rightarrow Y$  entre  $f^\sharp$  y  $g^\sharp$  y entonces  $[X, RY] = [LX, Y]$ . Entonces, con las notaciones del teorema 1, se tienen los isomorfismos:

$$\text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}'}(\underline{L}(X), Y) \simeq [LQX, R'Y] \simeq [QX, RR'Y] \simeq \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, \underline{R}(Y))$$

donde los isomorfismos están dados por  $(\gamma(i_Y))_*$ ,  $\flat$  y  $(\gamma(p_X))^*$ . Notar que  $(\gamma(i_Y))_*$  y  $(\gamma(p_X))^*$  son isomorfismos, y además, por lo hecho en la demostración de la proposición anterior, teníamos  $LF(X) = FQ(X)$ , entonces

$$\underline{L}X = L^\gamma(\gamma' \circ L)(X) = \gamma' \circ L(Q(X)) = LQX$$

es decir,  $\underline{L}X = LQX$ . Estos isomorfismos resultan functoriales por lo que  $\underline{L}$  y  $\underline{R}$  son adjuntos.

Supongamos ahora que para  $X \in \mathcal{C}_c$  y  $Y \in \mathcal{C}'_f$  se tiene que  $f : X \rightarrow RY$  es una equivalencia débil si y sólo si  $f^\sharp : LX \rightarrow Y$  es una equivalencia débil. Entonces

$$(i_{LX})^\flat : X \rightarrow RR'(LX)$$

es una equivalencia débil. Por lo hecho antes,  $\underline{L}X = L(Q(X)) = L(X)$  ya que  $X$  es cofibrante. Dualmente, de la proposición anterior se tiene  $RF(X) = FR'(X)$ , entonces

$$\underline{R}X = R^\gamma(\gamma' \circ R)(X) = \gamma' \circ R(R'(X))$$

de donde  $\underline{R}\underline{L}X = RR'L(X)$  y por lo visto antes,

$$(\gamma(p_X))^*((\gamma(i_Y))_*)^\flat(id) = \gamma((i_{LX})^\flat) : X \rightarrow RR'LX$$

es el morfismo de adjunción  $X \rightarrow \underline{R}\underline{L}X$  (notar que como  $X$  es cofibrante entonces  $p_X = id_X$  y  $QX = X$ ). Pero  $(i_{LX})^\flat$  era una equivalencia débil, entonces  $\gamma((i_{LX})^\flat)$  resulta un isomorfismo. Esto vale para todo  $X$  en  $\text{Ho}\mathcal{C}_c$  y luego para todo  $X$  en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  (recordar que  $\text{Ho}\mathcal{C}_c \simeq \text{Ho}\mathcal{C}$ ). Similarmente, el morfismo de adjunción  $\underline{L}RX \rightarrow X$  es un isomorfismo. Esto prueba la segunda parte del teorema.

Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  son punteadas, tenemos por 3.4.7 y su dual que  $\underline{L}\Sigma \simeq \Sigma'\underline{L}$  y  $\Omega\underline{R} \simeq \underline{R}\Omega'$ . Entonces  $\underline{R}\Sigma' \simeq \underline{R}\Sigma'\underline{L}R \simeq \underline{R}\underline{L}\Sigma R \simeq \Sigma R$  y, análogamente,  $\underline{L}$  preserva funtores loop.

También por 3.4.7,  $\underline{L}$  preserva sucesiones de cofibra y  $\underline{R}$  preserva sucesiones de fibra. En efecto, supongamos que  $\varepsilon$  es la sucesión de fibra

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \qquad F \times \Omega B \xrightarrow{m} F$$

de  $\text{Ho}\mathcal{C}$ . Por 3.3.11 ítem (i), podemos incluir el morfismo  $\underline{L}p : \underline{L}E \rightarrow \underline{L}B$  en una sucesión de fibra  $\varepsilon'$  de  $\text{Ho}\mathcal{C}'$ . Entonces  $\underline{R}\varepsilon'$  es una sucesión de fibra que es isomorfa a  $\varepsilon$  por 3.3.11 (ii) y (iii) (con las notaciones de dicha proposición, basta tomar  $\alpha : B \rightarrow \underline{R}\underline{L}B$ ,  $\beta : E \rightarrow \underline{R}\underline{L}E$  dados por los morfismos de adjunción, que por lo visto antes, resultan isomorfismos). Así  $\varepsilon' \simeq \underline{L}\underline{R}\varepsilon' \simeq \underline{L}\varepsilon$  y  $\underline{L}$  preserva sucesiones de fibra. Similarmente,  $\underline{R}$  preserva sucesiones de cofibra.  $\square$

### 3.5. Categorías de modelos cerradas

**Definición 3.5.1.** Una categoría de modelos  $\mathcal{C}$  se dice cerrada si satisface el axioma adicional:

M6. Cualesquiera dos de las tres clases distinguidas de morfismos de  $\mathcal{C}$  (fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles) determina la tercera por las siguientes reglas:

- a) Un morfismo es una fibración si y sólo si tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de los morfismos que son cofibraciones y equivalencias débiles.
- b) Un morfismo es una cofibración si y sólo si tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de los morfismos que son fibraciones y equivalencias débiles.
- c) Un morfismo  $f$  es una equivalencia débil si y sólo si se factoriza como  $f = uv$ , donde  $v$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de las fibraciones y  $u$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de las cofibraciones.

**Ejemplo 3.5.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos cerrada. Es fácil ver que  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  con la estructura de categoría de modelos definida en 3.1.4 también es una categoría de modelos cerrada.

**Observación importante 3.5.3.** Es trivial que M6 implica M1. Además, de la observación 1.4.18 es claro que M6 implica M3. También es fácil ver que M6 implica M5. Por lo tanto, las categorías de modelos cerradas pueden definirse usando sólo los axiomas M0, M2, M5 y M6.

**Lema 3.5.4.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos y sea  $p : X \rightarrow Y$  una fibración en  $\mathcal{C}_{cf}$ . Entonces son equivalentes:

- i.  $p$  tiene la RLP respecto de las cofibraciones.
- ii.  $p$  es el dual de un retracto por deformación fuerte en el siguiente sentido: existen un morfismo  $t : Y \rightarrow X$  con  $pt = \text{Id}_Y$  y una homotopía  $h : X \times I \rightarrow X$  de  $tp$  a  $\text{Id}_X$  con  $ph = p\sigma$ .

iii.  $\gamma(p)$  es un isomorfismo.

*Demostración.* i.  $\Rightarrow$  ii.) Levantamos sucesivamente en

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow t & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{\text{Id}_Y} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \vee X & \xrightarrow{tp + \text{Id}_X} & X \\ \partial_0 + \partial_1 \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{p\sigma} & Y \end{array}$$

ii.  $\Rightarrow$  i.) Sea  $p^I : X^I \rightarrow Y^I$  una elección compatible de objetos de caminos como en la sección 3, y sea  $Q$  un levantado en

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s^X} & X^I \\ \partial_1 \downarrow & \nearrow Q & \downarrow (d_0^X, p^I, d_1^X) \\ X \times I & \xrightarrow{(h, s^Y p\sigma, \sigma)} & X \times Y^I \times X \end{array}$$

(notar que existe pues  $(h, s^Y p\sigma, \sigma)\partial_1 = (\text{Id}_X, s^Y p, \text{Id}_X) = (d_0^X, p^I, d_1^X)s^X$ ,  $\partial_1$  es cofibración trivial pues  $X$  es cofibrante, y  $(d_0^X, p^I, d_1^X)$  es fibración).

Entonces  $k = Q\partial_0 : X \rightarrow X^I$  es una homotopía a derecha de  $d_0^X Q\partial_0 = h\partial_0 = tp$  a  $d_1^X Q\partial_0 = \sigma\partial_0 = \text{Id}_X$  con  $p^I k = s^Y p$ . Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

con  $i$  cofibración, construyamos la flecha punteada  $\varphi$ . Tomemos una flecha punteada  $H$  en

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k\alpha} & X^I \\ i \downarrow & \nearrow H & \downarrow (d_0^X, p^I) \\ B & \xrightarrow{(t\beta, s^Y \beta)} & X \times Y^I \end{array}$$

(notar que  $d_0^X k\alpha = tp\alpha = t\beta i$ ,  $p^I k\alpha = s^Y p\alpha = s^Y \beta i$  y que  $(d_0^X, p^I)$  es una fibración trivial) y sea  $\varphi = d_1^X H$ . Entonces  $p\varphi = pd_1^X H = d_1^Y p^I H = d_1^Y s^Y \beta = \beta$  y  $\varphi i = d_1^X H i = d_1^X k\alpha = \alpha$  como queremos.

ii.  $\Rightarrow$  iii.)  $t$  es una inversa homotópica de  $p$ , luego  $p$  es una equivalencia homotópica, es decir, un isomorfismo en  $\pi\mathcal{C}_{cf}$ , y entonces  $\gamma(p)$  es un isomorfismo.

iii.  $\Rightarrow$  ii.) Por el teorema 3.1.32,  $p$  es una equivalencia homotópica, es decir, existe un morfismo  $t : Y \rightarrow X$  con  $pt \sim \text{Id}_Y$  y  $tp \sim \text{Id}_X$ . Por 3.1.18 y análogamente a lo hecho en la última parte de la demostración de 3.3.11, podemos suponer que  $pt = \text{Id}_Y$ . Sea  $q : X \times I \rightarrow Y$  una homotopía a izquierda de  $tp$  a  $\text{Id}_X$ . Entonces, como  $tpq$  es una homotopía a izquierda entre  $tptp = tp$  y  $tp$ , se tiene que la composición de homotopías

$q^{-1} \cdot tpq : X \times I' \rightarrow X$  es una homotopía entre  $\text{Id}_X$  y  $tp$  que levanta a la homotopía  $(pq)^{-1} \cdot (pq) : X \times I' \rightarrow Y$  (esta última es una homotopía entre  $p$  y  $p$ ) ya que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X \\ \partial'_0 \downarrow & \nearrow q^{-1} \cdot tpq & \downarrow p \\ X \times I' & \xrightarrow{(pq)^{-1} \cdot (pq)} & Y \end{array}$$

conmuta. Por 3.2.11  $(pq)^{-1} \cdot (pq) = p\sigma$ , en  $\pi_1^1(X, Y, p, p)$ , es decir, existe  $H : X \times J \rightarrow Y$  con  $Hj_0 = p\sigma$  y  $Hj_1 = (pq)^{-1} \cdot (pq)$ , con las notaciones de la definición 3.2.1. Siguiendo con las notaciones de dicha definición  $\text{in}_1$  y  $\text{in}_2$  son cofibraciones por M3, luego  $j_0 = (j_0 + j_1)\text{in}_1$  y  $j_1 = (j_0 + j_1)\text{in}_2$  son cofibraciones. Luego, existe  $K$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{q^{-1} \cdot tpq} & X \\ j_1 \downarrow & \nearrow K & \downarrow p \\ X \times J & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

Entonces  $Kj_0 : X \times I \rightarrow Y$  es una homotopía a izquierda entre  $\text{Id}_X$  y  $tp$  ya que como  $\text{in}_1(\partial_0 + \partial_1) = \text{in}_2(\partial'_0 + \partial'_1)$  se tiene  $j_0\partial_0 = (j_0 + j_1)\text{in}_1\partial_0 = (j_0 + j_1)\text{in}_2\partial'_0 = j_1\partial'_0$  y análogamente  $j_0\partial_1 = j_1\partial'_1$ , y luego  $Kj_0\partial_0 = Kj_1\partial'_0 = (q^{-1} \cdot tpq)\partial'_0 = q^{-1}\partial_0 = \text{Id}_X$  y  $Kj_0\partial_1 = Kj_1\partial'_1 = (q^{-1} \cdot tpq)\partial'_1 = tpq\partial_1 = tp$ . Tomamos  $h = (Kj_0)^{-1}$ .  $\square$

**Proposición 3.5.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos cerrada y sea  $f$  un morfismo de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\gamma(f)$  es un isomorfismo en  $\text{Ho}\mathcal{C}$  si y sólo si  $f$  es una equivalencia débil. Es decir la saturación de la clase de equivalencias débiles es ella misma.*

*Demostración.* Sea  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $\gamma(f)$  es un isomorfismo. Haremos un reemplazo cofibrante y luego un reemplazo fibrante. Elegimos una fibrición trivial  $p_X : Q(X) \rightarrow X$ , con  $Q(X)$  cofibrante y una fibrición trivial  $p_Y : Q(Y) \rightarrow Y$ , con  $Q(Y)$  cofibrante. Tenemos  $Q(f) : Q(X) \rightarrow Q(Y)$  tal que  $p_Y Q(f) = fp_X$ . Por M5, basta probar que  $Q(f)$  es una equivalencia débil. Además, aplicando  $\gamma$  en la igualdad anterior se tiene que  $\gamma(Q(f))$  es un isomorfismo.

Ahora elegimos una cofibración trivial  $i_{Q(X)} : Q(X) \rightarrow R(Q(X))$  con  $R(Q(X))$  fibrante y una cofibración trivial  $i_{Q(Y)} : Q(Y) \rightarrow R(Q(Y))$  con  $R(Q(Y))$  fibrante. Como  $Q(X)$  y  $Q(Y)$  eran objetos cofibrantes, entonces  $R(Q(X))$  y  $R(Q(Y))$  también lo son (visto en la demostración de 3.1.31), luego son objetos de  $\mathcal{C}_{cf}$ .

Tenemos también  $RQ(f) : R(Q(X)) \rightarrow R(Q(Y))$  tal que  $R(Q(f))i_{Q(X)} = i_{Q(Y)}Q(f)$ . Basta probar entonces que  $R(Q(f))$  es una equivalencia débil. Además, se tiene que  $\gamma(R(Q(f)))$  es un isomorfismo. Podemos suponer entonces que  $X$  e  $Y$  son objetos de  $\mathcal{C}_{cf}$ . Factorizamos  $f = pi$  donde  $i : X \rightarrow Z$  es una cofibración trivial y  $p : Z \rightarrow Y$  es una fibrición. Basta probar que  $p$  es una equivalencia débil. Notemos que  $Z$  es cofibrante pues  $X$  lo es e  $i$  es cofibración y que  $Z$  es fibrante pues  $Y$  es fibrante y  $p$  es fibrición. Así  $p$  es una fibrición en  $\mathcal{C}_{cf}$  y como  $\gamma(f) = \gamma(p)\gamma(i)$  y  $\gamma(f)$  y  $\gamma(i)$  son isomorfismos, entonces  $\gamma(p)$  también lo es. Por lo tanto, por el lema anterior,  $p$  tiene la RLP respecto

de las cofibraciones. Además por M1,  $i$  tiene la LLP respecto de las fibaciones. Entonces, por M6 c),  $f$  es una equivalencia débil.

La recíproca es trivial, por definición de  $\gamma$ . □

**Proposición 3.5.6.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos. Entonces,  $\mathcal{C}$  es cerrada si y sólo si todo retracts de un morfismo de cualquiera de las tres clases distinguidas es un morfismo de la misma clase.*

*Demostración.* Por M6, las fibaciones tienen RLP respecto de las cofibraciones triviales. Luego, por 1.4.17, un retracts de una fibación también tiene RLP respecto de las cofibraciones triviales y entonces, por M6, es una fibación. Así, la clase de fibaciones es cerrada por retracts. Análogamente la clase de cofibraciones es cerrada por retracts.

Sea  $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  el funtor de localización, y supongamos que  $f$  es un retracts de una equivalencia débil  $f'$ . Entonces, aplicando  $\gamma$  al diagrama de la definición anterior, se tiene que  $\gamma(f)$  es un retracts del isomorfismo  $\gamma(f')$ , luego, por la observación anterior,  $\gamma(f)$  es un isomorfismo, y entonces  $f$  es una equivalencia débil, por 3.5.5. Así hemos probado la primera implicación.

Para probar la recíproca hay que ver que vale M6.

a) La primera implicación vale por M1. Veamos la recíproca. Sea  $p : X \rightarrow Y$  que tiene la RLP respecto de las cofibraciones triviales. Por M2, podemos factorizar  $p = ui$ , donde  $i : X \rightarrow Z$  es una cofibración trivial y  $u : Z \rightarrow Y$  es una fibación. Entonces, existe  $s$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X \\ i \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Por lo tanto  $p$  es un retracts de la fibación  $u$ , entonces  $p$  es una fibación.

b) Análogo a a).

c) Sea  $f$  una equivalencia débil, entonces por M2, podemos factorizar  $f = uv$  con  $u$  fibación trivial y  $v$  cofibración. Por M5,  $v$  es una equivalencia débil y entonces, por M1,  $u$  tiene RLP respecto de fibaciones y  $v$  tiene LLP respecto de cofibraciones.

Recíprocamente, supongamos  $f = uv$  como en M6 c). Por M2, podemos factorizar  $u = pi$ , donde  $i : X \rightarrow Z$  es una cofibración y  $p : Z \rightarrow Y$  es una fibación trivial. Entonces, existe  $s$  en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X \\ i \downarrow & \nearrow s & \downarrow u \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

Por lo tanto  $u$  es un retracts de la equivalencia débil  $p$ , entonces  $u$  es una equivalencia débil.

Análogamente,  $v$  es una equivalencia débil. Luego  $f$  también lo es.

Por lo tanto  $\mathcal{C}$  es una categoría de modelos cerrada. □

**Ejemplo 3.5.7.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos cerrada y sea  $A$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Entonces  ${}^A\mathcal{C}$  con la estructura de categoría de modelos dada en 3.1.6 es una categoría de modelos

cerrada. En efecto, llamando  $O : {}^A\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  al funtor olvido se tiene que si  $f$  y  $f'$  son morfismos de  ${}^A\mathcal{C}$  tales que  $f$  es un retracto de  $f'$ , entonces  $O(f)$  es un retracto de  $O(f')$ . Usando la proposición anterior, el resultado se sigue.

Dualmente, si  $B$  es un objeto de  $\mathcal{C}$ , entonces  ${}_B\mathcal{C}$  es una categoría de modelos cerrada con la estructura de 3.1.6.

**Proposición 3.5.8.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos cerrada. Entonces un morfismo  $f$  de  $\mathcal{C}$  es una cofibración trivial si y sólo si tiene la LLP respecto de la clase de fibraciones. Dualmente,  $f$  es una fibración trivial si y sólo si tiene la RLP respecto de la clase de cofibraciones.*

*Demostración.* Si  $f$  es una cofibración trivial entonces, por M1, tiene la LLP respecto de la clase de fibraciones. Recíprocamente, supongamos que  $f$  tiene la LLP respecto de la clase de fibraciones. Por M2, podemos factorizar  $f$  como  $f = pi$  con  $i$  cofibración trivial y  $p$  fibración. Por hipótesis, existe un levantado  $g$  que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & E \\ f \downarrow & \nearrow g & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Luego,  $f$  es un retracto de  $i$  y por lo tanto  $f$  es una cofibración trivial. □

**Lema 3.5.9 (Ken Brown).** *Sean  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos y  $\mathcal{D}$  una categoría con una clase de equivalencias débiles que satisface el axioma M5. Supongamos que  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un funtor que manda cofibraciones triviales entre objetos cofibrantes a equivalencias débiles. Entonces  $F$  manda todas las equivalencias débiles entre objetos cofibrantes a equivalencias débiles.*

*Dualmente, si  $F$  manda fibraciones triviales entre objetos fibrantes a equivalencias débiles, entonces  $F$  manda todas las equivalencias débiles entre objetos fibrantes a equivalencias débiles.*

*Demostración.* Supongamos que  $f : A \rightarrow B$  es una equivalencia débil entre objetos cofibrantes. Factorizamos el morfismo  $f + \text{Id}_B : A \vee B \rightarrow B$  en una cofibración  $q : A \vee B \rightarrow C$  seguida de una fibración trivial  $p : C \rightarrow B$ . Tenemos un pushout

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \text{in}_1 \\ B & \xrightarrow{\text{in}_2} & A \vee B \\ & \searrow \text{Id}_B & \downarrow f + \text{Id}_B \\ & & B \end{array}$$

Como  $A$  y  $B$  son cofibrantes, entonces, por M3,  $\text{in}_1$  y  $\text{in}_2$  son cofibraciones y entonces  $q \circ \text{in}_1$  y  $q \circ \text{in}_2$  también lo son. Como  $p \circ q \circ \text{in}_1 = f$  y  $p \circ q \circ \text{in}_2 = \text{Id}_B$  y  $f, p, \text{Id}_B$  son equivalencias débiles, por M5,  $q \circ \text{in}_1$  y  $q \circ \text{in}_2$  también lo son.

Por otra parte, notemos que  $A \vee B$  es cofibrante pues  $A$  lo es y  $\text{in}_1$  es cofibración. También,  $C$  es cofibrante pues  $A \vee B$  lo es y  $q$  es cofibración. Por lo tanto  $q \circ \text{in}_1$  y  $q \circ \text{in}_2$  son cofibraciones triviales entre objetos cofibrantes. Entonces, por hipótesis,  $F(q \circ \text{in}_1)$  y  $F(q \circ \text{in}_2)$  son equivalencias débiles. Como  $F(p \circ q \circ \text{in}_2) = F(\text{Id}_B)$  es una equivalencia débil, por el axioma 2 de 3  $F(p)$  es una equivalencia débil. Luego,  $F(f) = F(p \circ q \circ \text{in}_1)$  es también una equivalencia débil.  $\square$

**Proposición 3.5.10.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos. Si  $B$  es cofibrante y  $h : X \rightarrow Y$  es una equivalencia débil entre objetos fibrantes, entonces  $h$  induce un isomorfismo  $h_* : \pi^l(B, X) \rightarrow \pi^l(B, Y)$ .*

*Dualmente, Si  $A$  es fibrante y  $h : X \rightarrow Y$  es una equivalencia débil entre objetos cofibrantes, entonces  $h$  induce un isomorfismo  $h_* : \pi^r(Y, A) \rightarrow \pi^r(X, A)$ .*

*Demostración.* Consideremos el funtor  $\pi^l(B, \_) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  definido de la siguiente manera. A un objeto  $Z$  le asigna  $\pi^l(B, Z)$  y a un morfismo  $f$  lo manda a la función  $f_*$ .

Llamemos equivalencias débiles en  $\text{Set}$  a las funciones biyectivas. Entonces, por lema 3.1.26 el funtor anterior manda fibraciones triviales de  $\mathcal{C}$  a equivalencias débiles en  $\text{Set}$ . Luego, por 3.5.9, dicho funtor manda todas las equivalencias débiles entre objetos fibrantes a equivalencias débiles, es decir,  $h_*$  es un isomorfismo.  $\square$

**Definición 3.5.11.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}_{cf}$ . Decimos que  $f$  es una equivalencia homotópica si existe  $g : Y \rightarrow X$  morfismo de  $\mathcal{C}$  tal que  $gf \sim \text{Id}_X$  y  $fg \sim \text{Id}_Y$ .

**Proposición 3.5.12.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos cerrada. Entonces un morfismo de  $\mathcal{C}_{cf}$  es una equivalencia débil si y sólo si es una equivalencia homotópica.*

*Demostración.* Supongamos primero que  $f : A \rightarrow B$  es una equivalencia débil entre objetos que son a la vez cofibrantes y fibrantes. Por la proposición anterior, si  $X$  es un objeto que es a la vez cofibrante y fibrante tenemos un isomorfismo

$$f_* : \text{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(X, B)$$

Tomando  $X = B$  encontramos un morfismo  $g : B \rightarrow A$ , único salvo homotopía, tal que  $fg \sim \text{Id}_B$ . En particular,  $fgf \sim f$ , luego, tomando  $X = A$  tenemos que  $gf \sim \text{Id}_A$ . Así  $f$  es una equivalencia homotópica.

Recíprocamente, supongamos que  $f : A \rightarrow B$  es una equivalencia homotópica entre objetos de  $\mathcal{C}_{cf}$ . Factorizamos  $f = pg$  donde  $g : A \rightarrow C$  es un acofibración trivial y  $p : C \rightarrow B$  es una fibración. Entonces  $C$  es también cofibrante y fibrante. Por la primera parte resulta que  $g$  es una equivalencia homotópica.

Probaremos que  $p$  es una equivalencia débil. Para ello, sea  $f' : B \rightarrow A$  una inversa homotópica para  $f$  y  $H : IB \rightarrow B$  una homotopía a izquierda entre  $ff'$  y  $\text{Id}_B$ , donde  $IB$  es un cilindro para  $B$ . Como  $\partial_0$  es cofibración trivial (ya que  $B$  es cofibrante),  $p$  es fibración y  $pgf' = ff' = H\partial_0$ , existe  $H' : IB \rightarrow C$  un levantado en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{gf'} & C \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow H' & \downarrow p \\ IB & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Sea  $q = H'\partial_1 : B \rightarrow C$ . Entonces  $pq = \text{Id}_B$  y  $H'$  es una homotopía a izquierda entre  $gf'$  y  $q$ . Sea ahora  $g' : C \rightarrow A$  una inversa homotópica para  $g$ . Entonces  $p \sim pgg' \sim fg'$  y luego  $qp \sim (gf')(fg') \sim \text{Id}_C$ .

Por lo tanto,  $qp$  es una equivalencia débil. En efecto, si  $K : IC \rightarrow C$  es una homotopía a izquierda de  $\text{Id}_C$  a  $qp$ , entonces  $K\partial_0 = \text{Id}_C$  es una equivalencia débil, y como  $\partial_0$  también lo es (pues  $C$  es cofibrante), entonces  $K$  es una equivalencia débil. Luego como  $\partial_1$  es una equivalencia débil se obtiene que  $K\partial_1$  es también una equivalencia débil. Ahora bien, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\text{Id}_C} & C & \xrightarrow{\text{Id}_C} & C \\ p \downarrow & & qp \downarrow & & p \downarrow \\ B & \xrightarrow{q} & C & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

muestra que  $p$  es un retracto de  $qp$ . Luego, por 3.5.6,  $p$  es una equivalencia débil y así  $f$  también lo es.  $\square$

**Observación importante 3.5.13.** En  $\mathcal{T}op$  la proposición anterior dice que en los CW-complejos una función continua  $f$  es una equivalencia (homotópica) débil si y sólo si es una equivalencia homotópica, es decir, es el teorema de Whitehead ([13], pág. 89).

**Corolario 3.5.14.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos cerrada. Sean  $\gamma_{cf} : \mathcal{C}_{cf} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_{cf}$  y  $\delta : \mathcal{C}_{cf} \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$  los funtores canónicos. Entonces existe un único isomorfismo de categorías  $j : \pi\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_{cf}$  tal que  $j\delta = \gamma_{cf}$ . Además,  $j$  es la identidad en los objetos.

*Demostración.* Probaremos que  $\pi\mathcal{C}_{cf}$  tiene la propiedad universal correspondiente. El functor  $\delta$  manda equivalencias homotópicas a isomorfismos, y entonces, por la proposición anterior, manda equivalencias débiles a isomorfismos.

Supongamos ahora que  $F : \mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor que manda equivalencias débiles a isomorfismos. Sea  $A$  un objeto de  $\mathcal{C}_{cf}$  y sea  $IA$  con  $\partial_0, \partial_1$  y  $\sigma$  un cilindro para  $A$ . Como  $\sigma\partial_0 = \text{Id}_A = \sigma\partial_1$ , entonces  $F(\sigma)F(\partial_0) = F(\sigma)F(\partial_1)$  y como  $\sigma$  es una equivalencia débil, entonces  $F(\sigma)$  es un isomorfismo y se obtiene  $F(\partial_0) = F(\partial_1)$ . Entonces si  $H : IA \rightarrow B$  es una homotopía a izquierda entre  $f : A \rightarrow B$  y  $g : A \rightarrow B$  se tiene que

$$Ff = F(H\partial_0) = F(H)F(\partial_0) = F(H)F(\partial_1) = F(H\partial_1) = F(g)$$

es decir,  $F$  identifica morfismos homotópicos a izquierda. Ahora bien, en  $\mathcal{C}_{cf}$  se tiene que  $\sim$  coincide con  $\sim$ , luego, existe un único functor  $G : \pi\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $G\delta = F$ . Además,  $G$  es la identidad en los objetos y manda a la clase de equivalencia del morfismo  $f$  a  $Ff$ .

Hemos visto así que  $\delta : \mathcal{C}_{cf} \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$  tiene la propiedad universal de la localización. En particular, poniendo  $\mathcal{D} = \text{Ho}\mathcal{C}_{cf}$  y  $F = \gamma_{cf}$  en la cuenta de antes se tiene el corolario.  $\square$

*Observación 3.5.15.* En el caso de  $\mathcal{T}op$  este corolario dice que para invertir las equivalencias homotópicas débiles en la categoría de CW-complejos basta con cocientar por la relación de equivalencia ‘ser homotópico a’, como ya dijimos anteriormente. Notemos que la idea de la demostración es la misma que la del lema 3.1.29 y la nota 3.1.30.



### 3.6. Funtores de Quillen

**Definición 3.6.1.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de modelos cerradas. Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  se llama un functor de Quillen a izquierda si  $F$  tiene un adjunto a derecha y preserva cofibraciones y cofibraciones triviales.

Un functor  $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  se llama un functor de Quillen a derecha si tiene un adjunto a izquierda y preserva fibraciones y fibraciones triviales.

*Observación 3.6.2.* El lema de Ken Brown (3.5.9) implica que todo functor de Quillen a izquierda preserva equivalencias débiles entre objetos cofibrantes. Dualmente, todo functor de Quillen a derecha preserva equivalencias débiles entre objetos fibrantes.

**Definición 3.6.3.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de modelos cerradas. Una adjunción  $(F, U, \varphi)$  de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  (ver 2.1.7) tal que  $F$  es un functor de Quillen a izquierda se llama una adjunción de Quillen.

El siguiente lema muestra por qué no se pide que  $U$  sea un functor de Quillen a derecha en la definición anterior.

**Lema 3.6.4.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de modelos cerradas y  $(F, U, \varphi)$  una adjunción. Entonces  $F$  es un functor de Quillen a izquierda si y sólo si  $U$  es un functor de Quillen a derecha.

*Demostración.* Veamos primero que si  $i : X \rightarrow Y$  es un morfismo de  $\mathcal{C}$  y  $p : E \rightarrow B$  es un morfismo de  $\mathcal{D}$ , entonces  $F(i)$  tiene la LLP respecto de  $p$  si y sólo si  $i$  tiene la LLP respecto de  $U(p)$ . Para ver la primera implicación, supongamos que tenemos un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & U(E) \\ \downarrow i & & \downarrow U(p) \\ Y & \xrightarrow{g} & U(B) \end{array}$$

Usando la adjunción, construimos el siguiente diagrama de  $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_{XE}^{-1}(f)} & E \\ F(i) \downarrow & & \downarrow p \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_{YB}^{-1}(g)} & B \end{array}$$

Notemos que este diagrama conmuta ya que usando la naturalidad de  $\varphi$  se tiene

$$\begin{aligned} p \circ \varphi_{XE}^{-1}(f) &= (p_* \varphi_{XE}^{-1})(f) = (\varphi_{XB}^{-1}(Up)_*)(f) = \varphi_{XB}^{-1}(Up \circ f) = \varphi_{XB}^{-1}(gi) = \varphi_{XB}^{-1}(i^*(g)) = \\ &= F(i)^*(\varphi_{YB}^{-1})(g) = \varphi_{YB}^{-1}(g) \circ F(i) \end{aligned}$$

Luego, por hipótesis existe un levantado  $h$  en el diagrama anterior tal que  $ph = \varphi_{YB}^{-1}g$ ,  $hF(i) = \varphi_{XE}^{-1}(f)$ . Y con un argumento similar al anterior, usando la naturalidad de  $\varphi$ , se

obtiene que  $\varphi(h)$  es un levantado en el primer diagrama tal que  $\varphi(h)i = f$ ,  $U(p)\varphi(h) = g$ . Así tenemos la primera implicación.

La recíproca se deduce de aplicar la implicación anterior en las categorías duales.

Probaremos ahora lo que dice el lema. Veamos la primera implicación. Supongamos que  $p$  es una fibración en  $\mathcal{D}$ . Queremos ver que  $U(p)$  es una fibración en  $\mathcal{C}$ . Por M6, basta ver que tiene la RLP respecto de las cofibraciones triviales. Sea  $i$  una cofibración trivial en  $\mathcal{C}$ . Por hipótesis,  $F(i)$  es una cofibración trivial en  $\mathcal{D}$ . Luego,  $p$  tiene la RLP respecto de  $F(i)$ . Entonces, por lo visto antes,  $U(p)$  tiene la RLP respecto de  $i$ . Como esto vale para toda cofibración  $i$  se tiene que  $U(p)$  es fibración.

Si  $p$  es una fibración trivial en  $\mathcal{D}$ , con un argumento totalmente análogo al anterior y usando 3.5.8 y que  $F$  preserva cofibraciones obtenemos que  $U(p)$  es una fibración trivial.

La recíproca del lema se deduce de aplicar la implicación anterior en las categorías duales.  $\square$

**Ejemplo 3.6.5.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos cerrada y  $A$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Consideramos en  ${}^A\mathcal{C}$  la estructura de categoría de modelos cerrada heredada de  $\mathcal{C}$  (ver 3.1.6). Vimos que el functor olvido  $O$  es adjunto a derecha de un functor, al que hemos llamado  $L$  (1.4.12). Por definición de la estructura de categorías de modelos es claro que  $O$  preserva fibraciones y fibraciones triviales, luego  $L$  y  $O$  forman una adjunción de Quillen.

Es claro que la composición de funtores de Quillen a izquierda (resp. a derecha) da otro functor de Quillen a izquierda (resp. a derecha).

También podemos componer adjunciones. Si  $(L, R, \varphi)$  es una adjunción de la categoría  $\mathcal{C}$  a la categoría  $\mathcal{D}$ , y  $(L', R', \varphi')$  es una adjunción de la categoría  $\mathcal{D}$  a la categoría  $\mathcal{E}$ , entonces definimos su composición como la adjunción  $(L' \circ L, R \circ R', \varphi' \circ \varphi)$  de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{E}$ .

Notemos que la composición de adjunciones de Quillen es una adjunción de Quillen. Notemos además que si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son categorías de modelos cerradas y  $(F, U, \varphi)$  es una adjunción de Quillen de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$ , entonces  $(U, F, \varphi^{-1})$  es una adjunción de Quillen de  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  a  $\mathcal{D}^{\text{op}}$ . Notamos  $(F, U, \varphi)^{\text{op}} = (U, F, \varphi^{-1})$ .

**Proposición 3.6.6.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de modelos cerradas, sea  $A$  un objeto de  $\mathcal{D}$  y sea  $(F, U, \varphi)$  una adjunción de Quillen de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$ . Entonces  $(F, U, \varphi)$  induce una adjunción de Quillen  $(F', U', \varphi')$  de  ${}^{U(A)}\mathcal{C}$  a  ${}^A\mathcal{D}$ .

*Demostración.* Llamemos  $\Phi : FU \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  y  $\Psi : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow UF$  a los morfismos de adjunción.

Comenzamos definiendo el functor  $U' : {}^A\mathcal{D} \rightarrow {}^{U(A)}\mathcal{C}$ . Lo definimos sobre los objetos como  $U'(Y, w) = (U(Y), U(w))$  y sobre las flechas como  $U'(\beta) = U(\beta)$ .

Definamos ahora el functor  $F' : {}^{U(A)}\mathcal{C} \rightarrow {}^A\mathcal{D}$ . Sea  $(X, v)$  un objeto de  ${}^{U(A)}\mathcal{C}$ . Consideramos el pushout

$$\begin{array}{ccc} FU(A) & \xrightarrow{\Phi_A} & A \\ F(v) \downarrow & \text{push} & \downarrow \text{in}_1 \\ F(X) & \xrightarrow{\text{in}_2} & F'_X \end{array}$$



Como el diagrama total es pushout y la parte superior es pushout, entonces la parte inferior también lo es. Se tiene

$$\begin{aligned} (F'\varepsilon)^* \rho_{F'(X',v')(Y,w)}(\beta) &= (F'\varepsilon)^*(w + \varphi_{X'Y}^{-1}(\beta)) = (w + \varphi_{X'Y}^{-1}(\beta)) \circ (\text{Id}_A \vee F(\varepsilon)) = \\ &= w + (\varphi_{X'Y}^{-1}(\beta)F(\varepsilon)) = w + (F(\varepsilon)^* \varphi_{X'Y}^{-1}(\beta)) = \\ &= w + (\varphi_{XY}^{-1} \varepsilon^*(\beta)) = \rho(\varepsilon^*(\beta)) \end{aligned}$$

Así hemos probado que  $(F', U', \lambda)$  es una adjunción de  $U(A)\mathcal{C}$  a  $A\mathcal{D}$ .

Además, como  $U$  es un functor de Quillen a derecha, se tiene que preserva fibraciones y fibraciones triviales. Por lo tanto  $U'$  también preserva fibraciones y fibraciones triviales. Luego,  $U'$  es un functor de Quillen a derecha y  $(F', U', \lambda)$  es una adjunción de Quillen.  $\square$

*Observación 3.6.7.* En el lenguaje de esta sección, el teorema 3.4.8 dice que si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son categorías de modelos y  $(F, U, \varphi)$  es una adjunción de Quillen de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$ , entonces  $\underline{L}F$  y  $\underline{R}U$  son parte de una adjunción de Quillen de  $\text{Ho}\mathcal{C}$  a  $\text{Ho}\mathcal{D}$  que llamamos adjunción derivada y que notaremos  $L(F, U, \varphi)$ .

**Definición 3.6.8.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de modelos cerradas y  $(F, U, \varphi)$  una adjunción de Quillen de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$ . Llamaremos a  $(F, U, \varphi)$  una equivalencia de Quillen si para todo objeto cofibrante  $X$  de  $\mathcal{C}$  y para todo objeto fibrante  $Y$  de  $\mathcal{D}$  se tiene que un morfismo  $f : F(X) \rightarrow Y$  es una equivalencia débil en  $\mathcal{D}$  si y sólo si  $\varphi(f) : X \rightarrow U(Y)$  es una equivalencia débil en  $\mathcal{C}$ .

El siguiente teorema generaliza la segunda parte de 3.4.8 para categorías de modelos cerradas.

**Teorema 3.6.9.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de modelos cerradas y  $(F, U, \varphi)$  una adjunción de Quillen. Llamamos  $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow UF$  y  $\varepsilon : FU \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  a los morfismos de adjunción. Sea  $Q$  un reemplazo cofibrante en  $\mathcal{C}$  y sea  $R$  un reemplazo fibrante en  $\mathcal{D}$  (cf. 3.1.31). Notamos con  $p_X : Q(X) \rightarrow X$  a la fibración trivial y con  $i_X : X \rightarrow RX$  a la cofibración trivial. Son equivalentes:

a)  $(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de Quillen.

b) La composición

$$X \xrightarrow{\eta_X} UFX \xrightarrow{U(i_{FX})} URF(X)$$

es una equivalencia débil para todo objeto cofibrante  $X$  de  $\mathcal{C}$  y la composición

$$FQU(Y) \xrightarrow{F(p_{UY})} FUY \xrightarrow{\varepsilon_Y} URF(Y)$$

es una equivalencia débil para todo objeto fibrante  $Y$  de  $\mathcal{D}$ .

c)  $L(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de categorías.

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Si  $(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de Quillen y  $X$  es cofibrante entonces  $i_{FX} : FX \rightarrow RFX$  es una equivalencia débil con  $RFX$  fibrante. Luego, por hipótesis,  $\varphi(i_{FX}) : X \rightarrow URFX$  es una equivalencia débil. Pero sabemos que  $\varphi(i_{FX}) = U(i_{FX}) \circ \eta_X$ . Similarmente, si  $Y$  es fibrante,  $\varepsilon_Y \circ F(p_{UY}) = \varphi^{-1}(p_{UY})$  es una equivalencia débil.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Dada una equivalencia débil  $f : FX \rightarrow Y$  donde  $X$  es cofibrante e  $Y$  es fibrante,  $\varphi(f) = Uf \circ \eta_X$ . Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & UFX & \xrightarrow{Uf} & UY \\ \text{Id}_X \downarrow & & U(i_{FX}) \downarrow & & \downarrow U(i_Y) \\ X & \longrightarrow & URFX & \xrightarrow{URf} & URY \end{array}$$

Como  $f$  es una equivalencia débil,  $Rf$  también lo es (ver demostración de 3.1.32). Como  $U$  preserva equivalencias débiles entre objetos fibrantes,  $URf$  es una equivalencia débil. Entonces  $URf \circ U(i_{FX}) \circ \eta$  es una equivalencia débil. Y como

$$URf \circ U(i_{FX}) \circ \eta = Ui_Y \circ (UF \circ \eta_X)$$

y  $Ui_Y$  es una equivalencia débil (pues  $U$  preserva equivalencias débiles entre objetos fibrantes) se tiene que  $UF \circ \eta_X = \varphi(f)$  es una equivalencia débil.

Similarmente, si  $\varphi(f) : X \rightarrow UY$  es una equivalencia débil, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} FQX & \xrightarrow{FQ(\varphi(f))} & FQUY & \longrightarrow & Y \\ F(i_X) \downarrow & & FI_{UY} \downarrow & & \downarrow \text{Id}_Y \\ FX & \xrightarrow{F(\varphi(f))} & FUY & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \end{array}$$

y como  $\varepsilon_Y \circ F(\varphi(f)) = f$ , con un razonamiento análogo al anterior se tiene que  $f$  es una equivalencia débil.

(b)  $\Leftrightarrow$  (c) De lo hecho en la demostración de 3.4.8 y con las notaciones allí usadas, se deduce que

$$(\gamma(i_{FQX}))^b \gamma(p_X)^{-1} : X \rightarrow URFQ(X)$$

es el morfismo de adjunción de  $LF$  a  $LU$ . Por lo tanto será un isomorfismo si y sólo si  $(\gamma(i_{FQX}))^b = \gamma((i_{FQX})^b)$  lo es. Pero por 3.5.5, esto ocurre si y sólo si  $(i_{FQX})^b$  es una equivalencia débil. Ahora bien,

$$(i_{FQX})^b = \varphi^{-1}(i_{FQX}) = U(i_{FQX}) \circ \eta_{QX}$$

Por lo tanto tenemos que  $L(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de categorías si y sólo si  $U(i_{FQX}) \circ \eta_{QX}$  es una equivalencia débil para todo objeto  $X$ . Veamos que esto último es equivalente a que  $U(i_{FX}) \circ \eta_X$  sea una equivalencia débil para todo objeto fibrante  $X$ . Pero esto es claro, ya que la primera implicación vale pues si  $X$  es cofibrante entonces  $QX = X$ , mientras que la recíproca es trivial.

Análogamente, el morfismo de adjunción de  $LU$  a  $LF$  es un isomorfismo si y sólo si  $\varepsilon_Y \circ F(p_{UY})$  es una equivalencia débil para todo objeto fibrante  $Y$ .  $\square$

**Corolario 3.6.10.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de modelos cerradas y sean  $(F, U, \varphi)$  y  $(F, U', \varphi')$  adjunciones de Quillen de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$ . Entonces  $(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de Quillen si y sólo si  $(F, U', \varphi')$  lo es.

Dualmente, si  $(F', U, \varphi'')$  es otra adjunción de Quillen, entonces  $(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de Quillen si y sólo si  $(F', U, \varphi'')$  lo es

*Demostración.* La adjunción  $(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de Quillen si y sólo si la adjunción derivada  $L(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de categorías. Pero esto último vale si y sólo si  $LF$  es una equivalencia de categorías, ya que, en este caso, su adjunto a derecha  $RU$  también será una equivalencia de categorías.  $\square$

**Proposición 3.6.11.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de modelos cerradas y sea  $(F, U, \varphi)$  una adjunción de Quillen. Son equivalentes

- a)  $(F, U, \varphi)$  es una adjunción de Quillen.
- b) Para todo objeto fibrante  $Y$  el morfismo  $\varepsilon_Y \circ F(p_{UY}) : FQ_{UY} \rightarrow Y$  es una equivalencia débil y el funtor  $F$  tiene la siguiente propiedad. Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de  $\mathcal{C}$  entre objetos cofibrantes tal que  $F(f)$  es una equivalencia débil, entonces  $f$  también lo es.
- c) Para todo objeto cofibrante  $X$  el morfismo  $U(i_{FX}) \circ \eta_X : X \rightarrow URF_X$  es una equivalencia débil y el funtor  $U$  tiene la siguiente propiedad. Si  $g : X \rightarrow Y$  es un morfismo de  $\mathcal{D}$  entre objetos fibrantes tal que  $U(g)$  es una equivalencia débil, entonces  $g$  también lo es.

*Demostración.* Supongamos primero que  $(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de Quillen. Vimos en 3.6.9 que  $U(i_{FX}) \circ \eta_X$  es una equivalencia débil para todo objeto cofibrante  $X$  y que  $\varepsilon_Y \circ F(p_{UY})$  es una equivalencia débil para todo objeto fibrante  $Y$ .

Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de  $\mathcal{C}$  entre objetos cofibrantes tal que  $F(f)$  es una equivalencia débil. Luego como  $FQ(f) = F(f)$  y el funtor  $LF : \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{D}$  está inducido por  $FQ$  se tiene que  $LF(\gamma(f))$  es un isomorfismo en  $\text{Ho}\mathcal{D}$ . Por lo tanto, como  $LF$  es una equivalencia de categorías se tiene que  $\gamma(f)$  es un isomorfismo en  $\text{Ho}\mathcal{C}$ . Luego,  $f$  es una equivalencia débil.

Dualmente,  $U$  tiene la propiedad del item (c). Por lo tanto hemos probado que (a) implica (b) y (c).

Veamos que (b) implica (a). Para ello probaremos que  $L(F, U, \varphi)$  es una equivalencia de categorías. Por hipótesis y por lo visto en la demostración de 3.6.9, tenemos que el morfismo de adjunción de  $RU$  a  $LF$ ,  $\Phi_X : (LF)(RU)X \rightarrow X$  es un isomorfismo. Debemos ver que el morfismo de adjunción de  $LF$  a  $RU$ ,  $\Psi_X : X \rightarrow (RU)(LF)X$  es un isomorfismo. Pero  $LF(\Psi_X)$  es la inversa de  $\Phi_{LF X}$  (ver 2.1.7) y luego es un isomorfismo.

Ahora bien, vimos que  $\Psi_X = \gamma((i_{FQX})^b)\gamma(p_X)^{-1}$ . Como  $LF(\Psi_X)$  es un isomorfismo, entonces  $LF(\gamma((i_{FQX})^b))$  es un isomorfismo. Luego,  $FQ((i_{FQX})^b)$  es una equivalencia débil. Como  $F$  tiene la propiedad del item (b), se tiene que  $Q((i_{FQX})^b)$  es una equivalencia débil. Entonces  $(i_{FQX})^b$  es una equivalencia débil. Por lo tanto,  $\Psi_X$  es un isomorfismo.

Análogamente se prueba que (c) implica (a).  $\square$

## Capítulo 4

# *Top* como categoría de modelos cerrada

En este capítulo probaremos que la categoría de espacios topológicos con

- Fib = fibraciones de Serre
- WE = equivalencias homotópicas débiles
- Cof = funciones que tienen la LLP respecto de las funciones que son, a la vez, fibraciones de Serre y equivalencias homotópicas débiles

es una categoría de modelos cerrada.

Una demostración de este resultado se encuentra en [10]. En realidad, Quillen prueba algo más fuerte. Él demuestra que *Top*, con la estructura anterior, es una categoría de modelos simplicial cerrada, para lo cual desarrolla el tema de categorías simpliciales y categorías de modelos simpliciales.

Otra demostración puede leerse en [5]. Hovey define categorías de modelos pidiendo que admitan límites pequeños (en lugar de finitos), que sean cerradas y que las factorizaciones del axioma M2 sean funtoriales. Para probar este resultado, Hovey desarrolla toda una maquinaria extra que le sirve, además, para probar que las categorías de módulos sobre un anillo de Frobenius, de complejos de cadena sobre un anillo y de complejos de cocadena sobre un álgebra de Hopf, son también categorías de modelos cerradas. En consecuencia, la demostración específica para espacios topológicos queda un tanto desdibujada. Hacemos notar que Hovey prueba el resultado probado por nosotros en 1.5.6 (cuya demostración Quillen omite), pero, a nuestro entender, la demostración aquí expuesta es notablemente más sencilla que la hecha por Hovey.

Es por todo esto que hemos decidido hacer una demostración alternativa de que *Top* es categoría de modelos, basándonos en las ideas de Quillen, pero adaptándolas al caso de categorías de modelos cerradas, sin pasar por categorías simpliciales. Para nuestra demostración necesitamos algunos resultados de espacios topológicos. Los resultados 1.5.4, 1.5.6 y las dos primeras proposiciones de la sección siguiente constituyen la parte más importante de la demostración.

## 4.1. El argumento del objeto pequeño

**Proposición 4.1.1.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $f$  puede factorizarse como  $f = pi$  donde  $i \in \text{Cof}$  y  $p \in \text{Fib} \cap \text{WE}$ .

*Demostración.* Dada  $f : X \rightarrow Y$ , construimos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{j_0} & Z^0 & \xrightarrow{j_1} & Z^1 & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow f & \downarrow p_0 & \nearrow p_1 & & & \\ & & Y & & & & \end{array}$$

como sigue. Llamamos  $Z^{-1} = X$  y  $p_{-1} = f$ . Supongamos tenemos construido  $Z^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  y consideremos el conjunto  $\mathcal{D}_n$  de todos los diagramas conmutativos  $d$  de la forma

$$\begin{array}{ccc} S^{q_d-1} & \xrightarrow{\alpha_d} & Z^{n-1} \\ \text{inc}_d \downarrow & & \downarrow p_{n-1} \\ D^{q_d} & \xrightarrow{\beta_d} & Y \end{array}$$

con  $q_d \geq 0$  para todo diagrama  $d \in \mathcal{D}_n$ . Notemos que efectivamente es un conjunto pues  $q_d \in \mathbb{N}_0$  y las funciones entre dos espacios topológicos cualesquiera forman un conjunto. Definimos  $Z^n$  y  $j_n : Z^{n-1} \rightarrow Z^n$  por el pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{d \in \mathcal{D}_n} S^{q_d-1} & \xrightarrow{\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \alpha_d} & Z^{n-1} \\ \bigvee_{d \in \mathcal{D}_n} \text{inc}_d \downarrow & & \downarrow \text{in}_1 = j_n \\ \coprod_{d \in \mathcal{D}_n} D^{q_d} & \xrightarrow{\text{in}_2} & Z^n \end{array}$$

Definimos  $p_n : Z^n \rightarrow Y$  como el único morfismo que cumple  $p_n j_n = p_{n-1}$  y  $p_n \text{in}_2 = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \beta_d$

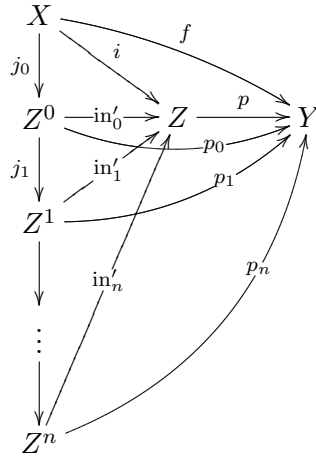
Notemos que existe pues

$$\left( \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \beta_d \right) \circ \left( \bigvee_{d \in \mathcal{D}_n} \text{inc}_d \right) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} (\beta_d \text{inc}_d) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} (p_{n-1} \alpha_d) = p_{n-1} \circ \left( \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \alpha_d \right)$$

Tomamos  $Z$  el colímite del diagrama formado por los  $Z^n$ ,  $n \geq -1$  y los  $j_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Llamamos  $\text{in}'_n : Z^{n-1} \rightarrow Z$  a los morfismos dados por la existencia del colímite  $Z$  y



tomamos  $i = \text{in}'_{-1}$ .



Y como  $p_n j_n = p_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}_0$ , existe  $p$  que hace que el diagrama anterior commute. En particular, tenemos que  $f = p_i$ .

Ahora bien, por 1.5.6,  $\bigvee_{d \in \mathcal{D}_n} \text{inc}_d$  tiene la LLP respecto de las fibraciones triviales para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , y como  $j_n$  es la extensión de base del morfismo anterior, por 1.4.18, se tiene que  $j_n$  también tiene la LLP respecto de las fibraciones triviales. Veamos que  $i$  también cumple esto. Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p' \\ Z & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

donde  $p'$  es una fibración trivial. Probaremos por inducción en  $n$  que para todo  $n \in \mathbb{N}_0$  existe  $\phi_n : Z^n \rightarrow E$  tal que  $\phi_0 j_0 = g$ ,  $\phi_n j_n = \phi_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$  y  $p \phi_n = h \text{in}'_n \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

Para el caso  $n = 0$  consideramos el diagrama conmutativo de flechas sólidas

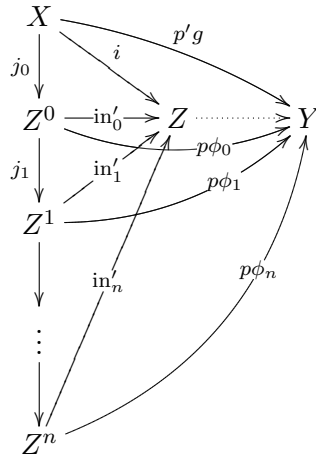
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & E \\ j_0 \downarrow & \nearrow \phi_0 & \downarrow p' \\ Z^0 & \xrightarrow{h \text{in}'_0} & B \end{array}$$

Como  $j_0$  tiene la LLP respecto de las fibraciones triviales y  $p'$  es fibración trivial, existe  $\phi_0 : Z^0 \rightarrow E$  tal que  $\phi_0 j_0 = g$  y  $p' \phi_0 = h \text{in}'_0$ . Supongamos ahora que tenemos construida  $\phi_{n-1}$ . Consideramos el diagrama conmutativo de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccc} Z^{n-1} & \xrightarrow{\phi_{n-1}} & E \\ j_{n-1} \downarrow & \nearrow \phi_n & \downarrow p' \\ Z^n & \xrightarrow{h \text{in}'_n} & B \end{array}$$

Como  $j_{n-1}$  tiene la LLP respecto de las fibraciones triviales, existe  $\phi_n : Z^n \rightarrow E$  tal que  $\phi_n j_{n-1} = \phi_{n-1}$  y  $p'\phi_n = h \text{in}'_n$ . Así queda probado el paso inductivo.

Ahora bien, como  $\phi_n j_{n-1} = \phi_{n-1}$  y  $Z$  era el colímite de los  $Z^n$ , existe  $\phi : Z \rightarrow E$  tal que  $\phi i = g$  y  $\phi \text{in}'_n = \phi_n \forall n \in \mathbb{N}_0$ . Luego, se tiene que  $p'\phi \text{in}'_n = p'\phi_n = h \text{in}'_n \forall n \in \mathbb{N}_0$  y  $p'\phi i = p'g = hi$ , es decir,  $p'\phi$  y  $h$  sirven como flechas punteadas para que el siguiente diagrama conmute



y por lo tanto  $p'\phi = h$  y así  $\phi$  es el levantado buscado. Por lo tanto  $i$  tiene la LLP respecto de las fibraciones triviales, luego  $i \in \text{Cof}$ .

Resta ver que  $p$  es una fibrición trivial. Para ello probaremos primero que si  $K$  es un compacto de  $Z$  entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset Z^m$ . Supongamos que no, entonces para todo  $j \in \mathbb{N}$  existen  $m_j \in \mathbb{N}$  con  $m_{j+1} \geq m_j \forall j$  y  $k_j \in (Z^{m_j} - Z^{m_{j-1}}) \cap K$ . Llamemos  $T = \{k_j / j \in \mathbb{N}\}$ . Claramente  $T$  es un conjunto infinito. Sea  $T' \subset T$ . Entonces  $T' \cap Z^n$  es finito para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora bien, como los  $Z^n$  fueron construidos a partir de los  $Z^{n-1}$  'pegando'  $n$ -celdas y los puntos  $k_j$  están en los interiores de dichas celdas, entonces  $\{k_j\}$  es cerrado en  $Z^n$  para todo  $j$  (y eventualmente podría ser vacío). Notar que lo importante es que los puntos  $k_j$  no estén en  $X$  pues no tenemos hipótesis sobre  $X$  (como por ejemplo  $T_1$  o Hausdorff). Luego,  $T' \cap Z^n$  es cerrado en  $Z^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por ser  $Z$  el colímite de los  $Z^n$  tiene la topología final respecto de las inclusiones  $Z^n \hookrightarrow Z$  y luego  $T'$  es cerrado en  $Z$ . Como esto vale para cualquier  $T' \subset T$  entonces  $T$  es discreto en  $Z$ . Además,  $T$  es cerrado (en lo anterior tomar  $T' = T$ ) y  $T \subset K$ . Luego  $T$  es compacto, pero  $T$  era discreto, luego  $T$  es finito, contradicción.

Veamos ahora que  $p$  es fibrición trivial. Por 1.5.6 basta ver que tiene la RLP respecto de las inclusiones  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ . Consideremos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & Z \\ \text{inc} \downarrow & & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Como  $S^{n-1}$  es compacto,  $\alpha(S^{n-1})$  también lo es, luego, por lo visto antes, existe  $m \in \mathbb{N}$

tal que  $\alpha(S^{n-1}) \subset Z^m$ . Por lo tanto tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & Z^m \\ \text{inc} \downarrow & & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

y entonces, por la construcción de  $Z^{m+1}$ ,  $\alpha$  es alguno de los  $\alpha_d$ ,  $d \in \mathcal{D}_{m+1}$ , más precisamente si llamamos  $d_0$  al diagrama anterior entonces  $\alpha_{d_0} = \alpha$ . Tomamos  $\varphi$  la ‘coordenada’  $d_0$  de  $\text{inc}_2$  (vista como  $\varphi : D^n \rightarrow Z$ ). Luego, mirando la coordenada  $d_0$  en el pushout de la definición de  $Z^{m+1}$  se obtiene que  $\varphi \text{inc} = \alpha$ . Por otra parte, teníamos que  $p_{m+1} \text{inc}_2 = \sum_{d \in \mathcal{D}_{m+1}} \beta_d$ , luego mirando la coordenada correspondiente a  $d_0$  queda  $p_{m+1} \varphi = \beta_{d_0} = \beta$ , y entonces, como  $p_{m+1}$  es la restricción de  $p$  a  $Z^{m+1}$  se obtiene  $p\varphi = \beta$ . Así,  $\varphi$  es el levantado buscado y  $p$  es una fibración trivial.  $\square$

**Observación importante 4.1.2.** El argumento utilizado en la demostración anterior se conoce con el nombre de small object argument (argumento del objeto pequeño) y es muy utilizado. Puede usarse para probar la factorización cuando las fibraciones (o fibraciones triviales) están caracterizadas por tener la RLP respecto de cierta clase de morfismos  $\{A_i \rightarrow B_i\}$  donde los  $A_i$  son cumplen que  $\text{Hom}(A_i, -)$  conmuta con colímites de la forma de los del resultado anterior.

Para probar las factorizaciones de M2 necesitamos el siguiente lema que es el dual de la factorización vía el cilindro de  $f$  (ver [7], pág 42,43)

**Lema 4.1.3.** Sean  $A$  y  $B$  espacios topológicos y  $f : A \rightarrow B$  una función continua. Entonces  $f$  se factoriza como  $f = pj$  con  $p$  fibración y  $j$  retracts por deformación fuerte.

*Demostración.* Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & A \\ & \searrow j & & \nearrow id_A & \\ & & A \times_B B^I & \xrightarrow{pr_1} & A \\ & \searrow \tilde{f} & \downarrow pr_2 & \text{pull} & \downarrow f \\ & & B^I & \xrightarrow{d_0} & B \end{array}$$

donde  $d_0(\alpha) = \alpha(0)$ ,  $\tilde{f}(a)(t) = f(a)$  y  $j$  queda definida por  $j(a) = (a, c_{f(a)})$ , donde  $c_{f(a)}$  es el camino constante  $f(a)$ . Recordar que, por construcción de los pullbacks en  $\mathcal{Top}$  tenemos que

$$A \times_B B^I = \{(a, \alpha) \text{ tales que } a \in A \text{ y } \alpha \text{ es un camino en } B \text{ con } \alpha(0) = f(a)\}$$

Si  $(a, \alpha) \in A \times_B B^I$  entonces  $j\text{pr}_1(a, \alpha) = j(a) = (a, c_{f(a)})$  y como  $\text{pr}_1 j = \text{Id}_A$  es fácil ver que  $j$  es un retracto por deformación fuerte. En efecto, tenemos

$$H : (A \times_B B^I) \times I \longrightarrow A \times_B B^I$$

definida por  $H((a, \alpha), t) = (a, \alpha_t)$  donde  $\alpha_t$  es el camino en  $B$  definido por  $\alpha_t(s) = \alpha(ts)$ .  $H$  es una homotopía entre  $j\text{pr}_1$  y  $\text{Id}_{A \times_B B^I}$  relativa a  $j(A)$ .

Llamamos  $p = d_1\text{pr}_2$ . Se tiene que  $pj(a) = d_1\text{pr}_2(a, c_{f(a)}) = f(a)$ . Así,  $f = pj$ .

Veamos que  $p$  es una fibración. Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(g_1, g_2)} & A \times_B B^I \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Buscamos un levantado  $k : X \times I \rightarrow A \times_B B^I$  tal que  $pk = h$  y  $ki_0 = (g_1, g_2)$ . Hallemos primero  $H' : X \times I \rightarrow B^I$  que haga conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_2} & B^I \\ i_0 \downarrow & \nearrow H' & \downarrow d_1 \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Basta definir

$$H'(x, t)(s) = \begin{cases} g_2(x, \frac{s}{1-\frac{t}{2}}) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 - \frac{t}{2} \\ h(x, t - (2 - 2s)) & \text{si } 1 - \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Ahora bien,  $d_0 H'(x, t) = H'(x, t)(0) = g_2(x, 0) = f g_1(x)$ . Si definimos  $G_1 : X \times I \rightarrow A$  por  $G_1(x, t) = g_1(x)$ , se tiene  $d_0 H' = f G_1$ . Por lo tanto, existe  $k$  que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X \times I & & & & \\ & \searrow k & & \searrow G_1 & \\ & & A \times_B B^I & \xrightarrow{\text{pr}_1} & A \\ & \searrow H' & \downarrow \text{pr}_2 & \text{pull} & \downarrow f \\ & & B^I & \xrightarrow{d_0} & B \end{array}$$

Se tiene

$$pk(x, t) = d_1\text{pr}_2 k(x, t) = d_1 H'(x, t) = H'(x, t)(1) = h(x, t)$$

y, además,  $\text{pr}_1 k i_0 = G_1 i_0 = g_1$  y  $\text{pr}_2 k i_0 = H' i_0 = g_2$ . Luego  $ki_0 = (g_1, g_2)$ . Así,  $k$  es el levantado buscado y  $p$  es fibración.  $\square$

**Lema 4.1.4.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos,  $p : X \rightarrow Y$  una fibración de Serre y  $X \times_Y Y^I$  el pullback

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y^I & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X \\ \text{pr}_2 \downarrow & \text{pull} & \downarrow p \\ Y^I & \xrightarrow{d_0^X} & Y \end{array}$$

entonces  $(d_0^X, p^I) : X^I \rightarrow X \times_Y Y^I$  es una fibración de Serre.

*Demostración.* Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{f} & X^I \\ i_0 \downarrow & & \downarrow (d_0^X, p^I) \\ D^n \times I & \xrightarrow{h_1, h_2} & X \times_Y Y^I \end{array}$$

Entonces se tiene que  $d_0^X f = h_1 i_0$ ,  $p^I f = h_2 i_0$  y  $ph_1 = d_0^Y h_2$  (esto último vale porque  $ph_1 = p \text{pr}_1(h_1, h_2) = d_0^Y \text{pr}_2(h_1, h_2) = d_0^Y h_2$ ). Por lo tanto, llamando  $h'_2 : D^n \times I \times I \rightarrow Y$  y  $f' : D^n \times I \rightarrow X$  a las funciones que se obtienen respectivamente de  $h_2$  y  $f_2$  aplicando la ley exponencial, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (D^n \times I \times \{0\}) \cup (D^n \times \{0\} \times I) & \xrightarrow{h_1 \cup f'} & X \\ \text{inc} \downarrow & & \downarrow p \\ D^n \times I \times I & \xrightarrow{h'_2} & Y \end{array}$$

Y como  $p$  es fibración de Serre y hay homeomorfismo de pares topológicos

$$\begin{aligned} (D^n \times I \times I, (D^n \times I \times \{0\}) \cup (D^n \times \{0\} \times I)) &\simeq (D^n \times I \times I, D^n \times I \times \{0\}) \simeq \\ &\simeq (D^{n+1} \times I, D^{n+1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

existe un levantado  $k' : D^n \times I \times I \rightarrow X$  tal que  $pk' = h'_2$  y  $k' \text{inc} = h_1 \cup f'$ . Luego, por la ley exponencial obtenemos  $k : D^n \times I \rightarrow X^I$  y se tiene

$$\begin{aligned} ki_0(x)(s) &= k(x, 0)(s) = k'(x, 0, s) = f(x, s) \\ d_0^X k(x, t) &= k(x, t)(0) = k'(x, t, 0) = h_1 \\ (p^I k)(x, t)(s) &= p(k(x, t)(s)) = pk'(x, t, s) = h'_2(x, t, s) = h_2(x, t)(s) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(d_0^X, p^I)$  es una fibración de Serre.  $\square$

**Proposición 4.1.5.** Sean  $A$  y  $B$  espacios topológicos e  $i : A \rightarrow B$  una función continua. Son equivalentes:

i)  $i$  es una cofibración trivial.

ii)  $i$  tiene la LLP respecto de la fibriciones.

iii)  $i$  es una cofibración y un retracto por deformación fuerte.

*Demostración.* (i) $\Rightarrow$ (iii) Consideremos la siguiente factorización de  $i$

$$A \xrightarrow{j} A \times_B B^I \xrightarrow{p} B$$

dada por 4.1.3 Como  $j$  es un retracto por deformación fuerte, entonces es una equivalencia (homotópica) débil, y como  $i$  también lo es y  $pj = i$  resulta que  $p$  es una fibrición trivial. Como  $i \in \text{Cof}$ , por definición, existe un levantado  $u$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & A \times_B B^I \\ i \downarrow & \nearrow u & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\text{Id}_B} & B \end{array}$$

Luego  $i$  es un retracto de  $j$  y así  $i$  es un retracto por deformación fuerte. En efecto, si  $r' : A \times_B B^I \rightarrow A$  es tal que  $r'j = \text{Id}_A$  y  $h' : jr' \simeq \text{Id}_{A \times_B B^I}$ , entonces tomamos  $r = r'u$  y  $h = p'h'u$  y se obtiene  $ri = \text{Id}_A$  y  $h : jr \simeq \text{Id}_B$ .

(iii) $\Rightarrow$ (i) Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Toda fibrición trivial es una fibrición, entonces  $i \in \text{Cof}$ , por definición. Por otra parte, vimos en 3.1.8 que en  $\text{Top}$  todo objeto es fibrante, entonces, por hipótesis, existe  $r$  que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{Id}_A} & A \\ i \downarrow & \nearrow r & \downarrow \\ B & \longrightarrow & * \end{array}$$

Veamos que si  $d_0, d_1 : B^I \rightarrow B$  están definidas por  $d_0(\alpha) = \alpha(0)$  y  $d_1(\alpha) = \alpha(1)$  entonces  $(d_0, d_1) : B^I \rightarrow B \times B$  es una fibrición de Serre. Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{f} & B^I \\ i_0 \downarrow & & \downarrow (d_0, d_1) \\ D^n \times I & \xrightarrow{(h_0, h_1)} & B \times B \end{array}$$

Definimos  $H : D^n \times I \rightarrow B^I$  por

$$H(x, t)(s) = \begin{cases} h_0(x, t - 4s) & \text{si } s \leq \frac{t}{4} \\ f(x)\left(\frac{s - \frac{t}{4}}{1 - \frac{t}{2}}\right) & \text{si } \frac{t}{4} \leq s \leq 1 - \frac{t}{4} \\ h_1(x, t - (4 - 4s)) & \text{si } s \geq 1 - \frac{t}{4} \end{cases}$$

Resulta que  $H$  está bien definida, es continua y es el levantado buscado. Así  $(d_0, d_1)$  es fibración de Serre. Por lo tanto, por hipótesis, existe  $k$  que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{si} & A \\ i \downarrow & \nearrow k & \downarrow (d_0, d_1) \\ B & \xrightarrow{(ir, Id_B)} & B \times B \end{array}$$

(donde  $s : B \rightarrow B^I$  está definida por  $s(b)(t) = b$ ). Luego,  $ri = Id_A$  y  $k : ir \simeq Id_B \text{ rel}(i(A))$  ( $k$  es una homotopía a derecha, pero usando ley exponencial obtengo una homotopía usual). Por lo tanto  $i$  es un retracts por deformación fuerte.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sea  $p : X \rightarrow Y$  una fibración y supongamos tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Como  $i$  es un retracts por deformación fuerte, existen  $r : B \rightarrow A$  y  $h : B \rightarrow B^I$  a tales que  $ri = Id_A$  y  $h : ir \simeq Id_B \text{ rel}(i(A))$ . Por el lema anterior,  $(d_0, p^I) : X^I \rightarrow X \times_Y Y^I$  es una fibración de Serre, luego, como  $i \in \text{Cof}$  y

$$\begin{aligned} (d_0, p^I)s^X \alpha &= (d_0 s^X \alpha, p^I s^X \alpha) = (\alpha, s^Y p \alpha) = (\alpha, s^Y \beta i) = (\alpha, \beta^I s^B i) = (\alpha r i, \beta^I h i) = \\ &= (\alpha r, \beta^I h) i \end{aligned}$$

existe  $H$  que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s\alpha} & X^I \\ i \downarrow & \nearrow H & \downarrow (d_0, p^I) \\ B & \xrightarrow{(\alpha r, \beta^I h)} & X \times_Y Y^I \end{array}$$

Sea  $u = d_1^X H$ . Se tiene

$$pu = pd_1^X H = d_1^Y p^I H = d_1^Y \beta^I h = \beta d_1^X h = \beta$$

y

$$ui = d_1^X H i = d_1^X s \alpha = \alpha$$

Por lo tanto  $u$  es el levantado buscado y así  $i$  tiene la LLP respecto de las fibraciones.  $\square$

## 4.2. Los espacios topológicos como categoría de modelos cerrada

**Teorema 4.2.1.** *La categoría de espacios topológicos con*

- Fib* = fibriciones de Serre
- WE* = equivalencias homotópicas débiles
- Cof* = funciones que tienen la LLP respecto de las funciones que son, a la vez, fibriciones de Serre y equivalencias homotópicas débiles,

*es una categoría de modelos cerrada.*

*Demostración.* Por la observación 3.5.3, sabemos que basta probar M0, M2, M5 y M6.

M0 es un resultado conocido.

M5 es trivial.

Veamos M2. Por 4.1.1 tenemos una de las factorizaciones. Para ver la otra, dada  $f : X \rightarrow Y$ , la factorizamos como

$$X \xrightarrow{j} X \times_Y Y^I \xrightarrow{p} B$$

donde  $p$  es una fibrición y  $j$  es una equivalencia débil. Ahora, por 4.1.1, factorizamos  $j = qi$  con  $i$  cofibración y  $q$  fibrición trivial. Por M5,  $i$  es una equivalencia débil, y luego  $f = (pq)i$  es la factorización buscada.

Veamos M6. La primera parte del ítem (a) se deduce de 4.1.5 pues las cofibraciones triviales tienen LLP respecto de las fibriciones. Para ver la recíproca, supongamos que  $p$  tiene la RLP respecto de las cofibraciones triviales. Como  $i_0 : D^n \rightarrow D^n \times I$  tiene la LLP respecto de las fibriciones de Serre, por 4.1.5 es una cofibración trivial. Por lo tanto  $p$  tiene la RLP respecto de  $i_0 : D^n \rightarrow D^n \times I$  y entonces es una fibrición de Serre.

El ítem (b) es trivial por definición de Cof.

Para ver la primera implicación del ítem (c), supongamos que tenemos  $f$  equivalencia (homotópica) débil. Por M2, factorizamos  $f = pi$  con  $i$  cofibración y  $p$  fibrición trivial. Por M5,  $i$  es una equivalencia débil. Luego por 4.1.5,  $i$  tiene la LLP respecto de las fibriciones y como  $p$  es fibrición trivial,  $p$  tiene la RLP respecto de las cofibraciones (por definición de Cof). Recíprocamente, supongamos  $f = uv$ , con  $v$  que tiene la LLP respecto de las fibriciones y  $u$  que tiene la RLP respecto de las cofibraciones. Por 4.1.5,  $v$  es cofibración trivial. Por otra parte, por 1.5.6 las inclusiones  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  tienen la LLP respecto de las fibriciones triviales, y luego son cofibraciones (por definición de Cof). Por lo tanto,  $u$  tiene la RLP respecto de  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ , y entonces, nuevamente por 1.5.6, se tiene que es fibrición trivial. Así,  $f$  es equivalencia (homotópica) débil.  $\square$



# Bibliografía

- [1] H-J Baues. *Algebraic Homotopy*. Cambridge studies in advanced mathematics. 15. Cambridge University Press. (1989)
- [2] B. Dwyer, P. Hirschhorn, D. Kan, J. Smith. *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*. Preprint (2004).
- [3] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Springer. (1967)
- [4] D. Hatcher. *Algebraic Topology*. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 43. Springer. (2001)
- [5] M. Hovey. *Model Categories*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society (1998).
- [6] D. Kan. *On homotopy theory and C.S.S. groups*. Ann. of Math. 68, 38-53 (1958)
- [7] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. University of Chicago Press. (1999)
- [8] G. Minian. *Generalized cofibration categories and global actions*. K-Theory 20 (2000) 37-95.
- [9] K. Kamps, T. Porter. *Abstract homotopy and simple homotopy theory*. World Scientific. (1997)
- [10] D. Quillen. *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 43. Springer. (1967)
- [11] D. Quillen. *Rational homotopy theory*. Ann. of Math. (2) 90 (1969), 205-295.
- [12] E. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer. (1966)
- [13] R. Switzer. *Algebraic Topology - Homotopy and homology*. Springer. (1975)
- [14] R. Thomason. *Cat as a closed model category*. Cahiers Topologie Geom.Differentielle XXI, 305-324 (1980).
- [15] A. Tonks. *Álgebra homotópica*. Departamento de matemática de la FCEyN - UBA. Cursos y seminarios. Fascículo 42. (1999)
- [16] J.-L. Verdier. *Categories dérivées*. SGA 4 1/2. LNM 569 (1977) 262-311.

- [17] C. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press (1994).
- [18] J. H. C. Whitehead. *Combinatorial homotopy I, II*. Bull. Amer. Math. Soc. 55, 213-245, 453-496 (1949)