DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

AGOSTO
2006

TESIS DE LICENCIATURA

REVESTIMIENTOS CATEGÓRICOS, SIMPLICIALES Y TOPOLOGÍAS DE GROTHENDIECK

NICOLÁS OJEDA BÄR

DIRECTOR GABRIEL MINIAN

Para Cecilia

Índice general

Introducción

La teoría de revestimientos es uno de los pilares de la topología. Más aún, las ideas subyacentes a esta teoría fueron fundamentales para el desarollo posterior de gran parte de la matemática. Junto con la teoría de cuerpos de Galois, ésta representa un ideal de refinamiento, elegancia y resolución que sirve de modelo para desarrollos más modernos.

En los años '60, J. Milnor [Mil65] introdujo la noción de espacio clasificante BG de un grupo topológico G. Este es un espacio topológico que "clasifica" fibrados con grupo de estructura G. Esta construcción no sólo permite estudiar la topología de los espacios fibrados, sino que también otorga un *modelo topológico* del grupo G y, de esta manera, abre las puertas a la aplicación de técnicas topológicas al estudio de fenómenos algebraicos de la teoría de grupos.

Posteriormente, G. Segal [Se68] contribuyó a que estas ideas se extendieran tremendamente a otras áreas de la matemática observando que la construcción de Milnor podía llevarse a cabo para cualquier categoría. De esta manera, dada una categoría C, se obtiene un espacio topológico $B\mathsf{C}$ (su "espacio clasificante"). Cuando el espacio $B\mathsf{C}$ es un espacio topológico conocido, puede considerarse que la categoría C es un modelo "discreto," más manejable algebraicamente que el espacio original. Esta forma de pensar también sirve en el sentido opuesto. El espacio $B\mathsf{C}$ permite estudiar la categoría C utilizando métodos topológicos. Siguiendo con esta filosofía, se obtiene un lenguaje, herramientas y muchos resultados interesantes en teoría de categorías a partir de los análogos topológicos. Un ejemplo espectacular de esta manera de pensasr es la definición de Quillen [Qu73] de los grupos superiores de K-teoría algebraica.

Con el objetivo de comprender a fondo estas construcciones es natural querer demostrar y expresar estos resultados algebraicos utilizando métodos y estructuras algebraicas, sin tener que pasar por la topología. Esta tesis se orienta en este sentido en lo relativo a la teoría de revestimientos.

La teoría de revestimientos se presta bien a la generalización categórica ya que su esencia es la propiedad universal de levantamiento de caminos. Tomando esta propiedad como punto de partida, se hace necesario precisar la noción de "camino" en una categoría. Esta necesidad lleva inmediatamente a considerar la generalización de uno de los invariantes topológicos más importantes al contexto categórico: el grupoide fundamental. Este invariante será clave, igual que en el caso topológico, para clasificar los revestimientos de una categoría.

Es natural querer comparar las construcciones y resultados obtenidos con los correspondientes en el caso topológico clásico. El puente que permite pasar de las categorías a los espacios topológicos es la noción de conjunto simplicial y los funtores de "categorización" y "realización geométrica." Utilizando éstos y algunos resultados de [GZ67], se obtienen relaciones precisas entre las nociones de revestimiento en tres contextos: el categórico, el simplicial y el topológico.

Todo el desarollo anterior se hace partiendo de la caracterización universal o *global* de revestimiento en un espacio topológico. Pero la caracterización usual de revestimiento topológico no es global, sino local: un revestimiento es una función continua que es localmente una proyección con fibra discreta. La noción de "entorno" (esencial para formular construcciones "locales") fue generalizada de muchas maneras al contexto categórico. Tal vez la generalización que encontró más aplicaciones fue la definición de Grothendieck [SGA4], que introdujo sus *topologías* con el objetivo de formular la definición de *haz* de la geometría algebraica en cualquier categoría. Proponemos aquí una definición de revestimiento entre categorías munidas de topologías de Grothendieck que busca generalizar la definición local de revestimiento topológico y que abarca también la noción universal de revestimiento categórico.

Organización La tesis está organizada de la siguiente manera. En el primer capítulo se recuerdan algunas nociones básicas de la teoría de categorías que se utilizarán a lo largo de toda la tesis.

En el segundo capítulo, se expone una teoría de revestimientos para categorías. En este contexto, los espacios topológicos son reemplazados por categorías y las funciones continuas por funtores. Entre otras cosas, se lleva a cabo en el contexto categórico una secuencia análoga a la que puede encontrarse en los libros de topología algebraica: se define el grupoide fundamental de una categoría, se estudia el levantamiento de caminos y se clasifican los revestimientos en términos del grupoide fundamental de las categorías involucradas. Este desarollo, en el caso particular de un grupoide, puede encontrarse en [May99, Br88].

En el tercer capítulo, se exponen las definiciones y resultados básicos de la teoría de conjuntos y revestimientos simpliciales y se utilizan para relacionar el desarollo categórico anterior con la teoría topológica clásica.

Finalmente, en el último capítulo, se recuerda la noción de topología de Grothendieck y se propone una definición de revestimiento entre categorías munidas de una topología más cercana a la definición topológica. Además, se muestra que esta definición generaliza las anteriores.

Agradecimientos Mi comprensión de muchos temas, directa o indirectamente relacionados con los anteriores, se debe en gran parte a conversaciones con varias personas a lo largo de la escritura de esta tesis. En este aspecto le agradezco especialmente a L. Guerberoff, M. del Hoyo, E. Dubuc, N. Sirolli, M. Ottina, L. Lombardi y J. Barmak.

Un especial agradecimiento le debo a G. Minian por dirgir esta tesis, por enseñarme mucho de lo que aprendí y por mostrarme la diferencia entre "lo particular y lo general."

Finalmente, quería agradecer a mi mamá, Nora Bär, y a mi papá, Eduardo Ojeda Ortiz, por haberme dado los medios y la libertad para estudiar matemática.

Nicolás Ojeda Bär
Buenos Aires, Argentina

1 Preliminares categóricos

En este capítulo se recuerdan nociones básicas de la teoría de categorías que se utilizarán a lo largo de toda la tesis, con el objetivo adicional de fijar la notación utilizada. Remarcamos especialmente los últimos resultados de la sección de funtores adjuntos y de la sección sobre el lema de Yoneda que no se encuentran habitualmente en los libros básicos de categorías y que tendrán consecuencias importantes en nuestro estudio de revestimientos.

1.1. Definiciones y ejemplos básicos

Una categoría C consiste en una colección C_0 de *objetos* y para cada par de objetos $a, b \in \mathsf{C}_0$, un *conjunto* de *morfismos* $\mathsf{C}[a, b]$ junto con una operación de *composición*

$$\circ : \mathsf{C}[a, b] \times \mathsf{C}[b, c] \to \mathsf{C}[a, c], \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

tal que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (cuando esta composición esté definida) y tal que para todo objeto $a \in \mathsf{C}_0$, existe $1_a \in \mathsf{C}[a, a]$ tal que $f \circ 1_a = 1_a \circ f = f$ (cuando esta composición esté definida).

Muchas veces vamos a escribir $f : a \to b$ para indicar que $f \in \mathsf{C}[a, b]$ y vamos a decir que $a = \mathrm{dom}(f)$ es el *dominio* de f y que $b = \mathrm{cod}(f)$ es el *codominio* de f. Escribiremos indistintamente fg y $f \circ g$ para indicar la composición de f con g. Además, escribiremos $a \in \mathsf{C}$ para indicar que a es un objeto de la categoría C.

En general, no vamos a prestarle mucha atención a los fundamentos conjuntistas de la noción de categoría. Simplemente vamos a decir que una categoría C es *pequeña* si su colección de objetos C_0 forma un conjunto.

Si C es una categoría, un morfismo $f : a \to b$ en C se llama un *isomorfismo* si existe un morfismo $g : b \to a$ tal que $f \circ g = 1_b$ y $g \circ f = 1_a$. (Esto define a g de forma única y se llama la *inversa* de f.) En este caso decimos que a y b son isomorfos y escribimos $a \simeq b$. Decimos que una categoría G es un *grupoide* si todos sus morfismos son isomorfismos.

Las categorías se relacionan utilizando funtores. Un *funtor* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ entre dos categorías C y D es una asignación de un objeto de $F(c) \in \mathsf{D}$ a cada objeto $c \in \mathsf{C}$ y de un morfismo $F(f) : F(a) \to F(b)$ en D a cada morfismo $f : a \to b$ en C tal que $F(1_a) = 1_{F(a)}$ y $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ (cada vez que esto tenga sentido). Dada cualquier categoría C, se tiene el funtor identidad $1_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ y dados funtores $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, $G : \mathsf{D} \to \mathsf{E}$ puede considerarse el funtor $G \circ F : \mathsf{C} \to \mathsf{E}$ definido de la forma obvia.

Si C es una categoría arbitraria, podemos considerar la *categoría dual* C^{op} que tiene los mismos objetos que C pero donde se invierte la dirección de todos los morfismos y del orden de composición. Es decir, un morfismo $a \to b$ en C^{op} es lo mismo que un morfismo $b \to a$ en C. Abajo se dan algunos de los ejemplos más usuales de categorías.

Ejemplos	**Objetos**	**Morfismos**
Set	conjuntos	funciones de conjuntos
Ord	posets[a]	funciones no decrecientes
Top	espacios topológicos	funciones continuas
$[\mathsf{Top}]$	espacios topológicos	funciones continuas módulo homotopía
Grp	grupos	morfismos de grupos
Ab	grupos abelianos	morfismos de grupos
Cat	categorías pequeñas	funtores
Grpoid	grupoides	funtores
Set^G	G-conjuntos a izquierda	G-morfismos

[a]Un *poset* es un conjunto munido de un orden parcial. Un *orden parcial* es una relación reflexiva y transitiva.

Ejemplo. Sea $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ un funtor y sea $Y \in \mathsf{C}'$ un objeto de C'. Definimos la categoría Y/F de la siguiente manera. Los objetos son pares (X, v) donde $v : Y \to F(X)$ es un morfismo de C'. Un morfismo $(X, v) \to (X', v')$ en Y/F es un morfismo $w : X \to X'$ en C tal que $F(w)v = v'$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & F(X) \arrow[d, "F(w)"] & X \arrow[d, "w"] \\ Y \arrow[r, "v'"] & F(X') & X' \end{tikzcd}$$

Cuando $F = 1_{\mathsf{C}'}$, denotaremos esta categoría por Y/C' (la categoría de *objetos debajo de* Y). Análogamente puede definirse F/X con objetos (X, u) donde $u : F(X) \to Y$ es un morfismo en C' y también la categoría C'/X de *objetos sobre* X. Normalmente denotaremos un objeto $X' \to X$ de C'/X simplemente por X'.

Los funtores se relacionan utilizando *transformaciones naturales.* Dados dos funtores $F, G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, una transformación natural $\eta : F \to G$ es una colección $\eta_c : F(c) \to G(c)$ de morfismos en D indexados por los objetos de C tal que

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "u"'] & F(c) \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(c) \arrow[d, "G(u)"] \\ c' & F(c') \arrow[r, "\eta_{c'}"] & G(c') \end{tikzcd}$$

conmuta para cualquier morfismo $u : c \to c'$ en C. La transformación natural η se dice un *isomorfismo natural* si cada η_c es un isomorfismo (en este caso notamos $F \simeq G$). Para cada funtor $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ se tiene la transformación natural $1_F : F \to F$ dada por $(1_F)_c = 1_{F(c)} : F(c) \to F(c)$ para todo $c \in \mathsf{C}$ y si $F, G, H : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ son funtores y $\eta : F \to G$ y $\nu : G \to H$ son transformaciones naturales, se puede definir $\nu \circ \eta : F \to H$ una transformación natural por $(\nu \circ \eta)_c = \nu_c \circ \eta_c$. Esto define la categoría D^{C} cuyos objetos son funtores $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ y donde los morfismos $F \to G$ son las transformaciones naturales.

Dado un funtor $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ tenemos para cada par de objetos $a, b \in \mathsf{C}$ una función

$$\mathsf{C}[a,b] \to \mathsf{D}[F(a), F(b)], \quad f \mapsto F(f).$$

Decimos que F es *fiel* si estas aplicaciones son inyectivas para todo $a, b \in \mathsf{C}$, que es *pleno* si son sobreyectivas y que es *plenamente fiel* si son biyectivas. Los funtores plenamente fieles cumplen la función de "subobjeto" en el contexto categórico.

Ejemplo. Sea $P \in \mathsf{Ord}$ un conjunto parcialmente ordenado. Definimos una categoría pequeña iP de la siguiente manera. Los objetos de iP son los elementos de P y existe un morfismo $p \to p'$ exactamente cuando $p \leq p'$ en P. Esto determina de forma única la composición. La asignación $P \mapsto iP$ se extiende de manera obvia a un funtor $i : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Cat}$ que resulta plenamente fiel. Luego, no hay peligro en abusar del lenguaje y pensar que Ord es una subcategoría de Cat (un conjunto parcialmente ordenado "es" una categoría).

Recíprocamente, dada una categoría pequeña C, definimos el conjunto ordenado $U\mathsf{C}$ como el conjunto de objetos C_0 de C con el siguiente orden: $a \leq b$ en $U\mathsf{C}$ si y sólo si $\mathsf{C}[a,b] \neq \emptyset$. Se verifica inmediatamente que esta es una buena definición y que la asignación $\mathsf{C} \mapsto U\mathsf{C}$ se extiende para definir el funtor "olvido" $U : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Ord}$.

Volviendo a la situación general, decimos que un funtor F es una *equivalencia* si es plenamente fiel y todo objeto de D es isomorfo a un objeto de la forma $F(c)$ con $c \in \mathsf{C}$. Por ejemplo, si existe $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tal que $FG \simeq 1_{\mathsf{D}}$ y $GF \simeq 1_{\mathsf{C}}$, entonces F es una equivalencia y decimos que G es una *inversa homotópica* o *cuasi-inversa* de F. Recíprocamente, si F es una equivalencia entonces es fácil ver que F admite una inversa homotópica. Intuitivamente, dos categorías son equivalentes si comparten todas sus características salvo el "tamaño."

Ejemplo. Sea $J \in \mathsf{Set}$ un conjunto. Consideramos la categoría Set/J definida arriba. Un objeto de esta categoría es una función $h : X \to J$ y un morfismo $f : h \to h'$ en esta categoría es un cuadrado conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X' \arrow[d, "h'"] \\ J \arrow[r, equal] & J \end{tikzcd}$$

Cada objeto $h : X \to J$ determina la familia H de sus fibras, $H = \{\, h^{-1}(j) \subset X \mid j \in J \,\}$, y cada morfismo $f : h \to h'$ determina una familia de funciones $f_j : h^{-1}(j) \to h'^{-1}(j)$ ($j \in J$). Si pensamos en J como una categoría cuyo conjunto de objetos es J y cuyos únicos morfismos son las identidades, entonces una familia H de conjuntos indexada por J es un funtor $J \to \mathsf{Set}$ y una familia de funciones f_j ($j \in J$) es una transformación natural $F : H \to H'$. Es decir, se tiene un funtor

$$L : \mathsf{Set}/J \to \mathsf{Set}^J, \quad h \mapsto \{\, h^{-1}(j) \,\}_{j \in J}.$$

Recíprocamente, cada funtor $H : J \to \mathsf{Set}$ determina un conjunto $h : X \to J$ sobre J, con $X = \coprod H(j)$ y h la función que vale j en $H(j)$. Esta construcción define un funtor $M : \mathsf{Set}^J \to \mathsf{Set}/J$ que resulta una equivalencia (no un isomorfismo) inversa de L.

Grafos

Un *grafo dirigido* G consiste en un conjunto O de objetos (vértices) y un conjunto A de flechas (aristas) y un par de funciones $s, t : A \to O$. Un *morfismo* $D : G \to G'$ de grafos dirigidos es un par de funciones $D_O : O \to O'$ y $D_A : A \to A'$ tales que

$$D_O \circ s = s \circ D_A \quad \text{y} \quad D_O \circ t = t \circ D_A.$$

Esto define, con la composición e identidades evidentes, la categoría Grph de grafos dirigidos. Como éste será el único tipo de grafos con los que trabajaremos, escribiremos simplemente "grafo" para denotar un objeto de esta categoría.

Dado un grafo G definido por $s, t : A \to O$, puede "generarse" una categoría $\mathsf{Pa}\, G$, la *categoría de caminos de* G. Definimos el conjunto de objetos de $\mathsf{Pa}\, G$ como el conjunto de objetos de G. Un morfismo de $\mathsf{Pa}\, G$ es una tira finita (un "camino")

$$a_0 \xrightarrow{f_1} a_2 \xrightarrow{f_2} a_3 \to \cdots \xrightarrow{f_n} a_n$$

compuesta de $n+1$ objetos $a_0, \ldots, a_n$ de G conectados por n flechas de G tales que $s(f_i) = a_i$ y $t(f_i) = a_{i+1}$. Consideraremos cada una de estas tiras como un morfismo $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle : a_0 \to a_n$ en $\mathsf{Pa}\, G$ y definimos la composición por yuxtaposición, identificando el extremo común. Claramente esta composición es asociativa y las tiras (a_0) de largo $n = 0$ son sus identidades. Toda tira de largo $n > 0$ es composición de tiras de largo 1:

$$\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = \langle f_n \rangle \circ \cdots \circ \langle f_1 \rangle.$$

Esta construcción se extiende a un funtor $\mathsf{Pa} : \mathsf{Grph} \to \mathsf{Cat}$ de forma obvia.

Recíprocamente, dada una categoría pequeña C podemos olvidarnos que sabemos componer y distinguir a las identidades de C y obtener un grafo $U\mathsf{C}$, el *grafo subyacente a* C. De esta manera se define el funtor "olvido" $U : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Grph}$.

1.2. Funtores adjuntos

La noción de adjunción es una forma débil de la noción de equivalencia de categorías. Los funtores adjuntos abundan en prácticamente cualquier rama de la matemática. La formulación de esta noción puede considerarse un logro importante de la teoría de categorías.

Consideramos dos categorías A y X y dos funtores entre ellas en direcciones opuestas:

$$F : \mathsf{X} \to \mathsf{A}, \quad G : \mathsf{A} \to \mathsf{X}.$$

Decimos que G es *adjunto a derecha* de F (o que F es *adjunto a izquierda* de G) y notamos $F \dashv G$ si se tiene una biyección natural entre morfismos

$$\frac{x \xrightarrow{f} G(a)}{F(x) \xrightarrow{h} a}$$

Es decir, si cada morfismo f determina un morfismo h de forma única y viceversa. Esta biyección tiene que ser natural en el siguiente sentido: dados morfismos $\alpha : a \to a'$ en A y $\xi : x' \to x$ en X y flechas que se corresponden entonces las composiciones también se corresponden:

$$\frac{x' \xrightarrow{\xi} x \xrightarrow{f} G(a) \xrightarrow{G\alpha} G(a')}{F(x') \xrightarrow{F\xi} F(x) \xrightarrow{h} a \xrightarrow{\alpha} a'}$$

Si escribimos esta correspondencia biyectiva como

$$\theta : \mathsf{X}[x, G(a)] \xrightarrow{\cong} \mathsf{A}[F(x), a],$$

entonces la condición de naturalidad se expresa con la ecuación

$$\theta(G(\alpha) \circ f \circ \xi) = \alpha \circ \theta(f) \circ F(\xi).$$

Intuitivamente puede ser útil pensar los adjuntos a izquierda como funtores de "completación" y los adjuntos a derecha como funtores "olvido."

Dada θ como arriba y un objeto $x \in \mathsf{X}$, si ponemos $a = F(x)$ obtenemos un morfismo

$$\eta = \eta_x : x \to GF(x)$$

tal que $\theta(\eta_x) = 1_{F(x)}$. Este morfismo se llama la *unidad* de la adjunción (evaluada en x). Si tomamos $\xi = 1_x$, $a = F(x)$, $f = \eta$ y $\alpha = h$, y $a = a'$, se obtiene, por naturalidad, que la composición inferior, $h : F(x) \to a$, se corresponde con la composición superior, $x \xrightarrow{\eta} GF(x) \xrightarrow{Gh} G(a)$. Es decir, η determina la adjunción ya que h se corresponde con $G(h) \circ \eta_x$ por la biyección de la adjunción. Esto quiere decir que cada f determina de forma única una h que hace que el siguiente triángulo conmute:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & GF(x) \arrow[d, dashed, "Gh"] & F(x) \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & G(a) & a
\end{tikzcd}$$

Esto se expresa diciendo que $\eta = \eta_x$ es *universal* entre las flechas de x a un objeto de la forma $G(a)$. Esto implica que si G está dado, el objeto $F(x)$ es único salvo isomorfismo. En otras palabras, dado un funtor G, su adjunto a izquierda F (si existe) es único salvo isomorfismo natural. Además, si están dados G y una flecha universal de cada objeto x a algún objeto de la forma $G(a)$, entonces el adjunto a izquierda existe. La condición de naturalidad implica que los morfismos $\eta_x : x \to GF(x)$, cuando varía x, constituyen una transformación natural $1_{\mathsf{X}} \to GF$. En efecto,

$$\theta(\eta_x \circ \xi) = \theta(GF(\xi) \circ \eta_{x'}).$$

Dual a la unidad de la adjunción, tenemos la *counidad.* En la biyección que define la adjunción, tomamos $x = G(a)$ y $f = 1_{G(a)}$. La correspondiente h se escribe $\epsilon_a : FG(a) \to$

a. Esto define una transformación natural $FG \to 1_{\mathsf{A}}$. Su propiedad universal es que, para cada $h : F(x) \to a$, existe una única f que hace que el siguiente triángulo conmute:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, dashed, "f"'] & F(x) \arrow[d, dashed, "Ff"'] \arrow[dr] & \\
G(a) & FG(a) \arrow[r, "\epsilon"'] & a
\end{tikzcd}$$

En otras palabras, ϵ es universal entre las flechas desde un objeto a la imagen de F a a. Análogamente al caso de la de la unidad, esta propiedad implica que, dado F, el adjunto a derecha G es único salvo isomorfismo natural. A continuación se dan algunos ejemplos de funtores adjuntos.

Ejemplo. Sea k un cuerpo y sea Vect_k la categoría de k-espacios vectoriales. El dual $V \mapsto V^*$ define un funtor $D : \mathsf{Vect}_k^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vect}_k$. Definimos una función ϕ,

$$\phi = \phi_{V,W} : \mathsf{Vect}_k[V, W^*] \to \mathsf{Vect}_k[W, V^*]$$

de la siguiente manera. Si $h : V \to W^*$ es un k-morfismo, $(\phi h)(w)(v) = (hv)(w)$. Como $\phi_{V,W}\phi_{W,V}$ es la identidad, ϕ es una biyección (claramente natural). Por lo tanto, se tiene una adjunción $D^{\mathrm{op}} \dashv D$, donde $D^{\mathrm{op}} : \mathsf{Vect}_k \to \mathsf{Vect}_k^{\mathrm{op}}$ es dual a D. Si $V \in \mathsf{Vect}_k$, la unidad $\eta_V : V \to DD^{\mathrm{op}}V$ de esta adjunción es la aplicación canónica al doble dual. Cuando V es de dimensión finita, D y D^{op} son equivalencias de categorías. Sin embargo, en general, sólo forman un par adjunto.

Ejemplo. El funtor $\mathsf{Pa} : \mathsf{Grph} \to \mathsf{Cat}$ que le asigna a cada grafo su categoría de caminos es adjunto a izquierda del funtor olvido $U : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Grph}$ que le asigna a cada categoría su grafo subyacente.

Ejemplo. Recordamos la definición del funtor olvido $U : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Ord}$. Si $\mathsf{C} \in \mathsf{Cat}$, $U\mathsf{C}$ consistía del conjunto C_0 de objetos de C con el orden $a \leq b$ si y sólo si $\mathsf{C}[a, b] \neq \emptyset$. La inclusión $i : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Cat}$ es adjunta a izquierda de este funtor.

Ejemplo. Sea $U : \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ el funtor olvido. Dado un conjunto $S \in \mathsf{Set}$, podemos considerar dos topologías canónicas en él. La primera es la topología discreta (el conjunto de abiertos es $\mathcal{P}(S)$) y la segunda, la indiscreta (el conjunto de abiertos es $\{\,\emptyset, S\,\}$). La primera construcción define un adjunto a izquierda de U y la segunda, un adjunto a derecha de U.

Ejemplo (Ley exponencial). Sea C una categoría con productos y sea $X \in \mathsf{C}$. Cuando el funtor $Y \mapsto Y \times X$ tiene adjunto a derecha decimos que en la categoría C vale la *ley exponencial.* Si Z^X denota el valor del funtor adjunto en el objeto Z, la adjunción está definida por una biyección natural

$$\mathsf{C}[Y \times X, Z] \simeq \mathsf{C}\left[Y, Z^X\right].$$

La counidad de esta adjunción, evaluada en Z, es un morfismo $e_Z : Z^X \times X \to Z$, llamado *evaluación.* Algunos ejemplos particulares en los que vale la ley exponencial son los siguientes.

• $\mathsf{C} = \mathsf{Set}$ con $Z^X = \mathsf{Set}[X, Z]$. En este caso la evaluación es la función

$$Z^X \times X \to Z, \quad (f, x) \mapsto f(x).$$

• $\mathsf{C} = \mathsf{Cat}$ (donde el producto de dos categorías se construye de la manera obvia), tomando $Z^X = \mathsf{Cat}[X, Z]$ la categoría cuyos morfismos son las transformaciones naturales.

• $\mathsf{C} = \mathsf{Top}$. En este caso, el funtor $- \times X$ no siempre tiene adjunto a derecha, pero sí lo tiene si X es localmente compacto y Hausdorff (por ejemplo, si $X = [0, 1]$). En este caso, $Z^X = \mathsf{Top}[X, Z]$ con la topología compacto-abierta. Si se quiere que valga la ley exponencial sin restricciones y no se quiere restringir la clase de espacios X, hay que modificar las topologías involucradas. Esto lleva de manera natural a considerar los espacios compactamente generados [ML67, pp. 181–184].

Ejemplo. Sea R un anillo. Denotamos por ${}_R\mathsf{Mod}$ la categoría de R-módulos a izquierda. Entonces el funtor "libre" $\mathsf{Set} \to {}_R\mathsf{Mod}$ que le asigna a cada conjunto S el R-módulo libre $R^{(S)}$ con base S (con la definición obvia en los morfismos) es adjunto a izquierda del funtor olvido ${}_R\mathsf{Mod} \to \mathsf{Set}$.

Ejemplo. Sea k un anillo con unidad. Consideramos la categoría Alg_k de k-álgebras con unidad. Si $G \in \mathsf{Grp}$ es un grupo, podemos construir $k[G] \in \mathsf{Alg}_k$ la k-álgebra de grupo. Esta construcción se extiende de manera obvia a un funtor $\mathsf{Grp} \to \mathsf{Alg}_k$ que es adjunto a izquierda del funtor $U : \mathsf{Alg}_k \to \mathsf{Grp}$ definido en los objetos por $A \mapsto A^\times$ (el grupo de unidades).

Ejemplo. Este ejemplo es fundamental para la topología. Consideramos la categoría Top_* cuyos objetos (X, x) son espacios topológicos X con un punto base $x \in X$ y cuyos morfismos son funciones continuas que respetan los puntos base. Si $I = [0, 1]$, definimos $S^1 = I/\{0, 1\} \in \mathsf{Top}_*$ tomando como punto base la clase $[0] = [1] \in S^1$. Para cada $(X, *) \in \mathsf{Top}_*$, definimos la *suspensión (reducida) de X* como

$$\Sigma X = X \times S^1 / * \times S^1 \cup X \times 1,$$

y denotamos la clase de equivalencia de (x, t) por $x \wedge t$. Este espacio tiene como punto base natural $* \wedge [0]$. La asignación $X \mapsto \Sigma X$ se extiende a un funtor $\Sigma : \mathsf{Top}_* \to \mathsf{Top}_*$. En efecto, si $f : X \to Y$ es un morfismo en Top_*, definimos

$$\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y, \quad x \wedge t \mapsto f(x) \wedge t.$$

Por otra parte, consideramos el *espacio de lazos de X* definido por

$$\Omega X = \mathsf{Top}_*[S^1, X]$$

con la topología compacto-abierta. Claramente se tiene un funtor $\Omega : \mathsf{Top}_* \to \mathsf{Top}_*$. No es difícil verificar que Σ es adjunto a izquierda de Ω.

Observación. Sea $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un funtor adjunto a izquierda de $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$. Sea $\eta : 1_{\mathsf{C}} \to GF$ la unidad de la adjunción y sea $c \in \mathsf{C}$. Entonces $\eta_c : c \to GF(c)$ es un monomorfismo (resp. una retracción) si y sólo si la aplicación natural

$$\mathsf{C}[-, c] \to \mathsf{D}[F(-), F(c)]$$

es inyectiva (resp. sobreyectiva). En particular, F es plenamente fiel si y sólo si η es un isomorfismo natural. En efecto, esto se sigue de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}[-,c] \arrow[r, "{\mathsf{C}[-,\eta_c]}"] \arrow[dr, "F"'] & \mathsf{C}[-,GF(c)] \arrow[d, "\mathrm{adj}"', "\simeq"] \\ & \mathsf{D}[F(-),F(c)] \end{tikzcd}$$

Dualizando, se obtiene un resultado análogo para la counidad de la adjunción.

El siguiente resultado es parte del "yoga" de los funtores adjuntos y será imprescindible más adelante.

Lema. *Sean C, D categorías tal que C admite pullbacks. Sean $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ un par de funtores adjuntos $F \dashv G$, $\psi : 1_{\mathsf{C}} \to GF$ la unidad y $\phi : FG \to 1_{\mathsf{D}}$ la counidad de la adjunción. Sea $c \in \mathsf{C}$ y sean $F/c : \mathsf{C}/c \to \mathsf{D}/F(c)$, $G/F(c) : \mathsf{D}/F(c) \to \mathsf{C}/GF(c)$ los funtores inducidos. Denotamos por $\mathsf{C}/\psi_c : \mathsf{C}/GF(c) \to \mathsf{C}/c$ el pullback a lo largo de ψ_c. Se tiene el siguiente diagrama de categorías y funtores:*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "\psi_c"'] & \mathsf{C}/c \arrow[r, "F/c"] & \mathsf{D}/F(c) \arrow[dl, "G/F(c)"] \\ GF(c) & \mathsf{C}/GF(c) \arrow[u, "\mathsf{C}/\psi_c"] & \end{tikzcd}$$

Entonces F/c es adjunto a izquierda de $\mathsf{C}/\psi_c \circ G/F(c)$. Más aún, la unidad de la adjunción $1_{\mathsf{C}/c} \to \mathsf{C}/\psi_c \circ G/F(c) \circ F/c$ está dada, si $f \in \mathsf{C}/c$, por el morfismo inducido

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend left, "\psi_{c'}"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & c \times_{GF(c)} GF(c') \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pull"] & GF(c') \arrow[d, "GF(f)"] \\ & c \arrow[r, "\psi_c"'] & GF(c) \end{tikzcd}$$

y la counidad $F/c \circ \mathsf{C}/\psi_c \circ G/F(c) \to 1_{\mathsf{D}/F(c)}$ está dada por $d \mapsto \phi_d \circ F(\pi_d)$, donde $\pi_d : c \times_{GF(c)} G(d) \to G(d)$ es la proyección del pullback.

Demostración. Tenemos que ver que existe un isomorfismo natural

$$\mathsf{C}/c[c', \mathsf{C}/\psi_c \circ G/F(c)(d)] \simeq \mathsf{D}/F(c)[F/c(c'), d].$$

Un morfismo g del primer conjunto es exactamente un diagrama conmutativo como en el enunciado, pero con $F(c')$ cambiado por un objeto $d \in \mathsf{D}$. Por la propiedad universal del pullback, ese diagrama es equivalente a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[r] \arrow[d] & G(d) \arrow[d] \\ c \arrow[r, "\psi_c"'] & GF(c) \end{tikzcd}$$

Por adjunción, este cuadrado es naturalmente equivalente al cuadrado

$$\begin{tikzcd} F(c') \arrow[r, "h"] \arrow[d] & d \arrow[d] \\ F(c) \arrow[r, equal] & F(c) \end{tikzcd}$$

La asignación $g \mapsto h$ define la biyección natural buscada. Las afirmaciones sobre la unidad y la counidad de la adjunción se siguen examinando los diagramas anteriores y recordando las definiciones. □

1.3. Límites y colímites

Los productos, las uniones disjuntas, el pullback, el pushout y otras construcciones que se llevan a cabo normalmente en la categoría Set de conjuntos y Top de espacios topológicos son todos ejemplos de límites y colímites en las respectivas categorías. Recordamos las definiciones básicas.

Sea C una categoría fija y J una categoría pequeña. Consideramos la categoría de funtores C^{J}. Un objeto de C^{J} se llamará un *diagrama en* C *de forma* J. Por ejemplo, cada objeto $c \in \mathsf{C}$ determina el diagrama constante $\Delta_{\mathsf{J}}(c)$ que toma el mismo valor c para todo $j \in \mathsf{J}$. Esto define el funtor *diagonal*

$$\Delta_{\mathsf{J}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\mathsf{J}}.$$

Una transformación natural $\pi : \Delta_{\mathsf{J}}(c) \to A$ con $A \in \mathsf{C}^{\mathsf{J}}$ consiste de morfismos $f_j : c \to A(j)$ ($j \in \mathsf{J}$) tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[dr, "f_k"] & \\ A(j) \arrow[rr, "A(u)"'] & & A(k) \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $u : j \to k$ en J. Una tal transformación natural se llama un *cono* $f : c \to A$ en el diagrama A con vértice c. Un cono $\pi : u \to A$ con vértice u es *universal* para A si dado cualquier otro cono $f : c \to A$, existe un único morfismo $g : c \to u$ en C tal que $\pi_j \circ g = f_j$ para todo $j \in \mathsf{J}$:

$$\begin{tikzcd} & & A(j) \arrow[dd, "A(u)"] \\ c \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[urr, bend left, "f_j"] \arrow[drr, bend right, "f_k"'] & u \arrow[ur, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_k"'] & \\ & & A(k) \end{tikzcd}$$

El vértice u del cono universal $\pi : u \to A$ se llama el *límite* del diagrama A. Si todo diagrama $A \in \mathsf{C}^{\mathsf{J}}$ tiene un límite en este sentido, entonces lo que dijimos recién es exactamente que el funtor diagonal Δ_{J} tiene un adjunto a derecha

$$\lim_{\mathsf{J}} : \mathsf{C}^{\mathsf{J}} \to \mathsf{C}.$$

La counidad de esta adjunción es el cono universal

$$\pi : \Delta_{\mathsf{J}}(\lim_{\mathsf{J}} A) \to A.$$

Ejemplo. A continuación se dan los diagramas correspondientes a algunos límites usuales.

Límite	Diagrama
producto	$\bullet \qquad \bullet$
pullback	$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$
egalizador	$\bullet \rightrightarrows \bullet$
objeto final	$\emptyset$

La noción dual a la de límite es el *colímite.* Un *cocono* con vértice c en un diagrama $A : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ es un morfismo $A \to \Delta_{\mathsf{J}}(c)$ en la categoría de funtores C^{J}. El vértice del cocono universal (si existe) se llama colímite del diagrama A y se denota por $\operatorname{colim}_{\mathsf{J}} A$. Si el colímite de cualquier diagrama en C de forma J existe, se tiene un funtor

$$\operatorname*{colim}_{\mathsf{J}} : \mathsf{C}^{\mathsf{J}} \to \mathsf{C},$$

adjunto a izquierda de la diagonal $\Delta_{\mathsf{J}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\mathsf{J}}$.

Decimos que un funtor $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *preserva límites* si, para todo diagrama $A : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ y cono universal $\pi : L \to A$, se tiene que $G(\pi) : G(L) \to GA$ es un cono universal para el diagrama $GA : \mathsf{J} \to \mathsf{D}$.

Ejemplo. Sean C una categoría (pequeña) y $c \in \mathsf{C}$ un objeto. El funtor $\mathsf{C}[c, -] : \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ preserva todos los límites que existen en C. En efecto, sea $A : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ un diagrama y sea $\pi : L \to A$ un cono universal. Aplicando el funtor, obtenemos un cono $\mathsf{C}[c, \pi] : \mathsf{C}[c, L] \to \mathsf{C}[c, A(-)]$. Veamos que es universal. Sea $\tau : X \to \mathsf{C}[c, A(-)]$ otro cono. Cada $x \in X$ define un cono $\tau(x) : c \to A$ y por lo tanto existe un único morfismo $k_x : c \to L$ tal que $\pi_i k_x = \tau_i(x)$. Es fácil ver que la función $X \to \mathsf{C}[c, L]$, $x \mapsto k_x$ es la factorización buscada.

Dualizando, se tiene que $\mathsf{C}[-, c]$ preserva todos los colímites de C (= límites en C^{op}).

El siguiente resultado es fundamental y de uso constante.

Proposición. *Adjuntos a derecha preservan límites. Dualmente, adjuntos a izquierda preservan colímites.*

Demostración. [ML67, p. 114]. $\square$

Cuando una categoría tiene todos los límites (resp. colímites), decimos que es *completa* (resp. *cocompleta*).

Ejemplo. En la categoría Set de conjuntos, todos los límites existen y pueden construirse como un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos del diagrama. También existen todos los colímites y pueden construirse como cocientes de la unión disjunta de los conjuntos del diagrama.

Ejemplo. Consideramos la categoría $\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ de funtores *contravariantes* $\mathsf{C} \to \mathsf{Set}$. En esta categoría existen todos los (co)límites. En la siguiente sección veremos que este hecho tiene la consecuencia importante de permitir "completar" C.

En efecto, si $A : \mathsf{J} \to \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ es un diagrama, entonces el límite de este diagrama existe en $\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ y se calcula "lugar a lugar." Concretamente, dado $c \in \mathsf{C}$, obtenemos un diagrama $A_c : \mathsf{J} \to \mathsf{Set}$ evaluando en c:

$$A_c(j) = A(j)(c) \in \mathsf{Set}.$$

Sabemos que este diagrama tiene un límite $L_c = \lim A_c$ en Set y estos límites se juntan (utilizando sus propiedades universales) para definir un funtor $L : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ que es el límite del diagrama A. De manera que, para cada $c \in \mathsf{C}$, se tiene que

$$(\lim_{\mathsf{J}} A)(c) = \lim_{\mathsf{J}} A_c.$$

El mismo resultado para colímites se obtiene dualizando.

Para terminar, veremos que en Cat existen todos los colímites y los construiremos explícitamente. Sea $D : \mathsf{J} \to \mathsf{Cat}$ un diagrama. Para cada $j \in \mathsf{J}$, consideramos el grafo subyacente a la categoría $D(j)$ definido por $s_j, t_j : A_j \to O_j$ (donde A_j es el conjunto de flechas de $D(j)$ y O_j el conjunto de objetos). Sea $D_O : \mathsf{J} \to \mathsf{Set}$ (resp. $D_A : \mathsf{J} \to \mathsf{Set}$) el diagrama que le asocia a cada $j \in \mathsf{J}$ el conjunto de objetos (resp. flechas) de la categoría $D(j)$ y definido de forma evidente en los morfismos de J. Pasando al (co)límite, las aplicaciones s_j, t_j inducen

$$s, t : \operatorname*{colim}_{j \in \mathsf{J}} A_j \to \operatorname*{colim}_{j \in \mathsf{J}} O_j.$$

y definen un grafo X de forma natural. Sea $\mathsf{Pa}\, X$ la categoría de caminos en X. Observar que se tienen morfismos de grafos $i_j : UD(j) \to U\,\mathsf{Pa}\, X$, pero que estos morfismos no son funtores $D(j) \to \mathsf{Pa}\, X$ (por ejemplo, $i_j(\mathrm{id})$ no es una identidad en $\mathsf{Pa}\, X$). Consideramos C el cociente de $\mathsf{Pa}\, X$ por las relaciones

$$i_j(\beta) \circ i_j(\alpha) = i_j(\beta \circ \alpha) \quad \text{and} \quad i_j(1_a) = 1_{i_j(a)}.$$

Las composiciones $D(j) \xrightarrow{i_j} \mathsf{Pa}\, X \to C$ claramente son funtores y una comprobación fácil muestra que C (junto con estas inclusiones) es el colímite de D.

1.4. Lema de Yoneda

La noción de categoría permite estudiar un objeto dado viendo cómo se relaciona con otros objetos de su tipo. En particular, no se estudia su estructura interna (los objetos "no tienen elementos"). Esta forma de pensar tiene muchas ventajas pero también algunas desventajas. La imposibilidad de trabajar con elementos hace que muchos argumentos que son evidentes en categorías concretas (intuitivamente, aquellas en las cuales se dispone de elementos) resulten engorrosos de demostrar en un contexto categórico. El lema de Yoneda es una observación trivial que, en cierta medida, soluciona este problema permitiendo reemplazar un objeto en una categoría arbitraria por su conjunto de "elementos generalizados." Esta noción intuitiva se basa en lo siguiente: si X es un conjunto, X puede reconstuirse (módulo isomorfismo) como el conjunto de funciones $* \to X$, donde $*$ es algún conjunto de un elemento (el objeto final en Set). En una categoría en general, no basta considerar el objeto final (que podría no existir), sino que es necesario considerar todo el conjunto de morfismos que llegan al objeto en cuestión y la manera en que estos morfismos se relacionan. Esta manera de pensar se originó en geometría algebraica y es extremadamente útil pues permite aplicar toda nuestra intuición conjuntista a cualquier categoría.

Siguiendo a Grothendieck [SGA4], denotaremos la categoría de funtores $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ por $\widehat{\mathsf{C}}$. Dado $c \in \mathsf{C}$, definimos $h(c) \in \widehat{\mathsf{C}}$ como el funtor $h(c) = \mathsf{C}[-, c]$. Concretamente, si $d \in \mathsf{C}$, se tiene $h(c)(d) = \mathsf{C}[d, c]$ y si $\alpha : d' \to d$ es un morfismo de C, el morfismo inducido $h(c)(\alpha) : \mathsf{C}[d, c] \to \mathsf{C}[d', c]$ está dado por $u \mapsto u \circ \alpha$. Los objetos de $\widehat{\mathsf{C}}$ isomorfos a funtores de esta forma se llaman funtores *representables.*

Ejemplo. Sea $[\mathsf{CW}]$ la categoría homotópica de CW-complejos. Si $n \geq 0$ es un número natural, se tiene el funtor $H^n : [\mathsf{CW}]^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ que le asigna a cada CW-complejo X su n-ésimo grupo de (co)homología $H^n(X, \mathbf{Z})$. Es un hecho altamente no trivial (teorema de representación de Brown) que este funtor es representable por un CW-complejo denotado $K(\mathbf{Z}, n)$.

Podemos pensar que los elementos de $h(c)(c')$ son los *elementos generalizados de c de tipo c'*. Si $f : c \to c'$ es un morfismo en C, se tiene una transformación natural $h(c) \to h(c')$ componiendo con f. Esto define un funtor (la *inclusión de Yoneda*)

$$h : \mathsf{C} \to \widehat{\mathsf{C}}, \quad c \mapsto \mathsf{C}[-, c].$$

El funtor h es plenamente fiel y por lo tanto podemos "reemplazar" un objeto c por el funtor $h(c)$. Este hecho es un caso particular del Lema de Yoneda. La demostración es sencilla y la omitimos.

Lema de Yoneda. *Sea $F \in \widehat{\mathsf{C}}$. Se tiene una correspondencia biunívoca*

$$\frac{h(c) \xrightarrow{\eta} F}{x \in F(c)}$$

definida por $x = \eta_c(1_c)$, $\eta_{c'}(f) = F(f)(x)$ para todo $f : c' \to c$ morfismo de C. Además, la correspondencia es natural en c y F.

Observación. Tomamos $F = h(c')$ en el lema. Sea $f \in h(c')(c) = \mathsf{C}[c, c']$ y sea $\eta : h(c) \to h(c')$ la transformación natural correspondiente. Para cada $d \in \mathsf{C}$, se tiene una función

$\eta_d : h(c)(d) = \mathsf{C}[d, c] \to \mathsf{C}[d, c'] = h(c')(d)$ está dada por $\eta_d(g) = h(c')(g)(f) = fg$, i.e., $\eta = h(f)$. La asignación $f \mapsto \eta = h(f)$ es una biyección y por lo tanto h es plenamente fiel.

Sea $P : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ un funtor. Construimos la *categoría de elementos* de P, denotada por Γ_P de la siguiente manera. Sus objetos son pares (c, p) donde c es un objeto de C y $p \in P(c)$. Un morfismo $(c', p') \to (c, p)$ es un morfismo $u : c' \to c$ de C tal que $P(u)(p) = p'$. Estos morfismos se componen de una manera evidente usando la composición de C. Esta categoría viene con una proyección natural

$$\pi_P : \Gamma_P \to \mathsf{C}, \quad (c, p) \mapsto c.$$

Observar que si C es pequeña entonces Γ_P es pequeña para todo P.

Observación. La categoría Γ_P tiene un objeto final si y sólo si P es representable. En efecto, si P es representado por c entonces $(1_c, c)$ es un objeto final de Γ_P y, recíprocamente, si (ξ, c) es un objeto final de Γ_P, se tiene por Yoneda un morfismo $\xi : h(c) \to P$. Este morfismo es un isomorfismo natural: dado $x \in P(d)$, existe un único morfismo $\eta : (x, d) \to (\xi, c)$ en Γ_P, i.e., η es un morfismo $d \to c$ tal que $P(\eta)(\xi) = x$. La aplicación $x \mapsto \eta$ es inversa al morfismo $\xi : h(c) \to P$.

No toda categoría admite límites y colímites. Sin embargo, siempre podemos "completar" una categoría de forma universal. Sabemos que la categoría $\widehat{\mathsf{C}}$ es completa y cocompleta. El siguiente resultado muestra, entre otras cosas, que la inclusión de Yoneda es "densa."

Proposición. *Sea $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un funtor de una categoría pequeña C a una categoría cocompleta D. Entonces existe un único funtor (salvo isomorfismo) $L : \widehat{\mathsf{C}} \to \mathsf{D}$ tal que $L \circ h^{\mathsf{C}} \simeq F$.*

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathsf{C}} \arrow[dr, dashed, "L"] & \\ \mathsf{C} \arrow[u, "h^{\mathsf{C}}"] \arrow[r, "F"'] & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

El funtor L está definido en los objetos por $L(P) = \operatorname{colim} \Gamma_P \xrightarrow{\pi} \mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{D}$. Además, L tiene un adjunto a derecha $R : \mathsf{D} \to \widehat{\mathsf{C}}$ dado por $(Rd)(-) = \mathsf{D}[F(-), d]$. La unidad de la adjunción $P \to RL(P)$ asigna a cada $\xi \in P(c)$ la inclusión en el colímite $F\pi(c, \xi) \to L(P)$.

Demostración. El enunciado de la proposición da una definición para un funtor $L : \widehat{\mathsf{C}} \to \mathsf{D}$ en los objetos. Si $P \to Q$ es un morfismo en $\widehat{\mathsf{C}}$, éste induce de forma natural un funtor $\Gamma_P \to \Gamma_Q$ y por lo tanto se tiene un morfismo entre los colímites $L(P) \to L(Q)$. Esto define el funtor L en los morfismos.

Veamos ahora que el funtor L definido de esta manera es adjunto a izquierda del funtor R definido como arriba. Una transformación natural $\tau : P \to R(d)$ es una familia $\{\tau_c\}$

indexada por objectos c de C tales que

$$\begin{tikzcd} c & P(c) \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "P(u)"'] & \mathsf{D}[F(c), d] \arrow[d, "\mathsf{D}[F(u), d]"] \\ c' \arrow[u, "u"] & P(c') \arrow[r, "\tau_{c'}"'] & \mathsf{D}[F(c'), d] \end{tikzcd}$$

conmuta para cada morfismo $u : c' \to c$ de C. Pero una tal τ también puede verse como una colección

$$\{\, \tau_c(p) : F(c) \to d \,\}_{(c,p) \in \Gamma_P}$$

de flechas de D indexadas por objetos (c, p) de la categoría de elementos de P. La condición de naturalidad es $\tau_c(p)F(u) = \tau_{c'}(P(u)p)$ si $p \in P(c)$ y u es un morfismo $c' \to c$. Es decir,

$$\begin{tikzcd} F\pi_P(c', p') \arrow[rr, "A(u)"] \arrow[dr, "\tau_{c'}(p')"'] & & F\pi_P(c, p) \arrow[dl, "\tau_c(p)"] \\ & d & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo morfismo $u : c' \to c$. Esto quiere decir que las flechas $\tau_c(p)$ forman un cocono del funtor $F\pi_P$ al objeto d. Por la propiedad universal del colímite, se tiene una biyección natural

$$\widehat{\mathsf{C}}[P, R(d)] \simeq \mathsf{D}[L(P), d].$$

Finalmente, observemos que si $P \simeq h(c)$ es representable, la categoría Γ_P tiene objeto final $(1_c, c)$. Por lo tanto, el colímite que define a L es simplemente la evaluación del funtor $F\pi_P$ en este objeto, i.e., $F(c)$. Es claro que esto da un isomorfismo natural $Lh \simeq F$. $\square$

Corolario. *En una categoría de funtores $\widehat{\mathsf{C}}$, todo objeto P es el colímite de un diagrama de funtores representables de una forma canónica.*

Demostración. En la proposición anterior, tomamos $\mathsf{D} = \widehat{\mathsf{C}}$ y $F = h : \mathsf{C} \to \widehat{\mathsf{C}}$ la inclusión de Yoneda, $h(c) = \mathsf{C}[-, c]$. El adjunto a derecha para cualquier $d = P$ es

$$R(P) = \widehat{\mathsf{C}}[h(-), P] \simeq P,$$

donde el último isomorfismo es Yoneda. Es decir, R es el isomorfo al funtor identidad en $\widehat{\mathsf{C}}$. Por la unicidad salvo isomorfismo de funtores adjuntos, el adjunto a izquierda L debe ser isomorfo al funtor identidad, por lo que la definición de L nos da, para cada funtor P, un isomorfismo natural

$$P \simeq \operatorname{colim} \Gamma_P \xrightarrow{\pi} \mathsf{C} \xrightarrow{h} \widehat{\mathsf{C}}. \qquad \square$$

Corolario. *Sean C una categoría pequeña, G un grupoide pequeño y sea $F : \mathsf{C} \to \mathsf{G}$ un funtor. Consideramos $F^* : \widehat{\mathsf{G}} \to \widehat{\mathsf{C}}$ el funtor inducido. Entonces F es una equivalencia si y sólo si F^* lo es. Dualizando, F es una equivalencia si y sólo si $F^* : \mathsf{Set}^{\mathsf{G}} \to \mathsf{Set}^{\mathsf{C}}$ es una equivalencia.*

Demostración. Está claro que si F es una equivalencia entonces F^* es una equivalencia. Supongamos entonces que F^* es una equivalencia. Usamos la proposición anterior con $A = h^{\mathsf{G}}F$, donde $h^{\mathsf{G}} : \mathsf{G} \to \widehat{\mathsf{G}}$ es la inclusión de Yoneda para G. En este caso, el adjunto a derecha R está dado por (usando Yoneda),

$$R(E) = \widehat{\mathsf{G}}[h^{\mathsf{G}}F(-), E] \simeq EF = F^*(E).$$

Es decir, $R \simeq F^*$. Luego, R es una equivalencia y por lo tanto también lo es L, el adjunto a izquierda. En particular, L es planamente fiel. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo (módulo isomorfismo natural).

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathsf{C}} \arrow[r, "L"] & \widehat{\mathsf{G}} \\
\mathsf{C} \arrow[u, "h^{\mathsf{C}}"] \arrow[r, "F"'] & \mathsf{G} \arrow[u, "h^{\mathsf{G}}"']
\end{tikzcd}$$

Como la inclusión de Yoneda es plenamente fiel, F es plenamente fiel. Luego, F es una equivalencia entre C y el subgrupoide pleno $\mathsf{G}' \subset \mathsf{G}$ que consiste de todas las componentes de G que intersecan la imagen de F. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo (salvo isomorfismo):

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathsf{C}} \arrow[r, "L_1"] & \widehat{\mathsf{G}'} \arrow[r, "L_2"] & \widehat{\mathsf{G}} \\
\mathsf{C} \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\simeq", "F"'] & \mathsf{G}' \arrow[u, "h"'] \arrow[r, "\mathrm{inc}"'] & \mathsf{G} \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

donde la fila superior es (isomorfa) a L. Como la correstricción de F es una equivalencia, L_1 es una equivalencia (pues su adjunto a derecha es la correstricción de F). Como además L es una equivalencia, se sigue que L_2 es una equivalencia. Es decir, la inclusión $\mathsf{G}' \subset \mathsf{G}$ induce una equivalencia. Luego, si $d \in \mathsf{G}$, existe $P \in \widehat{\mathsf{G}'}$ tal que $L_2(P) \simeq h^{\mathsf{G}}(d)$. Sabemos que P es colímite de representables. En particular, como $P \neq \emptyset$, existe $d' \in \mathsf{G}'$ tal que se tiene algún morfismo $h^{\mathsf{G}'}(d') \to P$. Entonces, por Yoneda, se tiene un morfismo $d' \to d$ en G, necesariamente un isomorfismo (pues G es un grupoide). Esto termina la demostración. $\square$

2 Homotopía en categorías y revestimientos

En este capítulo se desarolla una teoría de revestimientos para categorías análoga a la teoría de revestimientos topológicos. Si bien algunos resultados de este capítulo son conocidos y utilizados, el desarollo que se ofrece aquí es, hasta donde sabe el autor, original.

En las primeras dos secciones se define la noción de camino y homotopía en categorías y se definen invariantes básicos como el grupoide fundamental de una categoría partiendo de ideas del trabajo [Min02].

En las secciones restantes, se define la noción de revestimiento en este contexto y se utilizan los invariantes introducidos anteriormente para clasificarlos.

2.1. Caminos en una categoría

En esta sección comenzamos nuestro desarollo de la teoría de revestimientos para categorías. Como ya se indicó en la introducción, la generalización a este contexto se lleva a cabo utilizando la propiedad universal de levantamiento de caminos. Un camino en $X \in \mathsf{Top}$ es un morfismo $I \to X$, donde $I = [0, 1]$ es el intervalo unitario. Nuestra primera tarea es encontrar un sustituto de este objeto.

Para cada $n \geq 0$, consideramos el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ ordenado de forma tal que

$$0 < 1 > 2 < \cdots$$

Este conjunto parcialmente ordenado tiene asociada una categoría, via la inclusión $i : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Cat}$, que notamos I_n y llamamos *cilindro* de largo n. Esquemáticamente, esta categoría puede representarse de la siguiente manera:

$$0 \longrightarrow 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow \cdots$$

Un *morfismo de cilindros* $\phi : I_n \to I_m$ es una función de conjuntos que preserva el orden y los extremos, i.e., tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi(n) = m$ (también vamos a llamar a una tal ϕ una *extensión*). Esto define una subcategoría de Cat, que denotamos I.

Lema. *Toda extensión $\phi : I_n \to I_m$ es sobreyectiva. Existe una extensión $\phi : I_n \to I_m$ si y sólo si $n \geq m$. En particular, si $n = m$, la única extensión posible es $\phi = 1_{I_n}$. Si $n = m + 1$, la única extensión posible está dada por*

$$\phi(k) = \begin{cases} k & 0 \leq k \leq n, \\ n & k = n + 1. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $\phi : I_n \to I_m$ es una extensión no sobreyectiva y sea $i \in I_m$ el mínimo (en $\mathbf{Z}$) tal que $i \notin \phi(I_n)$. Observar que $i > 0$. Sea $j \in I_m$ tal que $\phi(j) = i-1$. El orden de I_m implica que $\phi(j+1) = i-1$ o $\phi(j+1) = i-2$. Por inducción, $\phi(n) \leq i-1$ (en $\mathbf{Z}$). Esta contradicción muestra que ϕ tenía que ser sobreyectiva. Recíprocamente, si $n \geq m$, podemos definir $\phi : I_n \to I_m$ por

$$\phi(k) = \begin{cases} k & 0 \leq k \leq m, \\ m & m < k \leq n. \end{cases}$$

Supongamos ahora que tenemos $\phi : I_{n+1} \to I_n$ una extensión. El resultado es inmediato si $n = 0, 1, 2$. Supongamos que $n > 2$. Sabemos que $\phi(0) = 0$. Hay dos posibilidades: $\phi(1) = 0$ o $\phi(1) = 1$. Si $\phi(1) = 0$, entonces $\phi(2) = 0$ por el orden de I_{n+1}. Pero entonces es imposible que ϕ sea sobreyectiva. Esta contradicción muestra que $\phi(1) = 1$ y por lo tanto obtenemos una extensión por restricción al conjunto $\{2, \ldots, n+1\} \simeq I_{n-1}$ y correstricción a $\{2, \ldots, n\} \simeq I_{n-2}$. Por inducción, $\phi(k) = k$ para todo $k = 2, \ldots, n$ y esto termina la demostración. □

El siguiente lema es fundamental para la (buena) definición de la noción que daremos de homotopía de caminos en una categoría.

Proposición. *Dos extensiones cualesquiera $\phi : I_n \to I_p$, $\psi : I_m \to I_p$ se* egalizan*, i.e. existen $r \geq n, m$ y extensiones $\zeta : I_r \to I_n$, $\xi : I_r \to I_m$ tales que $\phi\zeta = \psi\xi$.*

$$\begin{tikzcd} I_r \arrow[r, dashed, "\zeta"] \arrow[d, dashed, "\xi"'] & I_n \arrow[d, "\phi"] \\ I_m \arrow[r, "\psi"'] & I_p \end{tikzcd}$$

Demostración. Sean ϕ, ψ como en el enunciado. La demostración es por inducción en n. Si $n = p$, entonces el resultado es verdad para todo m pues necesariamente $\phi = 1_{I_p}$ y podemos tomar $r = m$, $\zeta = \psi$, $\xi = 1_{I_m}$. Supongamos que ya lo demostramos para $n \geq p$ y veamos que lo podemos demostrar para $n+1$ y cualquier $m \geq p$.

Hacemos inducción en m. Si $m = p$, de nuevo el resultado es trivial. Supongamos entonces que $m > p$ y que se pueden egalizar dos extensiones $I_l \to I_p$, $I_t \to I_p$ para todo t si $l = n$ o para $t < m$ si $l = n+1$ y para cualquier p. Hay tres posibilidades.

1. Si $\psi(m-1) = p$, la restricción $\psi' : I_{m-1} \subset I_m \to I_p$ es una extensión. Por inducción, existen extensiones $\xi' : I_g \to I_{m-1}$, $\zeta' : I_g \to I_n$ tales que $\phi\zeta' = \psi'\xi'$. Si $m \not\equiv g \pmod 2$, tomamos $r = g+1$ y definimos ζ y ξ por

$$\zeta(k) = \begin{cases} \zeta'(k) & 0 \leq k \leq g, \\ n & k = g+1, \end{cases} \qquad \xi(k) = \begin{cases} \xi'(k) & 0 \leq k \leq g, \\ m & k = g+1. \end{cases}$$

En cambio, si $m \equiv g \pmod 2$, tomamos $r = g+2$ y definimos ζ y ξ por

$$\zeta(k) = \begin{cases} \zeta'(k) & 0 \leq k \leq g, \\ n & k = g+1, g+2, \end{cases} \qquad \xi(k) = \begin{cases} \xi'(k) & 0 \leq k \leq g, \\ m-1 & k = g+1, \\ m & k = g+2. \end{cases}$$

2. Si $\psi(m-1) = p-1$ pero $\phi(n) = p$, se tiene (cambiando ϕ por ψ) una conclusión análoga.

3. Supongamos, finalmente, que $\psi(m-1) = p-1 = \phi(n)$. En este caso, $n \equiv p \equiv m \pmod 2$. Consideramos las restricciones $\psi' : I_{m-1} \subset I_m \to I_{p-1} \subset I_p$, $\phi' : I_n \subset I_{n+1} \to I_{p-1} \subset I_p$. Por inducción, existen extensiones $\zeta' : I_g \to I_{n-1}$, $\xi' : I_g \to I_{m-1}$ tales que $\phi'\zeta' = \psi'\xi'$. Si $g \equiv p \pmod 2$, tomamos $r = g+2$ y definimos ζ, ξ por

$$\zeta(k) = \begin{cases} \zeta'(k) & 0 \leq k \leq g, \\ n-1 & k = g+1, \\ n & k = g, \end{cases} \qquad \xi(k) = \begin{cases} \xi'(k) & 0 \leq k \leq g, \\ m-1 & k = g+1, \\ m & k = g. \end{cases}$$

En cambio, si $g \not\equiv p \pmod 2$, tomamos $r = g+1$ y definimos ζ, ξ por

$$\zeta(k) = \begin{cases} \zeta'(k) & 0 \leq k \leq g, \\ n & k = g+1, \end{cases} \qquad \xi(k) = \begin{cases} \xi'(k) & 0 \leq k \leq g, \\ m & k = g+1. \end{cases}$$

Una verificación fácil muestra que estas definiciones satisfacen lo buscado. Esto termina la demostración del paso inductivo. □

Sea C una categoría. Un *camino en* C es un funtor $\omega : I_n \to \mathsf{C}$. Si ω un camino, decimos que $a = \omega(0)$ es su *objeto inicial* y que $b = \omega(n)$ es su *objeto final*. Muchas veces escribiremos $\omega : a \to b$ para indicar que el objeto inicial de ω es a y el final, b. Denotamos la colección de todos los caminos con objeto inicial a y objeto final b por $\mathsf{PC}[a,b]$.

Dado un funtor $f : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, tenemos aplicaciones naturales (por composición)

$$f_* = \mathsf{P}(f) : \mathsf{PC}[a,b] \to \mathsf{PD}[f(a), f(b)].$$

Claramente $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ y $(1_{\mathsf{C}})_* = 1_{\mathsf{PC}[a,b]}$.

Los caminos se componen por yuxtaposición. Más concretamente, dados los cilindros I_n y I_m, definimos el cilindro $I_n * I_m = I_{n+m}$ si $n \equiv 0 \pmod 2$ o bien $I_n * I_m = I_{n+m-1}$ si $n \equiv 1 \pmod 2$. Dados caminos $\omega : I_n \to \mathsf{C}$, $\omega' : I_m \to \mathsf{C}$ en C tales que el objeto final de ω es el objeto inicial de ω' (i.e., tales que $\omega(n) = \omega'(0)$, definimos un camino $\omega * \omega' : I_n * I_m \to \mathsf{C}$ "pegando" el diagrama de ω' a la derecha del de ω, componiendo la flecha común si hace falta. Más concretamente, definimos $\omega * \omega'$ en el cilindro $I_n * I_m$ de la siguiente manera. Notamos $(k, k+1)$ la única flecha de k en $k+1$. Si n es par, simplemente definimos

$$\omega * \omega'(k, k+1) = \begin{cases} \omega(k, k+1) & 0 \leq k < n, \\ \omega'(k-n, k-n+1) & n \leq k < n+m. \end{cases}$$

En cambio, si n es impar, ponemos

$$\omega * \omega'(k, k+1) = \begin{cases} \omega(k, k+1) & 0 \leq k < n-1, \\ \omega'(0,1) \circ \omega(n-1, n) & k = n-1, \\ \omega'(k-n+1, k-n+2) & n \leq k < n+m-1. \end{cases}$$

Como el valor de $\omega*\omega'$ en los objetos está determinado por las definiciones anteriores, ésto define un camino $I_n*I_m \to \mathsf{C}$. La asociatividad de la composición implica inmediatamente que tenemos una operación asociativa

$$*: \mathsf{PC}[a,b] \times \mathsf{PC}[b,c] \to \mathsf{PC}[a,c], \quad (\omega,\omega') \mapsto \omega * \omega'$$

que nos permite definir la *categoría de caminos* PC de C. Los objetos de PC son exactamente los mismo objetos de C. El conjunto de morfismos $a \to b$ está dado por $\mathsf{PC}[a,b]$. La composición es la anterior y las identidades están dadas por los caminos constantes $1_a : I_0 \to \mathsf{C}$, $0 \mapsto a$. Sea $\omega : I_n \to \mathsf{C}$ un camino. Si n es par, definimos un camino $\overline{\omega} : I_n \to \mathsf{C}$ dado por $\overline{\omega}(i,i+1) = \omega(n-i, n-i-1)$ para $i = 0,\dots,n-1$ (donde (i,j) es el único morfismo de I_n entre i y j). En cambio, si n es impar, definimos $\overline{\omega} : I_{n+1} \to \mathsf{C}$ por $\overline{\omega}(0,1) = 1_{\omega(n)}$, $\overline{\omega}(i,i+1) = \omega(n-i,n-i-1)$ para $i = 1,\dots,n$. Esta correspondencia define una aplicación

$$\mathsf{PC}[a,b] \to \mathsf{PC}[b,a], \quad \omega \mapsto \overline{\omega}.$$

Observamos que un camino de largo 1 no es otra cosa que un morfismo de C y que cualquier camino es composición de caminos de largo 1 y de largo 2 con una identidad como primer morfismo tal como lo indica el siguiente diagrama.

$$a \longrightarrow b \qquad * \qquad b = = b \longleftarrow c \qquad = \qquad a \longrightarrow b \longleftarrow c$$

Sea $f : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un funtor. La acción de f en los conjuntos $\mathsf{PC}[a,b]$ es compatible con la composición de caminos:

$$f_*(\omega * \omega') = f_*(\omega) * f_*(\omega').$$

Ésto es inmediato pues f respeta la composición. Como además $f_*(1_a) = 1_{f(a)}$ (donde $1_a : I_0 \to \mathsf{C}$ es la identidad de a en PC), se tiene definido un funtor

$$\mathsf{P} : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}.$$

Podemos pensar a cualquier categoría dentro de su categoría de caminos pensando sus morfismos como caminos $I_1 \to \mathsf{C}$. Es decir, se tiene

$$i_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{PC}.$$

Estas inclusiones son funtoriales en C por lo que se tiene un subfuntor $i : 1_{\mathsf{Cat}} \to \mathsf{P}$.

Componentes conexas

Sea C una categoría (pequeña). Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de objetos de C de la siguiente manera. Dados $c, c' \in \mathsf{C}$, se define

$$c \sim c' \iff \mathsf{PC}[c,c'] \neq \emptyset.$$

A las subcategorías plenas C_i, $i \in I$, generadas por las clases de equivalencia las llamamos *componentes conexas* de C. Se tiene la siguiente descomposición en Cat:

$$\mathsf{C} = \textstyle\coprod_{i\in I} \mathsf{C}_i.$$

Denotamos el conjunto de componentes conexas de C por

$$\pi_0(\mathsf{C}) = \{\,\text{componentes conexas de } \mathsf{C}\,\}.$$

Decimos que una categoría es *conexa* si $\pi_0(\mathsf{C})$ es un conjunto con un sólo elemento. Es decir, si se tiene que $\mathsf{PC}[c, c'] \neq \emptyset$ para todo $c, c' \in \mathsf{C}$. Claramente las componentes conexas de una categoría son (sub)categorías conexas. Además, estas subcategorías son maximales respecto a esta propiedad.

Podemos extender esta definición a un funtor $\pi_0 : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Set}$, ya que es inmediato que si $f : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ es un funtor y D es una categoría conexa, entonces la subcategoría generada por $\{\, f(c) \mid c \in \mathsf{C}\,\}$ es conexa (un funtor "manda componentes conexas en componentes conexas").

2.2. El grupoide fundamental de una categoría

La categoría de caminos de una categoría es por lo menos tan complicada como la categoría original (la contiene como subcategoría plena). Sin embargo, si identificamos dos caminos que puedan "deformarse algebraicamente," la estructura que se obtiene se simplifica drásticamente. En esta sección definimos una noción de homotopía entre caminos que comparten el objeto inicial y el objeto final y la utilizamos para construir un invariante importante de una categoría (pequeña): su *grupoide fundamental.*

Sean $\omega, \omega' : I_n \to \mathsf{C}$ dos caminos en C con objeto inicial a y objeto final b. Decimos que son $*$-*homotópicos* y notamos $\omega \approx \omega'$ si existe un funtor $H : I_m \times I_n \to \mathsf{C}$ tal que $H(0, -) = \omega$, $H(m, -) = \omega'$ y tal que $H(i, i+1, 0) = 1_a$ y $H(i, i+1, n) = 1_b$ para todo i (es decir, es constante en los extremos).

Observación. Usando la ley exponencial en Cat, notamos que tener una homotopía

$$H : I_m \times I_n \to \mathsf{C}, \qquad \omega \approx \omega',$$

equivale a tener un funtor $I_m \to \mathsf{C}^{I_n}$ (un camino en C^{I_n}) con objeto inicial ω, objeto final ω' y cuyo valor en los extremos permanece constante.

El siguiente resultado es evidente.

Lema. *La relación de equivalencia $\approx$ es compatible con el producto de caminos $*$. Más precisamente, si $\omega \approx \omega'$ y $\eta \approx \eta'$, ω y η pueden componerse entonces ω' y η' también pueden componerse y $\omega * \eta \approx \omega' * \eta \approx \omega' * \eta'$.*

Si $\omega : I_m \to \mathsf{C}$ es un camino, y $\phi : I_n \to I_m$ es una extensión ($=$ morfismo de I), podemos definir un camino $\phi^*(\omega) : I_n \to \mathsf{C}$ con los mismos extremos vía la composición:

$$\phi^*(\omega) = \omega \circ \phi : I_n \to I_m \to \mathsf{C}.$$

Observar que el diagrama que define a $\phi^*(\omega)$ se obtiene del diagrama que define a ω insertando identidades. Si $f : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es un funtor, $\omega : I_n \to \mathsf{C}$ es un camino y $\phi : I_m \to I_n$ una extensión, es claro que $\phi^*(f_*(\omega)) = f_*(\phi^*(\omega))$ (pues f manda identidades en identidades).

Definición. Decimos que dos caminos $\omega : I_n \to \mathsf{C}$ y $\omega' : I_m \to \mathsf{C}$ son *homotópicos*, y notamos $\omega \simeq \omega'$, si existen extensiones $\phi : I_r \to I_n$, $\psi : I_r \to I_m$ tales que $\phi^*(\omega) \approx \psi^*(\omega')$.

Lema. *Sea $\omega : I_n \to \mathsf{C}$ un camino en C tales que todos los morfismos de C que aparecen en el diagrama que determina ω son isomorfismos. Entonces ω es homotópico al morfismo (= camino de largo 1) de C que se obtiene componiendo los morfismos que aparecen en el diagrama, invirtiendo aquellos que "apuntan hacia la izquierda."*

Demostración. Si $n = 0, 1$, no hay nada que demostrar. Cuando $n = 2$, la demostración del resultado es el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & b & c \arrow[l, "p"'] \arrow[d, equal] \\
a \arrow[r, "p^{-1}h"'] & c \arrow[u, "p"'] \arrow[r, equal] & c
\end{tikzcd}$$

El caso general se sigue por inducción en n. $\square$

Proposición. $\simeq$ *es una relación de equivalencia compatible con $*$.*

Demostración. La reflexividad y la simetría son obvias. Veamos la transitividad. Supongamos que tenemos $\omega : I_n \to \mathsf{C}$, $\omega' : I_m \to \mathsf{C}$, $\omega'' : I_k \to \mathsf{C}$ y que $\omega \simeq \omega'$, $\omega' \simeq \omega''$, i.e., se tienen extensiones $\mu : I_r \to I_n$, $\phi : I_r \to I_m$, $\psi : I_s \to I_m$ y $\eta : I_s \to I_k$ tales que $\omega\mu \approx \omega'\phi$ y $\omega'\psi \approx \omega''\eta$.

$$\begin{tikzcd}
 & & I_t \arrow[dl, dashed, "\zeta"'] \arrow[dr, dashed, "\xi"] & & \\
 & I_s \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[rr, phantom, "="] & & I_r \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
I_k \arrow[drr, "\omega''"'] \arrow[rr, phantom, "\approx"] & & I_m \arrow[d, "\omega'"] \arrow[rr, phantom, "\approx"] & & I_n \arrow[dll, "\omega"] \\
 & & \mathsf{C} & &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que existen $\zeta : I_t \to I_s$ y $\xi : I_t \to I_r$ extensiones tales que $\psi \circ \zeta = \phi \circ \xi$. Es inmediato que $(\eta\circ\zeta)^*(\omega'') = \zeta^*(\eta^*(\omega'')) \approx \zeta^*(\psi^*(\omega')) = (\psi\circ\zeta)^*(\omega')$. Como $(\zeta\circ\psi)^*(\omega') = (\xi \circ \phi)^*(\omega')$, tenemos que $(\zeta \circ \eta)^*(\omega'') \approx (\xi \circ \mu)^*(\omega)$, i.e., que $\omega'' \simeq \omega$.

Supongamos ahora que $\omega \simeq \widehat{\omega}$, $\omega' \simeq \widehat{\omega'}$ y que ω, ω' pueden componerse. Entonces es claro que $\widehat{\omega}$ y $\widehat{\omega'}$ también pueden componerse. Sea ϕ, ϕ', ψ, ψ' extensiones tales que $\omega\phi \approx \widehat{\omega}\psi$, $\omega'\phi' \approx \widehat{\omega'}\psi'$. Entonces ϕ, ϕ' y ψ, ψ' inducen naturalmente extensiones $\phi{*}\phi' : I_a{*}I_b \to I_n{*}I_m$, $\psi{*}\psi' : I_k{*}I_l \to I_r{*}I_s$ tales que $(\phi{*}\phi')^*(\omega{*}\omega') \approx (\psi{*}\psi')^*(\widehat{\omega}{*}\widehat{\omega'})$. Esto es lo que queríamos ver. $\square$

Definición. Sea C una categoría. Definimos el *grupoide fundamental* de C como la categoría cociente:

$$\Pi_1\mathsf{C} = \mathsf{PC}/\simeq .$$

Es decir, los objetos de $\Pi_1\mathsf{C}$ son los objetos de C y si $a, b \in \mathsf{C}$, una flecha $a \to b$ en $\Pi_1\mathsf{C}$ es una clase de homotopía de caminos $[\omega] : a \to b$, con la composición definida por la fórmula $[\omega] \circ [\omega'] = [\omega * \omega']$ (observar el orden de la composición).

El siguiente resultado muestra que la elección de nombres es correcta.

Proposición. *$\Pi_1\mathsf{C}$ es un grupoide.*

Demostración. Basta ver que toda flecha es un isomorfismo. Como todo camino es composición de caminos de largo 1 o de un camino de largo 2 que contiene a la identidad como primer morfismo, basta ver que todo camino de largo 1 (= morfismo de C) es un isomorfismo en $\Pi_1\mathsf{C}$. Sea $h : a \to b$ un morfismo de C. El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & b & a \arrow[l, "h"'] \arrow[d, equal] \\ a \arrow[r, equal] & a \arrow[u, "h"] \arrow[r, equal] & a \end{tikzcd}$$

muestra que $h * \overline{h} \simeq 1_a$. Análogamente, $\overline{h} * h \simeq 1_b$. Esto termina la demostración. □

Consideramos el funtor natural $q : \mathsf{C} \to \Pi_1\mathsf{C}$ definido por

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i_{\mathsf{C}}"'] & \Pi_1\mathsf{C} \\ \mathsf{PC} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Observamos trivialmente que $q(h)$ es un isomorfismo para todo morfismo h de C.

Proposición. *q es universal respecto a esta propiedad.*

Demostración. Sea $f : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un funtor tal que $f(h)$ es un isomorfismo en D para todo morfismo h de C. Queremos definir $\widehat{f} : \Pi_1\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & \mathsf{D} \\ \Pi_1\mathsf{C} \arrow[ur, dashed, "\widehat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

conmute. Veamos primero que f induce $f_1 : \mathsf{PC} \to \mathsf{D}$ tal que $f_1 \circ i_{\mathsf{C}} = f$. Definimos f_1 en los objetos de única manera posible: $f_1(c) = f(c)$ para todo $c \in \mathsf{C}$. Sea ahora

$$\omega : x = a_0 \xrightarrow{h_1} a_1 \xleftarrow{h_2} a_2 \to \cdots a_n = y$$

un camino en C. Definimos $f_1(\omega) = \cdots \circ f(h_2)^{-1} \circ f(h_1) : f(x) \to f(y)$. Es claro que f_1 es un funtor y que $f \circ i_{\mathsf{C}} = f$. Observemos que $f_1(\overline{\omega}) = f_1(\omega)^{-1}$ para todo camino ω en C. En particular, $f_1(\overline{h}) = f(h)^{-1}$ para todo morfismo h de C.

Si vemos que f_1 está bien definido en las clases de homotopía de caminos, pasando al cociente obtendremos un funtor $\widehat{f} : \Pi_1\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ que cumple lo que queremos. Basta ver que si $\omega : I_n \to \mathsf{C}$ y $\eta : I_n \to \mathsf{C}$ son dos caminos homotópicos con los mismos extremos entonces $f_1(\omega) = f_1(\eta)$. Ahora bien, aplicando f_1 vemos que $f_*(\omega)$ y $f_*(\eta)$ son dos caminos $*$-homotópicos en D. Sabemos que un camino tal que todos sus morfismos son inversibles es homotópicos a la composición de ellos (inviertiendo los que van hacia la izquierda). Luego, $f_*(\omega)$ es homotópico a $f_1(\omega)$ y $f_*(\eta)$ es homotópico a $f_1(\eta)$. Por transitividad tenemos que $f_1(\omega)$ y $f_1(\eta)$ son homotópicos. Pero dos morfismos son homotópicos si y sólo si son iguales. Esto es lo que queríamos ver. La unicidad de f_1 (y por lo tanto de $\widehat{f}$) está clara. $\square$

Hemos demostrado el siguiente corolario (comparar con [GZ67] y [Qu73]).

Corolario. $q : \mathsf{C} \to \Pi_1\mathsf{C}$ *es la* localización *de* C *respecto a todas sus flechas.*

Ejemplo. Sea G un grupo (= grupoide con un sólo objeto). Entonces $\Pi_1 G = G$.

Notar que tenemos un funtor

$$\Pi_1 : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Grpoid}$$

que no es otra cosa que la composición $1_{\mathsf{Cat}} \to \mathsf{P} \to \Pi_1$. Si $f : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es un funtor, seguimos llamando $f_* = \Pi_1(f) : \Pi_1\mathsf{C} \to \Pi_1\mathsf{D}$ al funtor inducido.

Definición. Sea C una categoría y $c \in \mathsf{C}$. Definimos el *grupo fundamental de* C *con punto base* c al grupo de automorfismos de c en $\Pi_1\mathsf{C}$:

$$\pi_1(\mathsf{C}, c) = \mathrm{Aut}_{\Pi_1\mathsf{C}}(c) = \Pi_1\mathsf{C}[c, c].$$

Observación. Sean $f, g : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ dos funtores y sea $H : f \to g$ una homotopía (i.e., un camino en la categoría de funtores $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ que comienza en f y termina en g). Entonces H induce un isomorfismo de funtores $H_* : f_* \xrightarrow{\simeq} g_*$. En efecto, como los isomorfismo se componen, basta considerar el caso cuando H es un camino de largo 1 (= transformación natural $f \to g$). Sean $c, c' \in \mathsf{C}$ y sea $[\omega] : c \to c'$ un morfismo de $\Pi_1\mathsf{C}$. Por inducción, podemos suponer que ω es de largo 1. Pero entonces el mismo diagrama asociado a los datos c, c', ω que define a H sirve para definir una transformación natural H_* asociada a las datos $c, c', [\omega]$. Esto es suficiente pues $\Pi_1\mathsf{D}$ es un grupoide.

2.3. Revestimientos de categorías

En esta sección definimos la noción de revestimiento de categorías y demostramos que valen muchas de las propiedades que valen para revestimientos topológicos. Concretamente, veremos que esta noción de revestimiento es “compatible” con la noción de homotopía dada anteriormente. La clasificación de los revestimientos de una categoría dada se llevará a cabo en las secciones posteriores.

Sea C una categoría, $c \in \mathsf{C}$. Definimos la *estrella de c* como el conjunto de flechas que parten o que llegan a c:

$$\mathrm{St}\, c = \{a \xrightarrow{h} b \in \mathsf{C} \mid a = c \text{ o } b = c\}.$$

Observar que, si $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es un funtor, se tiene una aplicación natural de conjuntos

$$\mathrm{St}\, c \to \mathrm{St}\, F(c).$$

Definición. Un funtor $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ es un *revestimiento* si la aplicación inducida

$$\mathrm{St}\, e \to \mathrm{St}\, p(e)$$

es una biyección para todo $e \in \mathsf{C}'$.

Definimos la *categoría de revestimientos* de una categoría pequeña C como la subcategoría plena de Cat/C generada por los revestimientos. Denotaremos esta categoría por Cov/C. Con esta definición, un *morfismo de revestimientos* $g : p \to q$ es un diagrama en Cat de la forma

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & \mathsf{C}'' \arrow[d, "q"] \\ \mathsf{C} \arrow[r, equal] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$

donde p, q son revestimientos. Normalmente haremos un abuso de notación y denotaremos a g simplemente por $g : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}''$. Observar que si $g : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}''$ es un morfismo de revestimientos, entonces g es un revestimiento. Ésto se sigue inmediatamente aplicando el funtor St.

Observación. Si $p : \mathsf{G}' \to \mathsf{G}$ es un funtor entre grupoides, p es un revestimiento si y sólo si para todo morfismo $h : x \to p(e)$ en G existe un único morfismo $\widehat{h} : x' \to e$ en G' tal que $p(\widehat{h}) = h$ (es decir, basta probar sólo con morfismos que *llegan* a un punto dado). Comparar con [Br88, May99].

Proposición. *Sea $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ un revestimiento y $e \in \mathsf{C}'$. Entonces, para todo camino $\omega : y \to p(e)$ en C (resp. $\omega : p(e) \to y$ en C), existe un único camino $\widehat{\omega} : x \to e$ en C' (resp. $\widehat{\omega} : e \to x$ en C') tal que $p(\widehat{\omega}) = \omega$:*

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "e"] \arrow[d, "0"'] & \mathsf{C}' \arrow[d, "p"] \\ I_n \arrow[r, "\omega"'] \arrow[ur, dashed, "\widehat{\omega}"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$

Observación. Con las definiciones anteriores, la proposición dice que la función

$$\mathrm{St}_{\mathsf{PC}'}\, e \to \mathrm{St}_{\mathsf{PC}}\, p(e)$$

inducida por p es biyectiva. Es decir, p es revestimiento si y sólo si $\mathsf{P}(p)$ es revestimiento.

Demostración de la proposición. Observemos primero que basta considerar el caso donde el camino ω *termina* en $p(e)$, i.e., $\omega : y \to p(e)$ (si no consideramos el camino $\overline{\omega}$). Sea $e \in \mathsf{C}'$, $\omega : y \to p(e)$ un camino en C.

Primero observemos que la unicidad es inmediata pues la k-ésima flecha de un levantado tiene que levantar la k-ésima flecha de ω y por lo tanto es única. Luego, sólo resta ver la existencia. Como todo camino es composición de caminos de largo 1 y de largo 2, basta ver la proposición cuando $n = 2$. En efecto, si $\omega = \omega_1 * \omega_2$, y $\widetilde{\omega_2}$ es un levantado de ω_2 que termina en e y $\widetilde{\omega_1}$ es un levantado de ω_1 que termina en el objeto inicial de $\widetilde{\omega_2}$ entonces $\widetilde{\omega_1} * \widetilde{\omega_2}$ es un levantado de ω que termina en e. Veamos entonces el caso $n = 2$. Sea $\omega : I_2 \to \mathsf{C}$ el camino

$$a \xrightarrow{r} b \xleftarrow{s} p(e)$$

Sabemos que existe $\widetilde{s} : e \to b'$ tal que $p(\widetilde{s}) = s$. También existe $\widetilde{r} : a' \to b'$ tal que $p(\widetilde{r}) = r$. Entonces el camino

$$a' \xrightarrow{\widetilde{r}} b' \xleftarrow{\widetilde{s}} e$$

levanta al camino ω. Esto termina la demostración. □

Proposición (Levantamiento de $*$-homotopías). *Sea $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ un revestimiento. Supongamos que se tienen caminos $\omega : I_n \to \mathsf{C}$, $\omega' : I_n \to \mathsf{C}$ tales que $\omega \approx \omega'$ y sea $H : I_m \times I_n \to \mathsf{C}$ la homotopía. Supongamos que $\mathrm{cod}(\omega) = p(e)$ para algún $e \in \mathsf{C}'$ (resp. $\mathrm{dom}(\omega) = p(e)$). Entonces existe una única $*$-homotopía $\widehat{H} : I_m \times I_n \to \mathsf{C}'$, $\widehat{\omega} \approx \widehat{\omega'}$ tal que $p\widehat{H} = H$ y tal que $\widehat{H}(0,0) = e$ (resp. $\widehat{H}(m,n) = e$).*

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "e"] \arrow[d, "(0,0)"'] & \mathsf{C}' \arrow[d, "p"] \\
I_m \times I_n \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widehat{H}"] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por adjunción, el diagrama anterior se corresponde con el diagrama

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "e"] \arrow[d, "0"'] & \mathsf{C}'^{I_n} \arrow[d, "p^{I_n}"] \\
I_m \arrow[r, "H'"'] & \mathsf{C}^{I_n}
\end{tikzcd}$$

donde la flecha de arriba está dada por el camino constante e. Ahora bien, $p^{I_n} : \mathsf{C}'^{I_n} \to \mathsf{C}^{I_n}$ es un revestimiento por la observación anterior (p revestimiento $\Longrightarrow$ $\mathsf{P}(p)$ revestimiento). Luego, este cuadrado puede completarse conmutativamente de forma única con $\widehat{H'} : I_m \to \mathsf{C}'^{I_n}$ y por adjunción podemos completar el siguiente cuadrado de forma única.

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "e"] \arrow[d] & \mathsf{C}' \arrow[d, "p"] \\
I_m \times I_n \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widehat{H}"] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

Finalmente, observemos que $p\widehat{H}(0,-) = p^{I_n}\widehat{H'}(0) = H'(0) = \omega$ (idem, $pH(m,-) = \omega'$) y que $\widehat{H}(0,0) = \widehat{H'}(0)(0) = e$, con lo que se termina la demostración. $\square$

Proposición (Levantamiento de homotopías). *Sea $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ un revestimiento, $e \in \mathsf{C}'$, $b = p(e)$. Sean $\omega, \omega' : b \to b'$ dos caminos homotópicos en C. Entonces, si $\widehat{\omega}, \widehat{\omega'} : e \to e'$ son dos caminos en C' que levantan a ω, ω' respectivamente, éstos también resultan homotópicos.*

Demostración. Sean ϕ, ψ extensiones tales que $\phi^*\omega \approx \psi^*\omega'$. Ahora bien, como

$$p_*(\phi^*\widehat{\omega}) = \phi^* p_*(\widehat{\omega}) = \phi^*(\omega),$$
$$p_*(\psi^*\widehat{\omega'}) = \psi^* p_*(\widehat{\omega'}) = \psi^*\omega',$$

tenemos que $\phi^*\widehat{\omega}$ levanta a $\phi^*\omega$ y que $\psi^*\widehat{\omega'}$ levanta a $\psi^*\omega'$. Por el levantamiento de $*$-homotopías, tenemos que $\phi^*(\widehat{\omega}) \approx \psi^*(\widehat{\omega'})$, i.e., $\widehat{\omega} \simeq \widehat{\omega'}$. $\square$

Corolario. *Sea $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ un revestimiento. Entonces*

$$p_* : \Pi_1\mathsf{C}' \to \Pi_1\mathsf{C}$$

es un funtor fiel.

Lema del levantamiento. *Sea $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ un revestimiento, D una categoría conexa, $f : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ un funtor, $e \in \mathsf{C}'$, $b \in \mathsf{C}$ y $x \in \mathsf{D}$ tal que conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "e"] \arrow[d, "x"'] & \mathsf{C}' \arrow[d, "p"] \\ \mathsf{D} \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\widehat{f}"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$

Entonces existe un funtor $\widehat{f} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}'$ tal que $\widehat{f}(x) = e$ y $p\widehat{f} = f$ si y sólo si $f_*\pi_1(\mathsf{D}, x) \subset p_*\pi_1(\mathsf{C}', e)$. Además, en este caso, $\widehat{f}$ es único.

Demostración. Primero definimos $\widehat{f}$ en los objetos de D. Sea $x' \in \mathsf{D}$ y $\omega : x \to x'$ un camino en D. Levantamos $f_*(\omega)$ a un camino $\widehat{\omega} : e \to e'$ en C'. Definimos

$$\widehat{f}(x') = e'.$$

Veamos que esta definición no depende del camino elegido. Sean $\omega, \eta : x \to x'$ dos caminos en D. Sabemos que $f_*[\omega * \overline{\eta}] \in p_*\pi_1(\mathsf{C}', e)$. Por lo tanto,

$$f_*(\omega) * f_*(\eta)^{-1} \simeq p_*(\delta) \quad \text{para algún} \quad [\delta] \in \pi_1(\mathsf{C}, e).$$

Es decir, $f_*(\omega) \simeq p_*(\delta) * f_*(\eta)$. Ahora bien, sea $\widehat{\eta}$ el levantado de $f_*(\eta)$ que comienza en e y $\widehat{\omega}$ el levantado de $f_*(\omega)$ que comienza en e. Es claro que $\delta * \widehat{\eta}$ levanta a $p_*(\delta) * f_*(\eta)$ y que comienza en e. Como $p_*(\delta) * f_*(\eta) \simeq f_*(\omega)$ y p_* es fiel, $\delta * \widehat{\eta} \simeq \widehat{\omega}$. En particular, $\widehat{\eta}$ y $\widehat{\omega}$ terminan en el mismo objeto.

Veamos ahora que podemos definir $\widehat{f}$ en las flechas. Sea $h : x' \to x''$ un morfismo en D. Levantamos $f(h)$ a una flecha $\widehat{h}$ en C' que comience en $\widehat{f}(x')$. Ponemos

$$\widehat{f}(h) = \widehat{h}.$$

Hay que ver dos cosas. Primero, que $\widehat{h}$ termina en $\widehat{f}(x'')$. En efecto, si $\omega : x \to x'$ es un camino en D, entonces $\omega * h$ es un camino $x \to x''$ y por la primer parte de la demostración, el levantado de $f_*(\omega * h)$ que comienza en e puede utilizarse para definir $\widehat{f}(x'')$. Por unicidad, este levantado coincide con $\widehat{\omega} * \widehat{h}$ (donde $\widehat{\omega}$ es un levantado de $f_*(\omega)$ que comienza en $\widehat{f}(x)$ y termina en $\widehat{f}(x')$). Luego, $\widehat{h}$ termina en $\widehat{f}(x'')$. Por último, hay que ver que $\widehat{f}$ definido así es un funtor. Como la identidad se levanta a la identidad, tenemos que $\widehat{f}(1_d) = 1_{\widehat{f}(d)}$ para todo $d \in \mathsf{D}$. La unicidad de los levantados muestra que $\widehat{f}$ preserva la composición. La unicidad de $\widehat{f}$ es clara. □

Corolario. *Sean C' una categoría conexa, $p' : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$, $p'' : \mathsf{C}'' \to \mathsf{C}$ revestimientos, $x' \in \mathsf{C}'$, $x'' \in \mathsf{C}''$ tales que $p'(x') = p''(x'')$. Entonces existe un morfismo de revestimientos $g : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}''$ tal que $g(x') = x''$ si y sólo si $p'_*\pi_1(\mathsf{C}', x') \subset p''_*\pi_1(\mathsf{C}'', x'')$.*

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "x''"] \arrow[d, "x'"'] & \mathsf{C}'' \arrow[d, "p''"] \\
\mathsf{C}' \arrow[r, "p'"'] \arrow[ur, dashed, "g"] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

Más aún, en este caso, g es único.

Corolario. *Sean $\mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ y $\mathsf{C}'' \to \mathsf{C}$ revestimientos y $g, h : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}''$ morfismos de revestimientos tales que $g(x) = h(x)$ para algún $x \in \mathsf{C}'$. Entonces $g = h$.*

2.4. G-conjuntos

El objetivo de esta sección es fijar la notación y hacer algunas observaciones en lo que respecta a acciones de grupos en conjuntos que serán utilizadas para clasificar revestimientos de categorías en las secciones subsiguientes.

Sea G un grupo con neutro $e \in G$. Notamos la multiplicación de dos elementos $g, h \in G$ por $gh \in G$. Una *acción a izquierda de G en un conjunto S* es una función

$$G \times S \to S, \quad (g, s) \mapsto g \cdot s$$

tal que $(gh) \cdot s = g \cdot (h \cdot s)$, $e \cdot s = s$ para todo $g, h \in G$, $s \in S$. Un morfismo de acciones entre $G \times S \to S$ y $G \times T \to T$ en una función $f : S \to T$ tal que $f(g \cdot s) = g \cdot f(s)$. Esto define de forma obvia la categoría Set^G de acciones de G (o de G-conjuntos). Escribimos $S \in \mathsf{Set}^G$ para denotar a un conjunto S munido de una acción de G.

Observación. Si pensamos a G como un grupoide entonces una acción no es otra cosa que un funtor $G \to \mathsf{Set}$. Generalizando, vamos a decir que un funtor $\mathsf{G} \to \mathsf{Set}$, con G un grupoide cualquiera, es una *acción de grupoide*.

Sea ahora $G \times S \to S$ una acción fija. Dado $s \in S$, definimos el *estabilizador de s* como el subgrupo
$$G^s = \{g \in G \mid g \cdot s = s\} \subseteq G.$$
Decimos que la acción es *libre* si $g \cdot s = s$ para algún $s \in S$ implica que $g = e$, i.e., si $G^s = \{e\}$ para todo $s \in S$. También definimos la *órbita de s* como el conjunto
$$Gs = \{g \cdot s \mid g \in G\} \subset S.$$
Decimos que la acción es *transitiva* si para todo $s, s' \in S$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot s = s'$, i.e., si $Gs = S$ para todo $s \in S$.

Ahora bien, G es un G-conjunto con la acción natural de G dada por su operación de grupo. Elegir $s \in S$ es equivalente a dar un morfismo de G-conjuntos $G \to S$ (Yoneda!). Concretamente, dado $s \in S$, tenemos el morfismo de G-conjuntos
$$\phi_s : G \to S, \quad g \mapsto g \cdot s.$$
Claramente $\phi_s(g) = \phi_s(h)$ si y sólo si $g^{-1}h \in G^s$. Es decir, ϕ_s desciende al cociente G/G^s (conjunto de coclases a izquierda) y la función inducida queda inyectiva:
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi_s"] \arrow[d] & S \\ G/G^s \arrow[ur, dashed, "{\overline{\phi_s}, \text{iny}}"'] & \end{tikzcd}$$
Más aún, si la acción es transitiva entonces ϕ_s es sobreyectiva y por lo tanto se obtiene un isomorfismo de acciones
$$\overline{\phi_s} : G/G^s \to S.$$
Dado el grupo G, los cocientes G/H (= conjuntos de coclases) son G-conjuntos transitivos. Un morfismo de G-conjuntos $G/H \to G/K$ admite la siguiente descripción explícita.

Lema. *Un morfismo de G-conjuntos $\alpha : G/H \to G/K$ tiene la forma $\alpha(gH) = g\gamma K$ para algún $\gamma \in G$ que satisface que $\gamma^{-1}H\gamma \subset K$.*

Demostración. Sea $\gamma \in G$ tal que $\alpha(eH) = \gamma K$. Entonces
$$\gamma K = \alpha(eH) = \alpha(hH) = h\alpha(eH) = h\gamma K.$$
Es decir, $\gamma^{-1}H\gamma \subset K$. Recíprocamente, si $\gamma^{-1}H\gamma \subset K$, entonces $gH \to g\gamma K$ es claramente un G-morfismo y está bien definido: si $gH = g'H$ entonces $g^{-1}g' \in H$ y, por lo tanto,
$$\gamma^{-1}g^{-1}g'\gamma \in K.$$
Es decir, $g\gamma K = g'\gamma K$. □

Denotamos por $\mathsf{O}(G)$ la *categoría de órbitas de G*, es decir, la subcategoría plena de la Set^G generada por los G-conjuntos transitivos de la forma G/H para H algún subgrupo de G. Del resultado anterior se sigue inmediatamente la siguiente caracterización de $\mathsf{O}(G)$.

Corolario. *La categoría* $\mathsf{O}(G)$ *es* isomorfa *a la categoría cuyos objetos son los subgrupos de* G *y cuyos morfismos son las distintas relaciones de conjugación* $\gamma^{-1}H\gamma \subset K$ *para* $\gamma \in G$.

Denotaremos por tSet^G la subcategoría plena de Set^G generada por los G-conjuntos transitivos. El siguiente resultado es inmediato a partir de las observaciones hechas arriba.

Corolario. *La categoría* tSet^G *de* G*-conjuntos transitivos y la categoría* $\mathsf{O}(G)$ *son equivalentes.*

2.5. Clasificación de revestimientos I

En esta sección y en la siguiente mostramos que en el contexto categórico vale un teorema de clasificación de revestimientos análogo al que vale en topología. Este desarollo sigue el orden del desarollo que se hace en [May99] para el caso de grupoides.

Dado cualquier revestimento $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$, definimos una acción de grupoide (= un funtor) $F(p) : \Pi_1\mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ de la siguiente manera. Para cada $b \in \Pi_1\mathsf{C}$ (i.e., para cada objeto b de C), escribimos

$$F_b(p) = \{\, e \in \mathsf{C}' \mid p(e) = b \,\},$$

y lo llamamos la *fibra de* p *sobre* b. Cuando sólo un revestimiento esté en discusión o no haya riesgo de confusión vamos a escribir simplemente $F = F(p)$ y $F_b = F_b(p)$. Si $[\omega] : b \to b'$ es un morfismo en $\Pi_1\mathsf{C}$ y $e \in F_b$, levantamos ω a $\widehat{\omega} : e \to e'$ con $e' \in F_{b'}$ y definimos

$$F[\omega](e) = e'.$$

Esta definición no depende de la clase de homotopía de ω pues dos caminos homotópicos terminan en el mismo punto. Como la identidad se levanta a la identidad, vemos que $F[1_b] = 1_{F_b}$. La unicidad de los levantados implica que $F[\omega * \eta] = F[\omega] \circ F[\eta]$ (siempre que esto tenga sentido).

Corolario. *Si* C *es conexa, todas las fibras* F_b*,* $b \in \mathsf{C}$*, tienen la misma cardinalidad.*

Por restricción, obtenemos para cada $b \in \mathsf{C}$ una acción de $\pi_1(\mathsf{C}, b)$ en el conjunto F_b. Calculamos su estabilizador: sea $e \in F_b$. Escribimos $\widehat{\omega}$ para denotar el levantado de un lazo ω con punto base b a un camino que comienza en e:

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathsf{C}, b)^e &= \{\, [\omega] \in \pi_1(\mathsf{C}, b) \mid \operatorname{cod}(\widehat{\omega}) = e \,\} \\ &= p_*\pi_1(\mathsf{C}', e).\end{aligned}$$

Aplicando la teoría general, sabemos que existe un monomorfismo de $\pi_1(\mathsf{C}, b)$-conjuntos

$$\pi_1(\mathsf{C}, b)/p_*\pi_1(\mathsf{C}', e) \to F_b.$$

Si además la acción es transitiva (i.e. si C' es conexa) entonces este morfismo resulta un isomorfismo. Si elegimos otro $e' \in F_b$ entonces $p_*\pi_1(\mathsf{C}', e)$ y $p_*\pi_1(\mathsf{C}', e')$ son conjugados en $\pi_1(\mathsf{C}, b)$ y el isomorfismo anterior es compatible con la conjugación.

Ejemplo. Consideramos la categoría C definida como la categoría definida por el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

y la categoría C' dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[r, "\beta"'] & \bullet_2 \arrow[r, "\delta"'] & \bullet_3 \arrow[ll, bend right, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

y definimos un funtor $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ por $p(\beta) = p(\delta) = p(\gamma) = \alpha$. Claramente p es un revestimiento. Claramente $\Pi_1\mathsf{C} = \mathbf{Z}\alpha$, $\pi_1(\mathsf{C}', \bullet_1) = \mathbf{Z}$ y $p_* : \pi_1(\mathsf{C}', \bullet_1) \to \pi_1(\mathsf{C}, \bullet)$ se corresponde con la multiplicación por 3. Luego, $F_\bullet = \{\bullet_1, \bullet_2, \bullet_3\}$ es isomorfo a $\mathbf{Z}/3$ como $\mathbf{Z}$-conjunto.

Una categoría C se dice *simplemente conexa* (o *1-conexa*) si su grupoide fundamental es trivial. Es decir, si existe exactamente un morfismo entre dos objetos cualesquiera.

Definición. Un revestimiento $\mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ se dice *universal* si C' es simplemente conexa.

Luego, si $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ es universal entonces

$$\pi_1(\mathsf{C}, b) \simeq F_b$$

como $\pi_1(\mathsf{C}, b)$-conjuntos. El lema del levantamiento y el hecho de que un morfismo de revestimientos es automáticamente un revestimiento implica que p es único salvo isomorfismo de revestimientos y que cubre cualquier otro revestimiento.

Resulta que p está caracterizado por la acción $F = F(p) : \Pi_1\mathsf{C} \to \mathsf{Set}$. Esto es la esencia de la teoría de Galois en este contexto.

Extendemos la correspondencia $p \mapsto F(p)$ a los morfismos de revestimientos. Si $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$, $q : \mathsf{C}'' \to \mathsf{C}$ son dos revestimientos y $g : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}''$ es un morfismo de revestimientos, se tiene una transformación natural $\widehat{g} : F(p) \to F(q)$ dada por $\widehat{g}_b : F_b(p) \to F_b(q)$, $e \mapsto g(e)$. Si $[\omega] : b \to b'$ es un morfismo en $\Pi_1\mathsf{C}$ se tiene que

$$\begin{tikzcd} F_b(p) \arrow[r] \arrow[d] & F_b(q) \arrow[d] \\ F_{b'}(p) \arrow[r] & F_{b'}(q) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g(e) \arrow[d, mapsto] \\ {[\omega] \cdot e} \arrow[r, mapsto] & g([\omega] \cdot e) = [\omega] \cdot g(e) \end{tikzcd}$$

conmuta. En efecto, $g([\omega] \cdot e) = [\omega] \cdot g(e)$ pues si $\widehat{\omega}$ es un levantado de ω en e, $g_*\widehat{\omega}$ es un camino en C'' que comienza en $g(e)$ y levanta a ω (pues $q_*g_*\widehat{\omega} = p_*\widehat{\omega} = \omega$) y entonces $[\omega] \cdot g(e) = \mathrm{cod}(g_*\widehat{\omega}) = g(\mathrm{cod}(\widehat{\omega})) = g([\omega] \cdot e)$.

Ahora vamos a ir en la dirección opuesta. Nuestro objetivo es construir, al igual que en el caso clásico de espacios topológicos, un funtor $G : \mathsf{Set}^{\Pi_1\mathsf{C}} \to \mathsf{Cov}/\mathsf{C}$, equivalencia inversa de F. Concretamente, queremos un revestimientos a partir de una acción de grupoides $\Pi_1\mathsf{C} \to \mathsf{Set}$.

Esta construcción es análoga a la construcción de un revestimiento topológico a partir de un subgrupo del grupo fundamental de un espacio topológico que se encuentra en cualquier libro de topología, o a la construcción del revestimiento universal de un grupoide (que puede encontrarse en [Br88, May99]). Sin embargo, ninguna de las construcciones es directamente aplicable a este caso, pues en ambos casos se está trabajando con *grupoides,* i.e., todas los morfismos son isomorfismos. Luego, las direcciones de las flechas no juegan ningún papel y la condición de revestimiento se simplifica. El problema de la distinción de la dirección de un morfismo es esencialmente la única característica nueva de nuestra situación. La siguiente construcción está basada en la construcción que se encuentra en [GZ67] del revestimiento universal de un grupoide, modificada para que sirva en nuestro contexto general.

Sea $L : \Pi_1\mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ una acción de grupoides. Definimos un revestimiento $p_L : \mathsf{L} \to \mathsf{C}$ de la siguiente manera. El conjunto de objetos de L está dados por los pares (e, b), donde $b \in \mathsf{C}$ y $e \in L(b)$. Los morfismos $(e, b) \to (e', b')$ están dado por los morfismos $h : b \to b'$ en C tales que $L[h](e) = e'$. Las identidades y la composición están dadas por las de C. Claramente se tiene una proyección canónica $p_L : \mathsf{L} \to \mathsf{C}$, dada por $(e, b) \mapsto b$ en los objetos, que actúa idénticamente en los morfismos. Observar que el conjunto de objetos que se proyectan sobre b es $L(b)$.

Veamos que p_L es un revestimiento. Sea $h : b \to b'$ una flecha de C, $e \in F_b(p_L) = L(b)$. Claramente podemos levantar h de forma única a una flecha de L que comience en e. Sea ahora $e' \in L(b') = F_{b'}(p_L)$ y veamos que existe un único morfismo en L que levanta a h y que *termina* en e'. Como $\Pi_1\mathsf{C}$ es un grupoide, $L[h] : L(b) \to L(b')$ es una biyección y por lo tanto, existe $e \in L(b)$ tal que $L[h](e) = e'$. Claramente el morfismo $h : (e, b) \to (e', b')$ en L levanta a h y es el único con esta propiedad.

Por último, veamos que $L \mapsto p_L$ es funtorial. Supongamos que se tiene $\varphi : L \to L'$ una transformación natural. Queremos definir un morfismo de revestimientos $g : \mathsf{L} \to \mathsf{L}'$.

Definimos g es los objetos: dado $(e, b) \in \mathsf{L}$, ponemos $g(e) = \varphi_b(e) \in L(b')$. Ahora definimos g en las flechas. Si $h : (e, b) \to (e', b')$ es un morfismo en L, definimos $g(h)$ como el morfismo $h : (\varphi_b(e), b) \to (\varphi'_b(e'), b')$ en L'. Es claro que esto esta definición es funtorial. Esto termina la construcción del funtor $G : \mathsf{Set}^{\Pi_1\mathsf{C}} \to \mathsf{Cov}/\mathsf{C}$.

De la construcción se sigue que si $L : \pi_1(\mathsf{C}) \to \mathsf{Set}$ es una acción entonces $F_b = L(b)$ y, más aún, $Fp_L = L$ como funtores. En efecto, basta ver que $L[\omega] = Fp_L[\omega]$ donde $[\omega] : b \to b'$ es una flecha de $\Pi_1\mathsf{C}$. Por funtorialidad, basta ver el caso donde $\omega = h : b \to b'$ es una flecha de C. Recordamos la construcción de Fp_L y la definición de $Fp_L[\omega]$ dada por la acción de $\Pi_1\mathsf{C}$ en las fibras de p_L:

$$Fp_L[\omega](e) = \mathrm{cod}\left[h : (e, b) \to (L[h](e), b')\right] = L[h](e) = L[\omega](e).$$

Como corolario, vemos que $FG = 1_{\mathsf{Cat}}$. Luego, para deducir que F es una equivalencia categórica, basta ver que F es plenamente fiel, i.e., que

$$F : \mathsf{Cov}/\mathsf{C}[p, q] \to \mathsf{Set}^{\Pi_1\mathsf{C}}[Fp, Fq]$$

es una biyección para todo $p, q \in \mathsf{Cov}/\mathsf{C}$.

Vamos a utilizar el lema del levantamiento. Necesitamos reducirnos al caso conexo para utilizarlo. Sean $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ y $q : \mathsf{C}'' \to \mathsf{C}$ revestimientos. Descomponemos C' y C'' en sus componentes conexas:

$$\lambda'_i : \mathsf{C}'_i \to \mathsf{C}' \quad (i \in I)$$
$$\lambda''_j : \mathsf{C}''_j \to \mathsf{C}'' \quad (j \in J)$$

Sea $g : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}''$ un morfismo de revestimientos. Como g manda componentes conexas en componentes conexas, existe una única $\tau : I \to J$ tal que $g\lambda'_i$ se factoriza por $\lambda''_{\tau i}$. Ahora bien, $p_i = p|_{\mathsf{C}'_i}$ y $q_j = q|_{\mathsf{C}''_j}$ son revestimientos pues es muy fácil ver que las inclusiones λ'_i y λ''_j son revestimientos. Esto define aplicaciones $\phi_i : \mathsf{Cov}/\mathsf{C}[p,q] \to \mathsf{Cov}/\mathsf{C}[p_i, q_{\tau i}]$. Abreviamos los conjuntos de morfismos por $[\cdot,\cdot]$ y construimos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[p,q]} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[dd, dashed, "\phi"', "\simeq"] & & {[Fp,Fq]} \arrow[dl] \arrow[dd, dashed, "\simeq"', "\psi"] \\
& {[p_i,q_{\tau i}]} \xrightarrow{F_i} {[Fp_i, Fq_{\tau i}]} & \\
\prod_i [p_i, q_{\tau i}] \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "\prod F_i"'] & & \prod_i [Fp_i, Fq_{\tau i}] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, ϕ y ψ son biyectivas. Por lo tanto, la flecha de arriba es biyectiva si y sólo si lo es la de abajo. Y esta lo será si y sólo si lo es en cada componente, i.e., basta ver que

$$F_i : \mathsf{Cov}/\mathsf{C}[p_i, q_{\tau i}] \to \mathsf{Set}^{\Pi_1 \mathsf{C}}[Fp_i, Fq_{\tau i}]$$

en biyectiva para todo $i \in I$. Recapitulando: F es plenamente fiel si y sólo si lo es en la subcategoría de revestimientos conexos.

Lema. *Sean $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$, $q : \mathsf{C}'' \to \mathsf{C}$ revestimientos con C' conexa. El funtor fibra $F : \mathsf{Cov}/\mathsf{C} \to \mathsf{Set}^{\Pi_1 \mathsf{C}}$ induce una biyección*

$$F : \mathsf{Cov}[p,q] \to \mathsf{Set}^{\Pi_1 \mathsf{C}}[Fp, Fq].$$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathsf{Set}^{\Pi_1 \mathsf{C}}[Fp, Fq]$, $e \in \mathsf{C}'$. Ponemos $b = p(e')$, $e'' = \alpha(e')$. Si $[\omega] \in \pi_1(\mathsf{C}, b)^{e'} = p_*\pi_1(\mathsf{C}', e')$ entonces $[\omega] \cdot e' = e'$ y por lo tanto $e'' = \alpha(e') = \alpha([\omega] \cdot e') = [\omega] \cdot \alpha(e') = [\omega] \cdot e''$. Es decir, $p_*\pi_1(\mathsf{C}', e') \subset p_*\pi_1(\mathsf{C}'', e'')$. Como C' es conexa, existe un único morfismo de revestimientos $g : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}''$ tal que $g(e') = e''$. Veamos que $Fg = \alpha$.

Sea $b \in \mathsf{C}$, $e \in F_b(p)$. Entonces

$$(Fg)_b(e) = g(e) = g([\omega'] \cdot e') = [\omega] \cdot g(e') = [\omega] \cdot e'' = \alpha(e)$$

donde la tercer igualdad vale pues Fg es un $\Pi_1\mathsf{C}$-morfismo y la última igualdad vale pues α lo es. $\square$

Corolario. *Sea C una categoría. Entonces el funtor F determina una equivalencia de categorías*

$$\mathsf{Cov}/\mathsf{C} \simeq \mathsf{Set}^{\Pi_1 \mathsf{C}}$$

con cuasi-inversa G.

2.6. Clasificación de revestimientos II

En esta sección hacemos variar la categoría base C y estudiamos como se comporta la clasificación anterior al hacer estos cambios.

Sean $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ y $f : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ funtores. Tomando pullback obtenemos un funtor $f^*(p) : \mathsf{D} \times_{\mathsf{C}} \mathsf{C}' \to \mathsf{D}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \times_{\mathsf{C}} \mathsf{C}' \arrow[r] \arrow[d, "f^*(p)"'] \arrow[dr, phantom, "pull"] & \mathsf{C}' \arrow[d, "p"] \\
\mathsf{D} \arrow[r, "f"'] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

La propiedad universal del pullback implica inmediatamente el siguiente resultado.

Lema. *Si* $\mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ *es un revestimiento entonces* $\mathsf{D} \times_{\mathsf{C}} \mathsf{C}' \to \mathsf{D}$ *también lo es.*

Como f^* es claramente funtorial (módulo detalles 2-categóricos), por restricción tenemos definido un funtor $\mathsf{Cov}/f : \mathsf{Cov}/\mathsf{C} \to \mathsf{Cov}/\mathsf{D}$. Por otra parte, f induce el funtor $\Pi_1 f : \Pi_1\mathsf{D} \to \Pi_1\mathsf{C}$ y por lo tanto se tiene un funtor

$$\mathsf{Set}^{\Pi_1 f} : \mathsf{Set}^{\Pi_1\mathsf{C}} \to \mathsf{Set}^{\Pi_1\mathsf{D}}.$$

Estos funtores encajan en un cuadrado conmutativo (salvo isomorfismo natural):

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \arrow[d, "f"'] & \mathsf{Cov}/\mathsf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathsf{Cov}/f"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \mathsf{Set}^{\Pi_1\mathsf{C}} \arrow[d, "\mathsf{Set}^{\Pi_1 f}"] \\
\mathsf{C} & \mathsf{Cov}/\mathsf{D} \arrow[r, "F"'] & \mathsf{Set}^{\Pi_1\mathsf{D}}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Veamos la conmutatividad del diagrama. Sea $p \in \mathsf{Cov}/\mathsf{C}$.

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, mapsto, "F"] \arrow[d, mapsto, "f^*"'] & Fp \arrow[d, mapsto, "f^*"] \\
f^*(p) \arrow[r, mapsto, "F"] & F(f^*(p)) = Fp \circ f
\end{tikzcd}$$

Tenemos que ver que los funtores $Fp \circ f$ y $F(f^*(p))$ son naturalmente isomorfos. Sea $d \in \mathsf{C}$. Entonces

$$\begin{aligned}
F(f^*(p))(d) &= \{d\} \times \{\, e \in \mathsf{D} \mid p(e) = f(d) \,\} \\
&\simeq Fp(f(d)) = (Fp \circ f)(d)
\end{aligned}$$
□

Corolario. *Sean* C, D *categorías (pequeñas). Entonces* $\mathsf{Cov}/f : \mathsf{Cov}/\mathsf{C} \to \mathsf{Cov}/\mathsf{D}$ *es una equivelancia de categorías si y sólo si* $\Pi_1 f : \Pi_1\mathsf{D} \to \Pi_1\mathsf{C}$ *es una equivalencia de grupoides.*

Demostración. Ver el último resultado del primer capítulo. □

Caso de la categoría base conexa

Queremos ver qué podemos decir si la categoría base C es conexa.

Recordamos la siguiente definición general: si X es una categoría y $\mathsf{X}' \subset \mathsf{X}$ es una subcategoría tal que todo objeto de X es isomorfo a exactamente un objeto de X', decimos que X' es un *esqueleto* de X. En este caso, la inclusión $\mathsf{X}' \to \mathsf{X}$ es una equivalencia de categorías.

Ahora bien, C es conexa si y sólo si $\Pi_1\mathsf{C}$ lo es. En este caso, eligiendo $b \in \mathsf{C}$, $\pi_1(\mathsf{C}, b) \to \Pi_1\mathsf{C}$ es un esqueleto. Luego, la restricción

$$\mathsf{Set}^{\Pi_1\mathsf{C}} \to \mathsf{Set}^{\pi_1(\mathsf{C},b)}$$

es una equivalencia. Componiendo con la equivalencia anterior $F : \mathsf{Cov}/\mathsf{C} \to \mathsf{Set}^{\Pi_1\mathsf{C}}$ obtenemos una equivalencia

$$\mathsf{Cov}/\mathsf{C} \simeq \mathsf{Set}^{\pi_1(\mathsf{C},b)}.$$

Caso de revestimientos conexos

Ahora nos restringimos aún más: sólo queremos considerar revestimientos conexos. Observar que $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ es un revestimiento conexo si y sólo si la acción de $\Pi_1\mathsf{C}$ en las fibras es transitiva (i.e., cada $\pi_1(\mathsf{C}, b)$ actua transitivamente).

En este caso, la equivalencia anterior se restringe a una equivalencia:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Cov}/\mathsf{C} \arrow[r] & \mathsf{Set}^{\pi_1(\mathsf{C},b)} \\ \mathsf{cCov}\ \mathsf{C} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{inc}"] & \mathsf{tSet}^{\pi_1(\mathsf{C},b)} \arrow[u, "\mathrm{inc}"'] \end{tikzcd}$$

Ahora bien, por la teoría general, sabemos que se tiene una equivalencia de categorías

$$\mathsf{O}(\pi_1(\mathsf{C}, b)) \simeq \mathsf{tSet}^{\pi_1(\mathsf{C},b)}.$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente equivalencia

$$\mathsf{Cov}/\mathsf{C} \simeq \mathsf{O}(\pi_1(\mathsf{C}, b)).$$

Observar que esta es la equivalencia de categorías análoga a la que normalmente se demuestra en los cursos de topología para el caso clásico.

3 Conjuntos simpliciales y revestimientos simpliciales

En este capítulo introducimos la noción de conjunto simplicial y estudiamos en detalle sus propiedades básicas. Un conjunto simplicial busca capturar la esencia combinatoria de los CW-complejos. Esta noción tiene innumerables usos y se presta particularmente bien para servir de puente entre las categorías Cat y Top via ciertos funtores de "categorización" y "realización geométrica." El uso que le daremos nosotros está relacionado con este último punto.

3.1. Conjuntos simpliciales

Sea Δ la siguiente categoría: los objetos de Δ son los conjuntos ordenados $[n] = \{\, 0 < 1 < \cdots < n \,\}$ ($n \in \mathbf{N}$) y los morfismos $[n] \to [m]$ son las funciones no decrecientes. En particular, se tienen los siguientes morfismos:

- $\delta_n^i : [n-1] \to [n]$ es la única función inyectiva no decreciente que *no* toma el valor $i \in [n]$.
- $\sigma_n^i : [n+1] \to [n]$ es la única función sobreyectiva no decreciente que toma dos veces el valor $i \in [n]$.

Muchas veces no vamos a escribir el índice n si está claro del contexto. Estos morfismos verifican las siguientes *relaciones de conmutación.*

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1}^j \delta_n^i &= \delta_{n+1}^i \delta_n^{j-1} && i < j \\
\sigma_n^i \sigma_{n+1}^i &= \sigma_n^i \sigma_{n+1}^{i+1} && i \leq j \\
\sigma_{n-1}^j \delta_n^i &= \delta_{n-1}^i \sigma_{n-2}^j && i < j \\
\sigma_{n-1}^j \delta_n^j &= \sigma_{n-1}^j \delta_n^{j+1} = 1_{[n-1]} && \\
\sigma_{n-1}^j \delta_n^i &= \delta_{n-1}^{i-1} \sigma_{n-2}^j && i > j+1.
\end{aligned}$$

Lema. *Todo morfismo $\mu : [m] \to [n]$ en Δ se factoriza de forma única como*

$$\mu = \delta_n^{i_s} \delta_{n-2}^{i_{s-1}} \ldots \delta_{n-t+1}^{i_1} \sigma_{m-t}^{j_t} \cdots \sigma_{m-2}^{j_2} \sigma_{m-1}^{j_1}$$

con $n \geq i_s > \cdots > i_1 \geq 0$, $0 \leq j_t < \cdots < j_1 < m$ y $n + t = m + s$.

Demostración. Sean $j_t < j_{t-1} < \cdots < j_1$ los elementos $j \in [m]$ tales que $\mu(j) = \mu(j+1)$ y sean $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ los valores $i \in [n]$ que no están en la imagen de μ. Es claro que vale la factorización del enunciado. Recíprocamente, si μ se escribe como en el enunciado, los índices i_k y j_l están caracterizados de esta manera. $\square$

Vamos a decir que la factorización anterior es la *descomposición canónica de μ en Δ.*

Definición. Sea C una categoría. Un *objeto simplicial* en C es un funtor $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$. Un morfismo entre objetos simpliciales es una transformación natural entre los correspondientes funtores. La categoría de objetos simpliciales en C se denota por $\mathsf{C}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$.

Si $X \in \mathsf{C}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$, escribimos $X_q \in \mathsf{C}$ para denotar la imagen del objeto $[q] \in \Delta$. Además, escribimos $d_i = d_i^n = X(\delta_n^i) : X_n \to X_{n-1}$ (las "caras") y $s_j = s_j^n = X(\sigma_j^n) : X_n \to X_{n+1}$ (las "degeneraciones"). Observamos que los morfismos d_i, s_j satisfacen relaciones "duales" a las relaciones de conmutación de δ^i, σ^j. Por lo tanto, dar un objeto simplicial en C es lo mismo que dar una sucesión de objetos $X_n \in \mathsf{C}$ y morfismos $d_i^n : X_n \to X_{n-1}$, $s_j^n : X_n \to X_{n+1}$ tales que valen estas relaciones.

Observación. Si $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es un funtor, entonces todo objeto simplicial $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$ da lugar a un objeto simplicial $FX : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{D}$.

Homología de un objeto simplicial

Sea R un anillo y consideremos la categoría ${}_R\mathsf{Mod}$ de R-módulos a izquierda (o, más generalmente, cualquier categoría *abeliana*). Si $M : \Delta^{\mathrm{op}} \to {}_R\mathsf{Mod}$ es un *R-módulo simplicial*, podemos utilizar la estructura aditiva de la categoría para "promediar" sus caras y definir morfismos $d : M_n \to M_{n-1}$ por

$$d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i,$$

Las identidades simpliciales implican que $d^2 = 0$. Definimos la *homología de M* como la homología del complejo $(M_., d)$:

$$H_q(M) = \frac{\ker(d : M_n \to M_{n-1})}{\operatorname{im}(d : M_{n+1} \to M_n)} \in {}_R\mathsf{Mod}.$$

En particular, si $X \in \mathsf{C}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ es un objeto simplicial y se tiene un funtor $F : \mathsf{C} \to {}_R\mathsf{Mod}$ para alguna categoría C, podemos definir la *homología de X con coeficientes en F* como la homología del R-módulo simplicial FX.

$$H_q(X, F) = H_q(FX) = \frac{\ker(FX_n \to FX_{n-1})}{\operatorname{im}(FX_{n+1} \to FX_n)} \in {}_R\mathsf{Mod}.$$

Ejemplo. Sea C una categoría con productos y sea $X \in \mathsf{C}$. El *complejo de Čech* asociado a X es el conjunto simplicial definido por

$$X_q = X \times X \times \cdots \times X \quad (q \text{ veces})$$

El morfismo de borde $d_i^n : X_n \to X_{n-1}$ es la proyección en el producto de $n-1$ copias de X, donde se ignora la i-ésima copia. La degeneración $s_i^n : X_n \to X_{n+1}$ es inducida por la identidad de X y la diagonal $\Delta : X \to X \times X$ en el i-ésimo lugar.

Consideramos el siguiente caso particular. Tomamos $X \in \mathsf{Top}$, O como la subcategoría de Top generada por uniones disjuntas de abiertos de X y sus inclusiones. Sea $\mathcal{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces $\mathcal{U} = \coprod U_i$ define un objeto de O. Dado un funtor $F : \mathsf{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ (lo que se conoce como un *prehaz en* X), podemos extenderlo de manera canónica a un funtor $F : \mathsf{O}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$. Entonces tiene sentido considerar la homología del complejo de Čech asociado a $\mathcal{U} \in \mathsf{O}$ con coeficientes en F. Como F cambia el sentido de las flechas, notamos a los grupos de homología por $H^q(\mathcal{U}, F)$ y lo llamamos la *cohomología de Čech de* X *con coeficientes en el prehaz* F *subordinada al cubrimiento* $\mathcal{U}$. Tomando un límite sobre todos los cubrimientos $\mathcal{U}$ de X se obtiene la *cohomología de Čech de* X *con coeficientes en el prehaz* F.

Volviendo a la situación general, nos va a interesar estudiar el caso de *conjuntos simpliciales,* es decir, objetos simpliciales en Set. Denotamos esta categoría por $\mathsf{SSet} = \mathsf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$. Si $X \in \mathsf{SSet}$, decimos que los elementos $x \in X_q$ son *q-símplices.* A veces vamos a escribir *vértices* y *aristas* en vez de 0-símplices y 1-símplices, respectivamente.

Para cada $[n] \in \Delta$, denotamos $\Delta[n] \in \mathsf{SSet}$ el representable $[k] \mapsto \Delta\,[[k],[n]]$ y lo llamamos el *n-simplex standard.* La identidad $1_{[n]} \in \Delta[n]_n$ es un n-simplex de $\Delta[n]$ y, por Yoneda, si $x \in X_n$ es un n-simplex, existe un único morfismo simplicial $\Delta[n] \to X$ que manda este simplex a x. Generalmente, vamos de la abusar la notación e identificar $x \in X_n$ con el morfismo asociado $x : \Delta[n] \to X$.

Ejemplo. Para $n \geq 0$, definimos el *n-simplex topológico standard* $\Delta^n \in \mathsf{Top}$ como

$$\Delta^n = \{ (t_0, \dots, t_n) \mid 0 \leq t_i \leq 1, t_0 + \dots + t_n = 1 \} \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

Si $X \in \mathsf{Top}$ es un espacio topológico, un *n-simplex singular* de X es una función continua $\Delta^n \to X$. El conjunto graduado $S(X)$ donde $S_n(X) = \mathsf{Top}[\Delta^n, X]$ se llama el *complejo singular de* X. Le damos estructura de conjunto simplicial definiendo las degeneraciones y las caras por

$$(d_i f)(t_0, \dots, t_{n-1}) = f(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}),$$
$$(s_i f)(t_0, \dots, t_{n+1}) = f(t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{n+1}).$$

La homología singular de un espacio topológico puede definirse a partir de este conjunto simplicial. En efecto, consideramos el funtor "libre" $F_R : \mathsf{Set} \to {}_R\mathsf{Mod}$, $S \mapsto R^{(S)}$, donde $R^{(S)}$ es el R-módulo libre con base S. Los grupos de homología singular de X con coeficientes en R son exactamente los grupos de homología de $S(X)$ con coeficientes en el funtor F_R:

$$H_q(X, R) = H_q(S(X), F_R).$$

Volviendo a la situación general, si X es un conjunto simplicial y $x \in X_m$ un m-simplex, decimos que x es *degenerado* si existe un epimorfismo $s : [m] \to [n]$ con $n < m$ y un n-simplex $y \in X_n$ tal que $X(s)(y) = x$. Observar que $\Delta[n]$ tiene un único n-simplex no degenerado dado por $1_{[n]} \in \Delta[n]_n$. La siguiente proposición es básica.

Lema de Eilenberg-Zilber. *Para cada m-simplex $x \in X_m$ existe un epimorfismo $s : [m] \to [n]$ y un n-simplex $y \in X_n$ no degenerado tal que $x = X(s)(y)$. Además el par (s, y) es único.*

Demostración. [GZ67, p. 26]. □

Esqueleto de un conjunto simplicial

Consideramos la subcategoría plena $\Delta_{\leq n} \subset \Delta$ generada por objetos $[p]$ con $p \leq n$. Llamamos a la categoría de funtores $\Delta_{\leq n}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ la categoría de *conjuntos simpliciales truncados de orden* n y la denotamos por $\mathsf{SSet}_{\leq n}$. Como SSet es cocompleta, podemos extender la inclusión $\Delta_{\leq n} \to \Delta \to \mathsf{SSet}$ a $\mathsf{SSet}_{\leq n}$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{SSet}_{\leq n} \arrow[dr, dashed, "L_n"] & \\ \Delta_{\leq n} \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{SSet} \end{tikzcd}$$

Además el funtor extendido L_n tiene un adjunto a derecha R_n dado por $R_n(X)_q = \mathsf{SSet}(\Delta[q], X)$, i.e., $R_n : \mathsf{SSet} \to \mathsf{SSet}_{\leq n}$ es la restricción.

Si $q \leq n$ se tienen isomorfismos naturales $(R_n L_n Y)_q = \mathsf{SSet}(\Delta[q], L_n Y) \simeq (L_n Y)_q \simeq Y_q$ y, por lo tanto, la unidad $\psi_n : 1_{\mathsf{SSet}_{\leq n}} \to R_n L_n$ resulta un isomorfismo natural. Luego, L_n es plenamente fiel.

Sea ahora $\phi_n : L_n R_n \to 1$ la counidad de la adjunción. El siguiente lema muestra que L_n le agrega a un conjunto simplicial truncado la "mínima" cantidad de símplices necesarios para obtener un conjunto simplicial (esencialmente, las degeneraciones de los símplices del conjunto truncado).

Lema. *ϕ_n es un monomorfismo, i.e., $(\phi_{n,X})_q : (L_n R_n X)_q \to X_q$ es una función inyectiva para todo $X \in \mathsf{SSet}$ y $q \geq 0$.*

Demostración. Sea $Z = L_n R_n X$. La naturalidad de la adjunción $L_n \dashv R_n$ implica que $R_n \phi_{n,X}$ es una retracción de $\psi_{n,R_n X}$.

Como ψ_n es inversible, $R_n \phi_n$ es inversible y $(\phi_{n,X})_p$ es una biyección para $p \leq n$. Por otra parte, vimos que Z es el colímite del funtor $\Gamma_{R_n X} \to \Delta_{\leq n} \to \mathsf{SSet}$ dado, en los objetos, por $\beta \in (R_n X)_p \mapsto \Delta[p]$. En particular, Z es un cociente de un coproducto de símplices standard $\Delta[p]$ con $p \leq n$. Pero todo q-simplex de $\Delta[p]$ es degenerado si $q > p$ y por lo tanto, lo mismo ocurre con los q-símplices de Z. Luego, es suficiente probar que *si $f : Z \to X$ es un morfismo de complejos tal que f_p es inyectiva para $p \leq n$ y tal que todos los q-símplices de Z son degenerados para $q > n$ entonces f_p es inyectiva para todo p.*

Sea z, z' dos q-símplices de Z tales que $q > n$. Por el lema de Eilenberg-Zilber, existen epimorfismos $s : [q] \to [p]$, $s' : [q] \to [p']$ y símplices no degenerados x, x' tales que $z = Z(s)(x)$ y $z' = S(s')(x')$. Necesariamente $p, p' \leq n$. Como f_r es inyectiva si $r \leq n$, $f_p(x)$ y $f_{p'}(x')$ son no degenerados. Luego, $(s, f_p(x))$, $(s', f_{p'}(x'))$ son las descomposiciones dadas por el lema de Eilenberg-Zilber correspondientes a $f_q(z)$ y $f_q(z')$. La igualdad $f_q(z) = f_q(z')$ implica que $s = s'$, $x = x'$ y por lo tanto $z = z'$. □

Si X e Y son conjuntos simpliciales, vamos a decir que Y es un subcomplejo de X si Y es un subfuntor de X, i.e., si $Y_q \subset X_q$ para todo $q \in \mathbf{N}$ y los morfismos de Y están inducidos por aquellos de X. El *n-esqueleto* $\operatorname{Sk}^n X$ de un conjunto simplicial X es el subcomplejo Y de X tal que Y_p está formado por todos los $x \in X_p$ tales que existe un epimorfismo $s : [p] \to [q]$, $q \leq n$ y un q-simplex y de X tal que $x = X(s)(y)$).

Corolario. *Para cada $X \in \mathsf{SSet}$, $\phi_{n,X} : L_n R_n X \to X$ induce un isomorfismo entre $L_n R_n X$ y el n-esqueleto $\operatorname{Sk}^n X$ de X.*

Demostración. Vimos arriba que $(\phi_{n,X})_p$ es inyectiva para todo p. Por otra parte, cada símplice de $L_n R_n X$ es una degeneración de un p-simplex con $p \leq n$. Lo mismo ocurre con la imagen de $L_n R_n X$ y por lo tanto está contenida en $\operatorname{Sk}^n X$. Si $s : [p] \to [q]$ es un epimorfismo en Δ con $q \leq n$ y si y es un q-simplex de X, y está en la imagen de algún $z \in (L_n R_n X)_q$ pues $(\phi_{n,X})_q$ es una biyección si $q \leq n$. Por lo tanto, $X(s)(y)$ es la imagen de una degeneración de z, lo que prueba que el morfismo $(L_n R_n X)_p \to (\operatorname{Sk}^n X)_p$ es suryectivo. □

De ahora en más, diremos que un conjunto simplicial X *tiene dimensión* $\leq n$ si $X = \operatorname{Sk}^n X$. En este caso, X es isomorfo a $L_n R_n X$ y por lo tanto es un cociente de un coproducto de p-símplices standard $\Delta[p]$ con $p \leq n$. La afirmación recíproca es evidente. Por lo tanto, se tiene el siguiente corolario.

Corolario. *Los funtores L_n y R_n inducen una equivalencia entre la categoría $\mathsf{SSet}_{\leq n}$ de complejos simpliciales truncados de orden n y la subcategoría plena de SSet generada por los conjuntos simpliciales de dimensión $\leq n$.*

Ejemplo. Sea $X = \Delta[n]$ el n-simplex standard. Claramente $\Delta[n]$ es de dimensión $\leq n$. Como $1_{[n]} \in \Delta[n]_n$ es un n-simplex no degenerado que "genera" $\Delta[n]$, vemos que $\Delta[n]$ tiene dimensión exactamente n y que cualquier subcomplejo de $\Delta[n]$ diferente de $\Delta[n]$ está contenido en su $(n-1)$-esqueleto $\operatorname{Sk}^{n-1} \Delta[n]$ que denotaremos por $\dot{\Delta}[n]$.

Sea X un conjunto simplicial. Claramente, X es la unión de sus esqueletos:

$$\emptyset = \operatorname{Sk}^{-1} X \subset \operatorname{Sk}^0 X \subset \operatorname{Sk}^1 X \subset \cdots \subset \operatorname{Sk}^n X \subset \ldots .$$

El 0-esqueleto $\operatorname{Sk}^0 X$ tiene los mismos 0-símplices que X y es isomorfo a una suma directa de símplices $\Delta[0]$. En general, queremos calcular $\operatorname{Sk}^n X$ en términos de $\operatorname{Sk}^{n-1} X$. Sea Σ^n el conjunto de n-símplices no degenerados $\sigma : \Delta[n] \to X$.

Proposición. *Con la notación anterior, el siguiente cuadrado es un pushout para todo $n \geq 0$.*

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\sigma\in\Sigma^n} \dot{\Delta}[n]_\sigma \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & \operatorname{Sk}^{n-1} X \arrow[d, "\mathrm{inc}"] \\
\coprod_{\sigma\in\Sigma^n} \Delta[n]_\sigma \arrow[r] & \operatorname{Sk}^n X
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como todos los conjuntos simpliciales que aparecen en el cuadrado tiene dimensión $\leq n$, basta ver que el siguiente cuadrado es un pushout de conjuntos para

$p \leq n$.

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\sigma\in\Sigma^n}(\dot{\Delta}[n]_\sigma)_p \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & (\mathrm{Sk}^{n-1} X)_p \arrow[d, "\mathrm{inc}"] \\ \coprod_{\sigma\in\Sigma^n}(\Delta[n]_\sigma)_p \arrow[r] & (\mathrm{Sk}^{n} X)_p \end{tikzcd}$$

Esto está claro cuando $p < n$ pues, en este caso, las flechas verticales son biyecciones. Si $p = n$, el complemento de $\coprod(\dot{\Delta}[n]_\sigma)_n$ en $\coprod(\Delta[n]_\sigma)_n$ consiste de los símplices $(1_{[n]})_\sigma$. Análogamente, el complemento de $(\mathrm{Sk}^{n-1} X)_n$ en $(\mathrm{Sk}^n X)_n$ consiste de todos los n-símplices no degenerados de X. Por lo tanto, la aplicación $(\sigma)_n$ induce una biyección entre el complemento de $\coprod(\dot{\Delta}[n]_\sigma)_n$ y el complemento de $(\mathrm{Sk}^{n-1} X)_n$ de donde se sigue lo que queremos. □

Por último, daremos una presentación util de $\dot{\Delta}[n]$. Consideramos el diagrama

$$\coprod_{0\leq i<j\leq n}\Delta[n-2]_{i,j} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leq i\leq n}\Delta[n-1]_i \xrightarrow{p} \Delta[n]$$

donde $\Delta[n-1]_i$ y $\Delta[n-2]_{i,j}$ son copias de $\Delta[n-1]$ y $\Delta[n-2]$, respectivamente, p está inducido por los bordes $\Delta(\delta^i_n) : \Delta[n-1]_i \to \Delta[n]$ y u (resp. v) está inducido por los morfismos $\Delta(\delta^{j-1}_{n-1}) : \Delta[n-2]_{i,j} \to \Delta[n-1]_i$ (resp. $\Delta(\delta^i_{n-1}) : \Delta[n-2]_{i,j} \to \Delta[n-1]_j$.

Es claro que, para cada q, la imagen de la aplicación

$$p_q : \coprod(\Delta[n-1]_i)_q \to \Delta[n]_q$$

no es otra cosa que el conjunto de q-símplices de $\dot{\Delta}[n]$. Más aún, esta aplicación es el coegalizador de u_q, v_q. Es decir, el siguiente diagrama es un coegalizador en SSet.

$$\coprod_{0\leq i<j\leq n}\Delta[n-2]_{i,j} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leq i\leq n}\Delta[n-1]_i \xrightarrow{p} \dot{\Delta}[n].$$

3.2. Interludio: pushouts en Δ

Sean $i : [s] \to [n]$ y $j : [s] \to [m]$ dos morfismos de Δ. Vamos a investigar cuando existe su pushout. Observemos que el pushout existe siempre en la categoría Ord de conjuntos parcialmente ordenados. En efecto, sea $P = [n]\coprod_{[s]}[m]$ la unión disjunta de los conjuntos $[n]$ y $[m]$ móduolo la relación $i(r) \sim j(r)$ para todo $r \in [s]$. Introducimos el siguiente orden en P: $r \leq r'$ si y sólo si $r \leq r'$ en $[n]$ o $r \leq r'$ en $[m]$ o bien si existe $t \in [s]$ tal que $r \leq i(t)$ en $[n]$, $j(t) \leq r'$ en $[m]$. Una comprobación fácil muestra que P con las dos proyecciones naturales es el pushout de i y j en Ord (esta categoría no tiene en general pushouts, pero en este caso existen pues todos los conjuntos involucrados están totalmente ordenados).

A veces puede ocurrir que el orden anterior sea un buen orden. En este caso P es (isomorfo a) un objeto de Δ y por lo tanto, el pushout va a existir en Δ. Por otra parte, si el orden no es un buen orden, entonces el pushout *no* existe en Δ. En efecto, supongamos que el orden en P no es total. Como P es finito, esto quiere decir que existen dos elementos de P que no se pueden comparar. Es decir, existen $r \in [n]$, $r' \in [m]$ tales que no existe ningún $t \in [s]$ con $r \leq i(t)$ en $[n]$ y $j(t) \leq r'$ en $[m]$. Supongamos que el pushout de i y de j existe en Δ. Entonces podemos completar el siguiente cuadrado de forma universal.

$$\begin{tikzcd} {[s]} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & {[n]} \arrow[d, dashed, "\mu"] \\ {[m]} \arrow[r, dashed, "\lambda"'] & {[l]} \end{tikzcd}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mu(r) < \lambda(r')$ en $[l]$. Obsevemos que r (resp. r') no está en la imagen de i (resp. j) (sino, se podrían comparar). Definimos $\kappa : [n] \to [2]$, $\tau : [m] \to [2]$ por

$$\kappa(k) = \begin{cases} 0 & 0 \leq k < r, \\ 1 & r \leq k \leq n, \end{cases} \qquad \tau(k) = \begin{cases} 0 & 0 \leq k \leq r', \\ 1 & r' < k \leq m. \end{cases}$$

Afirmamos que $\tau j = \kappa i$. En efecto, sea $t \in [s]$. Supongamos que $\tau(j(s)) = 0$, $\kappa(i(s)) = 1$. Mirando las definiciones anteriores, esto quiere decir que $j(s) \leq r'$, $r \leq i(s)$. Como r, r' no se pueden comparar en P, esto es imposible. Luego, $\tau(j(s)) = 0$ implica que $\kappa(i(s)) = 0$. Una contradicción análoga ocurre si $\kappa(i(s)) = 0$, $\tau(j(s)) = 1$. Por lo tanto, existe una única $\phi : [l] \to [2]$ tal que

$$\begin{tikzcd} {[s]} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & {[n]} \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, bend left, "\kappa"] & \\ {[m]} \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[rr, bend right, "\tau"'] & {[l]} \arrow[r, dashed, "\phi"] & {[2]} \end{tikzcd}$$

conmuta. Pero observemos que $\phi(\lambda(r')) = \tau(r') = 0 < 1 = \kappa(r) = \phi(\mu(r))$. De esta contradicción concluimos entonces que no puede existir el pushout en la categoría Δ.

Corolario. *Sean $i : [s] \to [n]$, $j : [s] \to [m]$ dos morfismos de Δ. Entonces el pushout de i, j existe si y sólo si P (con la notación de arriba) es un conjunto bien ordenado. En particular, esto ocurre si i, j son sobreyectivas.*

3.3. Nervio y categorización

En esta sección estudiaremos la relación entre categorías y conjuntos simpliciales. Varios de los resultados expuestos aquí pueden encontrarse en [GZ67]. Sin embargo, algunas demostraciones son más detalladas que las encontradas allí. Además, se demuestra aquí una caracterización de aquellos conjuntos simpliciales que son isomorfos al nervio de alguna categoría. La demostración, si bien el resultado es conocido, no puede encontrarse explícitamente en la literatura usual.

Llamamos $i : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Cat}$ la inclusión como subcategoría plena. Consideramos la restricción $i : \Delta \to \mathsf{Cat}$. Como Cat es cocompleta, sabemos que podemos extender i a un funtor $\mathsf{c} : \mathsf{SSet} \to \mathsf{Cat}$. Además, existe un funtor $N : \mathsf{Cat} \to \mathsf{SSet}$ adjunto a derecha de c definido por $N\mathsf{C} = \mathsf{Cat}[i(-), \mathsf{C}]$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{SSet} \arrow[dr, dashed, "\mathsf{c}"] & \\ \Delta \arrow[u, "h^{\Delta}"] \arrow[r, "i"'] & \mathsf{Cat} \end{tikzcd}$$

Llamos funtor *nervio* a N y *categorización* a c. Queremos estudiarlos un poco más a fondo. La definición de N es explícita. Los q-símplices de $N\mathsf{C}$ no son otra cosa que diagramas en C de la forma

$$c_0 \to c_1 \to \cdots \to c_q.$$

La i-ésima cara actua componiendo en el lugar i y las degeneraciones actuan insertando identidades.

Observación. El funtor $i : \Delta \to \mathsf{Cat}$ es plenamente fiel. También lo es el funtor $\mathsf{Cat}[-, \mathsf{C}] = h^{\mathsf{Cat}}\mathsf{C}$ por Yoneda. Luego, N es plenamente fiel. Equivalentemente, la counidad $\mathsf{c}N \to 1_{\mathsf{Cat}}$ es un isomorfismo.

Para describir explícitamente el funtor $\mathsf{c} : \mathsf{SSet} \to \mathsf{Cat}$ tenemos que trabajar un poco más.

Lema (Gabriel-Zisman). *Si $n > 2$, la inclusión $\dot{\Delta}[n] \to \Delta[n]$ induce un isomorfismo $\mathsf{c}\dot{\Delta}[n] \to \mathsf{c}\Delta[n] \simeq i[n]$. Si $n = 1$, $\mathsf{c}\dot{\Delta}[n]$ es una categoría discreta; si $n = 2$, $\mathsf{c}\dot{\Delta}[n]$ tiene 3 objetos, denotados 0, 1 y 2; además de las identidades, $\mathsf{c}\dot{\Delta}[n]$ tiene 4 morfismos: $u : 1 \to 2$, $v : 0 \to 2$, $w : 0 \to 1$ y $u \circ w$.*

Demostración. El lema es trivial si $n = 1$. Supongamos que $n > 1$. Como c es un adjunto a izquierda, conmuta con colímites y por lo tanto, $\mathsf{c}\dot{\Delta}[n]$ es el coegalizador de

$$\coprod_{0\leq i<j\leq n} \mathsf{c}\Delta[n-2]_{i,j} \overset{\mathsf{c}u}{\underset{\mathsf{c}v}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leq i\leq n} \mathsf{c}\Delta[n-1]_i.$$

Escribimos $[p_k]$ el subconjunto de $[p]$ formado por todos los enteros diferentes de k y $[p_{k,l}]$ aquel formado por aquellos diferentes de k y de l. Con esta notación, el diagrama anterior se identifica (cambiando $[n-1]_i$ por $[n_i]$) con

$$\coprod_{0\leq i<j\leq n} i[n_{i,j}] \overset{u'}{\underset{v'}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leq i\leq n} i[n_i],$$

donde u' y v' son los morfismos inducidos por la inclusión de $[n_{i,j}]$ en $[n_i]$ y $[n_j]$ respectivamente y por lo tanto, $\mathsf{c}\dot{\Delta}[n]$ es el coegalizador C de este diagrama en Cat. Nos refirimos a la sección de los preliminares categóricos correspondiente para construirlo. El colímite de este diagrama en la categoría de grafos es el grafo subyacente a $i[n]$. Luego, C es el cociente de la categoría de caminos $\mathsf{Pa}\, i[n]$ de este grafo por unas ciertas relaciones. En particular, se deduce lo que se afirma sobre $\dot{\Delta}[2]$. Si $n > 2$, sea

$$\alpha = (a, a_1) \circ (a_1, a_2) \circ \cdots \circ (a_k, b)$$

un morfismo de $\mathsf{Pa}\, i[n]$ (donde indicamos por (a,b) el camino determinado por el único morfismo $a \leq b$ de $i[n]$). Entonces a, a_1, a_2 pertenecen al mismo $[n_i]$ pues $n > 2$. Por lo tanto, (a, a_2) y $(a, a_1) \circ (a, a_2)$ tienen la misma imagen en C y por lo tanto lo mismo pasa con α y $(a, a_2) \circ \cdots \circ (a_k, b)$. Por inducción en k, vemos que α y (a,b) tienen la misma imagen en C, lo que muestra que cualquesquiera dos objetos de C están conectados por una y sólo una flecha. Como el conjunto de objetos de C es el mismo que aquel de $i[n]$ (por construcción del colímite), se deduce que $\mathsf{c}\dot{\Delta}[n] \to \mathsf{c}\Delta[n]$ es un isomorfismo (si $n \geq 2$). □

Sea ahora $X \in \mathsf{SSet}$. Como c preserva colímites, obtenemos que el siguiente cuadrado es un pushout de categorías y funtores:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\sigma\in\Sigma^n} \mathsf{c}\dot{\Delta}[n]_\sigma \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "push"] & \mathsf{c}\,\mathrm{Sk}^{n-1} X \arrow[d] \\
\coprod_{\sigma\in\Sigma^n} \mathsf{c}\Delta[n]_\sigma \arrow[r] & \mathsf{c}\,\mathrm{Sk}^{n} X
\end{tikzcd}$$

Pero, para $n > 2$, la flecha de la izquierda es un isomorfismo por el lema y por lo tanto lo mismo es cierto de la flecha de la derecha. Como $X = \operatorname{colim} \mathrm{Sk}^n X$, tenemos que

$$\mathsf{c}X = \operatorname{colim} \mathsf{c}\,\mathrm{Sk}^n X = \mathsf{c}\,\mathrm{Sk}^2 X.$$

Afortunadamente, se puede dar una descripción de $\mathsf{c}\,\mathrm{Sk}^2 X$ fácilmente. Claramente tener un funtor $\mathsf{Dis}\, X_0 \to \mathsf{C}$ (donde $\mathsf{Dis}\, X_0$ es la categoría discreta que tiene a X_0 como conjunto de objetos) es equivalente a tener un morfismo simplicial $\mathrm{Sk}^0 X \to N\mathsf{C}$. Es decir, $\mathsf{c}\,\mathrm{Sk}^0 X = \mathsf{Dis}\, X_0$. Aplicamos el pushout de arriba con $n = 1$. Los objetos de la categoría $\mathsf{c}\,\mathrm{Sk}^1 X$ son los elementos de X_0. A cada $x \in X_1$ le asociamos el morfismo $x : d_1 x \to d_0 x$. El conjunto de morfismos de $\mathsf{c}\,\mathrm{Sk}^1 X$ está generado por los elementos de X_1, quienes verifican la relación $s_0 x_0 = 1_{x_0}$ si $x_0 \in X_0$. Examinando el pushout de arriba con $n = 2$ obtenemos la siguiente proposición.

Proposición. *Sea X un conjunto simplicial y G el grafo definido por $d_1, d_1 : X_1 \to X_0$. La categoría $\mathsf{c}X$ es el cociente de la categoría $\mathsf{Pa}\, G$ de caminos en G por las relaciones*

$$s_0 x = 1_x \quad si \quad x \in X_0$$
$$(d_0\sigma) \circ (d_2\sigma) = d_1\sigma \quad si \quad \sigma \in X_2.$$

La siguiente observación se encuentra (sin demostración) en [Se68] y se le atribuye a Grothendieck.

Corolario (A. Grothendieck). *Un conjunto simplicial X es isomorfo al nervio de una categoría si y sólo si la aplicación canónica de conjuntos*

$$\pi_n : X_n \to X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1, \quad x \mapsto (\pi_n^1 x, \pi_n^2 x, \dots, \pi_n^n x),$$

donde $\pi_n^i = d_0^{i-1} \circ d_{i+1} \cdots \circ d_n$, es una biyección para todo $n \geq 1$. Si observamos que

$$[n] = [1] \coprod_{[0]} [1] \coprod_{[0]} \cdots \coprod_{[0]} [1]$$

en Δ (y que las inclusiones son duales a las proyecciones π^i definidas arriba), se sigue inmediatamente que X es isomorfo al nervio de una categoría si y sólo si $X : \Delta^{op} \to \mathsf{Set}$ preserva todos los colímites que existen en Δ.

Demostración. Veamos primero que, si X es isomorfo al nervio de una categoría, entonces preserva colímites. Recordamos que $N\mathsf{C} = \mathsf{Cat}[i(-), \mathsf{C}]$, donde $i : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Cat}$ es la inclusión. Como i es adjunto a izquierda del funtor olvido $U : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Ord}$, se tiene que $N\mathsf{C} \simeq \mathsf{Ord}[-, U\mathsf{C}]$ y, por lo tanto, preserva todos los colímites (que existan).

Veamos ahora que esta condición es suficiente para que X sea isomorfo al nervio de una categoría. La idea de la demostración es la siguiente: por adjunción, X será isomorfo al nervio de alguna categoría si y sólo si la unidad $X \to N\mathsf{c}X$ es un isomorfismo (y, en este caso, la categoría en cuestión no es otra que $\mathsf{c}X$). Resulta que las aplicaciones de conjuntos π_n definidas arriba definen un morfismo simplicial $X \to N\mathsf{c}X$ que es unidad de la adjunción.

Para demostrar el lema, basta ver que las funciones π_n definen un morfismo simplicial. Veamos primero que conmutan con las caras, i.e., que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "\pi_{n+1}"] \arrow[d, "d_i"'] & X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1 \arrow[d, "\mathrm{comp}_i"] \\ X_n \arrow[r, "\pi_n"] & X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1 \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $n \geq 1$, donde comp_i es la composición de los factores i e $(i+1)$ en $\mathsf{c}X$. En efecto, sea $\sigma \in X_{n+1}$. La j-ésimo coordenada de $\pi_n(d_i\sigma)$ es

$$d_0^{j-1} d_{j+1} \cdots d_n d_i \sigma = d_0^{j-1} d_{j+1} \cdots d_{n+1}\sigma,$$

utilizando que $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ si $i < j$. Por otra parte, si $j \neq i$, la j-ésima coordenada de $\mathrm{comp}_i(\pi_{n+1}\sigma)$ es

$$d_0^{j-1} d_{j+1} \cdots d_{n+1}\sigma.$$

Si $j = i$, entonces la coordenada es la composición en $\mathsf{c}X$ de la i-ésima y la $(i+1)$-ésima coordenada de $\pi_{n+1}\sigma$:

$$\begin{aligned} \pi_{n+1}^i \sigma &= d_0^{i-1} d_{i+1} \cdots d_{n+1}\sigma = d_2 d_0^{i-1} d_{i+2} \cdots d_{n+1}\sigma, \\ \pi_{n+1}^{i+1} \sigma &= d_0^{i} d_{i+2} \cdots d_{n+1}\sigma = d_0 d_0^{i-1} d_{i+2} \cdots d_{n+1}\sigma. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la i-ésima coordenada de $\mathrm{comp}_i \pi_{n+1}\sigma$ es

$$d_1 d_0^{i-1} d_{i+2} \cdots d_{n+1}\sigma = d_0^{i-1} d_{i+1} \cdots d_{n+1}\sigma,$$

y de nuevo esto es igual a $\pi_n^i(d_i\sigma)$.

Un razonamiento análogo muestra que π conmuta con las degeneraciones, i.e., que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "s_i"'] & X_1 \times_{X_0} \times \cdots \times_{X_0} X_1 \arrow[d, "\mathrm{ident}_i"] \\ X_{n+1} \arrow[r, "\pi_{n+1}"] & X_1 \times_{X_0} \times \cdots \times_{X_0} X_1 \end{tikzcd}$$

conmuta para todo i, donde ident_i inserta una identidad de $\mathsf{c}X$ ($=$ degeneración de un 0-simplex) en el i-ésimo lugar. Esto termina la demostración. $\square$

Observar que si bien la categorización de un conjunto simplicial sólo depende de su 2-esqueleto, el nervio de una categoría no tiene, en general, dimensión ≤ 2.

3.4. Revestimientos simpliciales

Sea X un conjunto simplicial. Un morfismo simplicial $p : E \to X$ es un *revestimiento simplicial* si para todo n-simplex $v \in X_n$ y toda elección de 0-símplices $u \in E_0$, $i \in \Delta[n]_0$, existe un *único* n-simplex $s \in E_n$ tal que $p \circ s = v$, $s \circ i = u$.

$$\begin{tikzcd}
\Delta[0] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\Delta[n] \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dashed, "s"] & X
\end{tikzcd}$$

Denotamos por Cov/X la subcategoría plena de SSet/X generada por los revestimientos simpliciales.

Sea $f : X' \to X$ un morfismo en SSet y sea $p \in \mathsf{Cov}/X$. Entonces el pullback

$$\begin{tikzcd}
X' \times_X E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "pull"] & E \arrow[d, "p"] \\
X' \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

define un cubrimiento simplicial p' de X'. Esta construcción define un funtor $\mathsf{Cov}/f : \mathsf{Cov}/X \to \mathsf{Cov}/X'$ (el funtor de *cambio de base*).

Sea $X \in \mathsf{SSet}$ un conjunto simplicial y $\mathsf{C} \in \mathsf{Cat}$ una categoría (pequeña). En las secciones anteriores construimos un par de funtores adjuntos $N : \mathsf{Cat} \to \mathsf{SSet}$ y $\mathsf{c} : \mathsf{SSet} \to \mathsf{Cat}$, con $\mathsf{c} \dashv N$. Ahora estudiaremos como estos funtores actuan en Cov/X y Cov/C. Observar que el funtor c induce naturalmente un funtor $\mathsf{c}/X : \mathsf{SSet}/X \to \mathsf{Cat}/\mathsf{c}X$. Análogamente, el funtor N induce $N/\mathsf{C} : \mathsf{Cat}/\mathsf{C} \to \mathsf{SSet}/N\mathsf{C}$. El siguiente lema muestran que estos funtores se restringen a las subcategorías de revestimientos.

Teorema. *Los funtores* c/X *y* N/C *transforman revestimientos en revestimientos. Por lo tanto, inducen funtores* $\mathsf{Cov}/X \to \mathsf{Cov}/\mathsf{c}X$ *y* $\mathsf{Cov}/\mathsf{C} \to \mathsf{Cov}/N\mathsf{C}$ *(que seguimos denotando con el mismo nombre).*

Demostración. Sea $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ un revestimiento de categorías y sea

$$\begin{tikzcd}
\Delta[0] \arrow[r] \arrow[d] & N\mathsf{C}' \arrow[d, "N(p)"] \\
\Delta[n] \arrow[r] & N\mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

un cuadrado conmutativo. Por adjunción, este diagrama se corresponde con el siguiente diagrama en Cat.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{C}' \arrow[d, "p"] \\ i[n] \arrow[r] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$

Este diagrama puede completarse con un único funtor $i[n] \to \mathsf{C}'$ de forma conmutativa (inducción en n utilizando levantamiento único de morfismos). Por lo tanto, nuevamente por adjunción, el diagrama original puede completarse con un único morfismo simplicial $\Delta[n] \to N\mathsf{C}'$ de forma conmutativa. Esto muestra que N/C transforma revestimientos de categorías en revestimientos simpliciales.

Veamos ahora que c/X transforma revestimientos simpliciales en revestimientos de categorías. Sea $p : X' \to X$ un revestimientos simplicial y consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{c}X' \arrow[d, "\mathsf{c}p"] \\ I_1 \arrow[r, "f"] & \mathsf{c}X \end{tikzcd}$$

Recordando la construcción de c, vemos que el funtor f está determinado por una sucesión finita de 1-símplices $a_1, \dots, a_n \in X_1$ tales que $d_0 a_i = d_1 a_{i+1}$ para todo i. Utilizando el levantamiento único de símplices de p y haciendo inducción en n, obtenemos la existencia de un levantado $g : I_1 \to \mathsf{c}X'$ de f que completa conmutativamente el diagrama. Veamos que este levantado es único.

Sea $g' : I_1 \to \mathsf{c}X'$ otro levantado. Queremos ver que $g = g'$. Por la construcción del funtor c, basta ver esto en el caso en el que g está dado por un par de 1-símplices $a, a' \in X_1'$ con $d_0 a = d_1 a'$ y g' está dado por un 1-simplex $a'' \in X_1'$ tales que existe un 2-simplex $\sigma \in X_2$ con $d_0\sigma = p(a')$, $d_2\sigma = p(a)$ y $d_1\sigma = p(a'')$. Como p es un revestimiento simplicial, podemos completar el siguiente diagrama con un 2-simplex $\tau \in X_2'$.

$$\begin{tikzcd} \Delta[0] \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d, "p"] \\ \Delta[2] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[ur, dashed, "\tau"] & X \end{tikzcd}$$

Por unicidad del levantado de las composiciones $\Delta[1] \xrightarrow{\delta^i_*} \Delta[2] \xrightarrow{\sigma} X$, $i = 0, 1, 2$, se tiene que $d_0\tau = a'$, $d_2\tau = a$ y $d_1\tau = a''$, i.e., $g = g'$. □

En lo que queda de esta sección, veremos que los funtores c/X y N/C se restringen a equivalencias de categorías. Veamos primero que c/X es una equivalencia de categorías $\mathsf{Cov}/X \simeq \mathsf{Cov}/\mathsf{c}X$ construyendo la cuasi-inversa. Dado un revestimiento de categorías $\mathsf{C}' \to \mathsf{c}X$, podemos considerar su nervio $N\mathsf{C}' \to N\mathsf{c}X$ y haciendo pullback a lo largo de la unidad $X \to N\mathsf{c}X$ obtenemos un revestimiento sobre X. En otras palabras, si la unidad de la adjunción $\mathsf{c} \dashv N$ es $\psi : 1_{\mathsf{SSet}} \to N\mathsf{c}$, se tiene el siguiente diagrama de categorías y funtores.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\psi_X"'] \\ N\mathsf{c}X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{Cov}/X \arrow[r, "\mathsf{c}/X"] & \mathsf{Cov}/\mathsf{c}X \arrow[dl, "N/\mathsf{c}X"] \\ \mathsf{Cov}/N\mathsf{c}X \arrow[u, "\mathsf{Cov}/\psi_X"] & \end{tikzcd}$$

Por los resultados sobre adjuntos del primer capítulo, sabemos que c/X es adjunto a izquierda de $\mathsf{Cov}/\psi_X \circ N/\mathsf{c}X$. Más aún, si $X' \in \mathsf{Cov}/X$, la unidad $X \mapsto \mathsf{Cov}/\psi_X \circ N/\mathsf{c}X \circ \mathsf{c}/X$ está definida por el morfismo inducido en el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend left, "\psi'_X"] \arrow[dr, bend right] & X \times_{N\mathsf{c}X} N\mathsf{c}X' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pull"] & N\mathsf{c}X' \arrow[d] \\ & X \arrow[r, "\psi_X"'] & N\mathsf{c}X \end{tikzcd}$$

mientras que, si $\mathsf{C}' \in \mathsf{Cat}/\mathsf{c}X$, la counidad $\mathsf{c}/X \circ \mathsf{Cov}/\psi_X \circ N/\mathsf{c}X \to \mathsf{C}'$ está dada por $\phi_X \circ \mathsf{c}\pi$, donde $\pi : X \times_{N\mathsf{c}X} N\mathsf{C}' \to N\mathsf{C}'$ es la proyección del pullback.

Como la unidad ψ de la adjunción $\mathsf{c} \dashv N$ induce una biyección en el 0-esqueleto, las anteriores definiciones implican que la unidad (resp. counidad) de la adjunción $\mathsf{c}/X \dashv \mathsf{Cov}/\psi_X \circ N/\mathsf{c}X$ induce una biyección en el 0-esqueleto (resp. los objetos). Luego, nuestro objetivo es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición. *Sea $X \in \mathsf{SSet}$ un conjunto simplicial (resp. $\mathsf{C} \in \mathsf{Cat}$ una categoría) y sea f un morfismo de Cov/X (resp. Cov/C). Si f induce una biyección en el 0-esqueleto (resp. los objetos) entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. Hacemos la demostración para el caso de SSet; el caso de Cat es análogo. Se sigue del hecho de que f es un morfismo de revestimientos que f mismo es un revestimiento. Por lo tanto, basta probar el siguiente hecho: *si $f : X' \to X$ es un revestimiento simplicial que induce una biyección en el 0-esqueleto, entonces f es un isomorfismo.*

Claramente f es un epimorfismo. Veamos que también resulta monomorfismo. Supongamos que $\sigma, \widehat{\sigma} \in X'_n$ son dos n-símplices tales que $f(\sigma) = f(\widehat{\sigma})$ y sea $x \in X_0$ un vértice de este n-simplex común. Por hipótesis, existe un único vértice $x' \in X'_0$ tal que $f(x') = x$. Es decir, tanto σ como $\widehat{\sigma}$ completan conmutativamente el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \Delta[0] \arrow[r, "x'"] \arrow[d, "x"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ \Delta[n] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X \end{tikzcd}$$

Por unicidad del levantado, se sigue que $\sigma = \widehat{\sigma}$ y esto termina la demostración. □

Teorema. *El par de funtores adjuntos* $\mathsf{c}/X \dashv \mathsf{Cov}/\psi_X \circ N/\mathsf{c}X$ *inducen una equivalencia* $\mathsf{Cov}/X \simeq \mathsf{Cov}/\mathsf{c}X$*. El funtor* $N/\mathsf{C} : \mathsf{Cov}/\mathsf{C} \to \mathsf{Cov}/N\mathsf{C}$ *también es una equivalencia.*

Demostración. Sólo la segunda afirmación necesita demostración. Si $\phi_\mathsf{C} : \mathsf{c}N\mathsf{C} \to \mathsf{C}$ es la counidad de la adjunción $\mathsf{c} \dashv N$ (que resulta un isomorfismo pues N es plenamente fiel) entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo (salvo isomorfismo natural).

$$\begin{tikzcd} \mathsf{c}N\mathsf{C} \arrow[d, "\phi_\mathsf{C}"', "\simeq"] \\ \mathsf{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{Cov}/\mathsf{C} \arrow[r, "N/\mathsf{C}"] \arrow[d, "\mathsf{Cov}/\phi_\mathsf{C}"'] & \mathsf{Cov}/N\mathsf{C} \arrow[dl, "\mathsf{c}/N\mathsf{C}"] \\ \mathsf{Cov}/\mathsf{c}N\mathsf{C} & \end{tikzcd}$$

Como, por lo que ya sabemos, las dos flechas verticales del triángulo son equivalencias, se sigue que la tercera lo es, lo que termina la demostración. □

3.5. Realización geométrica

Vimos (en un ejemplo al comienzo de este capítulo) que un espacio topológico $X \in \mathsf{Top}$ da lugar a un conjunto simplicial, su complejo singular $S(X) \in \mathsf{SSet}$. Además, es fácil ver que la asignación $X \mapsto S(X)$ es funtorial. Recíprocamente, a cada conjunto singular puede asignarsele (también de manera funtorial) un espacio topológico, su *realización geométrica.* Estas dos construcciones forman un par de funtores adjuntos. La realización geométrica se obtiene pegando n-símplices de acuerdo a las "instrucciones" dadas por el conjunto simplicial.

Más concretamente, definimos un funtor $j : \Delta \to \mathsf{Top}$ de la siguiente manera. Para cada $[n] \in \Delta$, ponemos $j[n] = \Delta^n = \{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum t_i = 1 \}$. La acción de j en los morfismos está dada por

$$\begin{aligned} j(\sigma^i)(t_0, \dots, t_n) &= (t_0, \dots, 0, \dots, t_n), \\ j(\delta^i)(t_0, \dots, t_n) &= (t_0, \dots, t_i + t_{i+1}, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Como Top es cocompleta, sabemos que podemos extender j a un funtor $|\cdot| : \mathsf{SSet} \to \mathsf{Top}$ (la *realización geométrica*) y que este funtor tiene un adjunto a derecha $S : \mathsf{Top} \to \mathsf{SSet}$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{SSet} \arrow[dr, dashed, "|\cdot|"] & \\ \Delta \arrow[u, "h^\Delta"] \arrow[r, "j"'] & \mathsf{Top} \end{tikzcd}$$

Recordamos que el adjunto a derecha S está definido en los objetos por

$$S_n = \mathsf{Top}[\Delta^n, -],$$

que no es otra cosa que el complejo singular de X. Para entender la realización geométrica, podemos proceder de forma análoga a lo que hicimos para el funtor categorización c. Más concretamente, utilizamos el hecho que $|\Delta[n]| \simeq |h^{\Delta}[n]| \simeq \Delta^n$ en Top, que se tiene un pushout

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\sigma\in\Sigma^n} \dot{\Delta}[n] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "push"] & \mathrm{Sk}^{n-1} X \arrow[d] \\
\coprod_{\sigma\in\Sigma^n} \Delta[n] \arrow[r] & \mathrm{Sk}^{n} X
\end{tikzcd}$$

en SSet y que la realización geométrica, como cualquier adjunto a izquierda, preserva pushouts para deducir el siguiente hecho.

Proposición. *Dado un conjunto simplicial $X \in \mathsf{SSet}$, la realización geométrica $|X|$ es un CW-complejo con una n-celda por cada n-simplex no degenerado de X. Más aún, puede construirse de manera explícita como*

$$|X| = \coprod_n X_n \times \Delta^n / \sim,$$

donde $(d_i(k_n), u_{n-1}) \sim (k_n, j(\delta^i)(u_{n-1}))$, $(s_i(k_n), u_{n+1}) \sim (k_n, j(\sigma^i)(u_{n+1}))$ para $k_n \in X_n$, $u_{n-1} \in \Delta^{n-1}$, $u_{n+1} \in \Delta^{n+1}$.

Demostración. Una demostración puede encontrarse en [May67] o en [dH05]. □

Revestimientos topológicos

Recordemos que un morfismo $p : E \to X$ en Top es *localmente trivial con fibra F* si existe un cubrimiento $\{ U_i \}$ de X y homemorfismos $p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\simeq} U_i \times F$ tales que

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & U_i \times F \arrow[d] \\
U_i \arrow[r, equal] & U_i
\end{tikzcd}$$

conmuta. Cuando F es un espacio discreto, se obtiene la definición de *revestimiento.* Denotamos por Cov/X la subcategoría plena de Top/X generada por los revestimientos.

El par adjunto $|\cdot| \dashv S$ induce funtores

$$|\cdot|/X : \mathsf{SSet}/X \to \mathsf{Top}/|X|, \quad S/X : \mathsf{Top}/X \to \mathsf{SSet}/S(X).$$

En [GZ67, p. 145], se muestra que estos funtores se restringen a las categorías de revestimientos y (si X es conexo y localmente arcoconexo) que inducen equivalencias de estas subcategorías.

Dada una categoría C, definimos el *espacio clasificante de* C como la realización geométrica de $N\mathsf{C}$ y lo denotamos $B\mathsf{C}$. El siguiente resultado se encuentra en el artículo [Se68] de G. Segal. Demostraciones alternativas pueden encontrarse en [Qu73] y [Min02].

Corolario. *Sea $b \in \mathsf{C}$. Se tiene un isomorfimo natural $\pi_1(B\mathsf{C}, b) \simeq \pi_1(\mathsf{C}, b)$.*

Demostración. Sea $\mathsf{E} \to \mathsf{C}$ el revestimiento universal categórico de C. Entonces $N\mathsf{E} \to N\mathsf{C}$ es el revestimiento universal simplicial de $N\mathsf{C}$ y $B\mathsf{E} \to B\mathsf{C}$ es el revestimiento universal topológico de $B\mathsf{C}$. En efecto, esto se sigue del hecho de que un revestimiento es universal si y sólo si cubre cualquier otro revestimiento. Luego, tenemos los siguientes isomorfismos naturales.

$$\pi_1(\mathsf{C}, b) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathsf{Cov}/\mathsf{C}}(\mathsf{E}) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathsf{Cov}\,/N\mathsf{C}}(N\mathsf{E}) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathsf{Cov}/B\mathsf{C}}(B\mathsf{E}) \simeq \pi_1(B\mathsf{C}, b). \qquad \square$$

4 Topologías de Grothendieck y revestimientos *à la Grothendieck*

Este capítulo tiene por objetivo tratar de reconciliar (de alguna manera) las dos formas de pensar en los revestimientos: *globalmente,* a través de la propiedad universal de levantamiento de caminos o *localmente,* tal cual la definición usual de revestimientos topológicos. Para esto recordamos la definición de las topologías de Grothendieck que sirven para dar una noción de "local" en una categoría cualquiera y proponemos una definición de revestimiento entre categorías munidas de topologías que generaliza, en cierto sentido, el caso categórico estudiado en los capítulo anteriores y el caso proveniente de la topología.

4.1. Motivación histórica

Grothendieck introdujo su noción de topología en una categoría para transportar la noción de *haz* de la geometría algebraica a otras categorías. Una topología de Grothendieck busca generalizar el concepto de cubrimiento abierto de un espacio topológico.

La motivación fundamental proviene de la generalización de la teoría de Galois de Grothendieck [SGA1] alrededor de 1961 y de la analogía de ésta con la clasificación de revestimientos de un espacio topológico. Consideramos una extensión finita y normal N/k de un cuerpo k (en característica cero, para no tener problemas de inseparabilidad). Esta extensión es un monomorfismo $m : k \to N$ en la categoría de cuerpos (en esta categoría todo morfismo es monomorfismo). El *grupo de Galois* $G = \mathrm{Gal}\, N/k$ consiste de automorfismos de cuerpos $\sigma : N \to N$ con $\sigma m = m$, i.e., tales que dejan fijo a k. El teorema fundamental de la teoría de Galois afirma que subgrupos $S \subset G$ del grupo de Galois se corresponden biunívocamente a extensiones intermedias L con $k \subset L \subset N$, i.e., a factorizaciones $k \to L \to N$ del monomorfismos m. Dado un subgrupo $H \subset G$, el cuerpo intermedio correspondiente consiste precisamente de todos los elementos de N que quedan fijos por todos los automorfismos de H.

Por otra parte, consideramos espacio topológicos X, Y arcoconexos y localmente arcoconexos. Un revestimiento es un epimorfismo $\rho : Y \to X$ en la categoría de estos espacios tal que todo punto $x \in X$ tiene un entorno U tal que cada componente arcoconexa de $\rho^{-1}U$ se aplica homeomorficamente por ρ sobre U. Más formalmente, el pullback $Y \times_X U$ es un coproducto

$$Y \times_X U = U \coprod U \coprod \cdots$$

de copias de U. El *grupo Deck* $G = \mathrm{Deck}\, \rho$ consiste de los homeomorfismos $\sigma : Y \to Y$ tales que $\rho\sigma = \rho$. Supongamos que Y es simplemente conexo o, más generalmente que Y es un revestimiento *normal* (i.e., $\sigma_* \pi_1(Y, y)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, \sigma y)$ para todo $y \in Y$). Entonces, exactamente igual que en el caso algebraico, los subgrupos S de G corresponden biunívocamente a factorizaciones $Y \to Y' \to X$ de ρ, donde Y' se define como el cociente de Y que se obtiene identificando dos puntos y_1 e y_2 precisamente cuando $\sigma y_1 = y_2$.

La analogía claramente involucra una dualización: espacios sobre X son epimorfismos con codominio X, mientras que extensiones de k son monomorfismos con dominio k. En la categoría de espacios $Y \to X$, el producto está dado por el pullback $Y \times_X Y' \to X$, mientras que la unión disjunta $Y \coprod Y' \to X$ es el coproducto. La categoría de cuerpos no tiene, en general, productos ni coproductos. Sin embargo, estos (co)límites existen si consideramos la categoría más grande de k-álgebras conmutativas. Si R y S son dos k-álgebras, el producto tensorial $R \otimes_k S$ con los morfismos

$$R \xrightarrow{i} R \otimes_k S \xleftarrow{j} S, \quad r \mapsto r \otimes 1, \quad s \mapsto 1 \otimes s,$$

es el coproducto y el producto cartesiano $R \times S$ con las operaciones coordenada a coordenada es el producto categórico. Observar que la categoría de k-álgebras no es otra cosa que la categoría k/Ring de anillos *debajo* de k.

Pero ahora el paralelo entre la geometría y el álgebra parece romperse. La definición de un revestimientos $Y \to X$ pide que, para cada $x \in X$, exista un entorno U ($=$ monomorfismo abierto $U \to X$) tal que el pullback $Y \times_X U \to U$ sea un coproducto de copias de U. Análogamente, una extensión de cuerpos $k \to L$ tiene un cuerpo de descomposición $k \to N$ con N normal. Concretamente, si L está dada como $L = k(\alpha)$, donde α es una raiz de un polinomio irreducible $f \in k[x]$ de grado m, una extensión normal N de k es un cuerpo de descomposición para L si contiene todas las raices $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de f de manera que $L \otimes_k N \simeq N[x]/(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_m) \simeq N \otimes_k N \otimes_k \cdots \otimes_k N$ es simplemente el coproducto de m copias de N.

La diferencia esencial es que un revestimiento se "parte" sobre un entorno U que es un monomorfismo $U \to X$ mientras que un cuerpo no se parte bajo su dual (un epimorfismo), sino sobre un morfismo más general $k \to N$. Esta observación fue lo que llevó a Grothendieck a pensar que los entornos U de espacios topológicos podrían ser reemplazados por morfismos más generales $C \to X$ que no sean necesariamente monomorfismos. Esta definición puede hacerse en cualquier categoría.

4.2. Caso topológico

En esta sección investigamos los morfismos entre posets de la forma $\mathsf{O}(X)$ para un espacio topológico X. En general, si $f : X' \to X$ es una función continua, se tiene definido un morfismo de posets $f^* : \mathsf{O}(X) \to \mathsf{O}(X')$ por $U \mapsto f^{-1}(U)$. Si f es un homeomorfismo, entonces f^* es una biyección. La recíproca no es cierta, como muestra el ejemplo $X \to *$ con X cualquier conjunto no trivial dotado de la topología indiscreta. Sin embargo, cuando los espacios X, X' son minimamente "buenos," la recíproca *es* cierta. Se tiene el siguiente resultado.

Lema. *Sea $f : X' \to X$ una función continua y $f^* : \mathsf{O}(X) \to \mathsf{O}(X')$ el morfismo inducido. Entonces f^* es sobreyectiva si y sólo si f es inicial. Si además X' es T_0 entonces*

f^* es subespacio. Si f^* es inyectiva entonces f es densa. Si además X' es T_1 entonces f es sobreyectiva.

Demostración. Observamos que f^* es sobreyectiva si y sólo si todo abierto $U \subset X'$ es de la forma $U = f^{-1}(V)$ con $V \subset X$ abierto, i.e., f es inicial. Supongamos que X' es T_0 y veamos que entonces f resulta inyectiva. Sean $a, b \in X'$ tales que $f(a) = f(b) = x$ y supongamos que $a \neq b$. Entonces existe un abierto W que contiene a exactamente uno de los puntos a, b. Supongamos que $a \in W$. Como f^* es sobreyectiva, existe $V \subset X$ abierto tal que $W = f^{-1}(V)$. Pero como $a \in W$ se tiene que $x \in V$ y por lo tanto $b \in W$. Esta contradicción muestra lo que queríamos.

Supongamos ahora que f^* es inyectiva. Esto quiere decir que se tiene la implicación

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V') \implies V = V'.$$

Como $f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap f(X'))$, es inmediato que esto es equivalente a la implicación

$$V \cap f(X') = V' \cap f(X') \implies V = V'.$$

En particular, tomando $V' = \emptyset$ y $V' = X$ obtenemos

$$\begin{aligned} V \cap f(X') = \emptyset &\implies V = \emptyset, \\ f(X') \subset V &\implies V = X. \end{aligned}$$

La primer implicación muestra que f es densa. Si además, X' es T_1 y f no es sobreyectiva, poniendo $V = X - \{ x \}$ con $x \notin f(X')$ se obtiene, utilizando la segunda implicación, una contradicción que muestra que f debe ser sobreyectiva. □

En el resultado anterior, partíamos de una función continua f. Podemos plantearnos la pregunta inversa. Si $\varphi : \mathsf{O}(X) \to \mathsf{O}(X')$ es un morfismo de posets. Existe $f : X' \to X$ continua tal que $f^* = \varphi$? Una primera condición necesaria es que $\varphi(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} \varphi(U_i)$ y que $\varphi(\bigcap_{i=1}^n U_i) = \bigcap_{i=1}^n \varphi(U_i)$ para todo n. Esto será suficiente bajo ciertas hipótesis de "sobriedad" del espacio. Recordamos [SGA4, vol. 1, p. 336] que un conjunto cerrado $F \subset X$ es *irreducible* si no puede escribirse como unión de dos conjuntos cerrados de forma no trivial y que un espacio X es *sobrio* si todo conjunto cerrado irreducible es de la forma $F = \overline{\{ x \}}$ para un único punto $x \in X$.

Lema. *Sea $\varphi : \mathsf{O}(X) \to \mathsf{O}(X')$ un morfismo de posets que preserva uniones arbitrarias e intersecciones finitas y que X' es sobrio. Entonces existe una única función continua $f : X' \to X'$ tal que $f^* = \varphi$.*

Demostración. Sea $x' \in X'$ y definimos $F_{x'} = X - \bigcup \{ U \in \mathsf{O}(X) \mid x' \notin \varphi(U) \}$. Entonces $F_{x'}$ es un subconjunto cerrado e irreducible de X, de manera que existe un único punto $x = f(x')$ tal que $F_{x'} = \overline{\{ x \}}$. Esto define una función $f : X' \to X$ tal que, para cualquier $U \subset X$ abierto y $x' \in X'$, $f(x') \in U$ si y sólo si $x' \in \varphi(U)$. En particular, $f^{-1}(U) = \varphi(U)$ y f resulta continua. □

4.3. Topologías de Grothendieck

Las topologías de Grothendieck buscan generalizar la noción de entorno abierto de un espacio topológico a una categoría arbitraria. El punto de partida es la observación que la noción de cubrimiento de un espacio topológico X puede darse puramente en términos de la categoría de abiertos $\mathsf{O}(X)$. Los axiomas no describen los "abiertos" de la topología, sino los cubrimientos de un espacio.

Definición. Sea C una categoría. Una *topología de Grothendieck* en C es la asignación, para cada $c \in \mathsf{C}$, de una colección $K(c)$ de conjuntos de morfismos $\{ c_i \to c \}$ (llamados *cubrimientos de* c), de forma que se cumplan las siguientes condiciones.

1. Si $c' \to c$ es un isomorfismo entonces el conjunto $\{ c' \to c \} \in K(c)$.
2. (Estabilidad) Si $\{ c_i \to c \} \in K(c)$ y $c' \to c$ es un morfismo en C, entonces los pullbacks $\{ c_i \times_c c' \}$ existen y $\{ c_i \times_c c' \to c' \} \in K(c')$.
3. (Transitividad) Si $\{ c_i \to c \} \in K(c)$ y, para cada i, se tiene un cubrimiento $\{ c_{ij} \to c_i \} \in K(c_i)$, entonces $\{ c_{ij} \to c_i \to c \} \in K(c)$.

Vamos a decir que una categoría munida de una topología es un *sitio.*

Observación. La definición puede hacerse aún para categorías en las que no existen los pullbacks del segundo axioma. En este caso, este axioma debe cambiarse por el siguiente: *si* $\{ f_i : c_i \to c \}_{i \in I} \in K(c)$ *y* $h : c' \to c$ *es un morfismo en* C *entonces existe un cubrimiento* $\{ g_j : c'_j \to c' \}_{j \in J} \in K(c')$ *tal que* hg_j *se factoriza por alguna* f_i *para todo* $j \in J$.

A continuación se dan algunos ejemplos usuales de topologías.

Ejemplo. Sea $X \in \mathsf{Top}$ un espacio topológico y consideremos $\mathsf{O}(X)$ la topología de X. En este caso, el pullback de U y V es la intersección $U \cap V$. Una familia $U_i \subset U$ es un cubrimiento de U si $U = \bigcup U_i$. Esto define una topología de Grothendieck en $\mathsf{O}(X)$.

Ejemplo. Sea C una categoría. Definimos la *topología trivial en* C de forma tal que los cubrimientos de $c \in \mathsf{C}$ son de la forma $\{ \alpha : c' \to c \}$ con α un isomorfismo.

Ejemplo. Sea T una categoría pequeña de espacios topológicos que admita límites finitos y que sea cerrada por subespacios abiertos (por ejemplo, la categoría de espacios Hausdorff separables). Definimos una topología K en T afirmando que $\{ f_i : Y_i \to X \}_{i \in I} \in K(X)$ si y sólo si cada f_i es un subespacio abierto (= inyectiva, abierta e inicial) y $\bigcup f_i(Y_i) = X$. Esta ejemplo muestra la versatilidad de la noción de una topología de Grothendeick: entre sus ejemplos se encuentran tanto el caso de un único espacio topológico como toda una categoría de espacios topológicos. Además, observemos que sólo necesitamos que existan pullbacks de la forma

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

con $U \subset X$ un subespacio abierto. En particular, esta definición puede aplicarse a la categoría de variedades diferenciables (separables) (una categoría en la que no existen todos los pullbacks).

Ejemplo. Si C es una categoría, siempre puede definirse la *topología atómica* sobre C afirmando que $S \in K(C)$ si y sólo si $S \neq \emptyset$.

Ejemplo (Álgebras de Heyting). Esta es una generalización del primer ejemplo. Un *álgebra de Heyting* es un conjunto L parcialmente ordenado tal que todo subconjunto no vacío $\{ a_i \} \subset L$ tiene ínfimo $\bigwedge a_i$, supremo $\bigvee a_i$ y vale la ley distributiva

$$b \wedge \bigvee a_i = \bigvee (b \wedge a_i)$$

para todo $b \in L$. Esta estructura modela algebraicamente el poset de abiertos $\mathsf{O}(X)$ de un espacio topológico X.

Dada una álgebra de Heyting L definimos una topología en L por

$$\{ a_i \mid i \in I \} \in K(c) \iff \bigvee_{i \in I} a_i = c.$$

El axioma de estabilidad es exactamente la ley distributiva. Observar que en todo momento identificamos una flecha $a \to b$ con el elemento a.

Ejemplo (El sitio de Zariski). Este ejemplo es la razón por la cual la noción de topología de Grothendieck es esencial en geometría algebraica. Sea k un anillo conmutativo con unidad. Denotamos la categoría de k-álgebras conmutativas y con unidad por CAlg_k. Introducimos una topología en la categoría dual $\mathsf{CAlg}_k^{\mathrm{op}}$. Dada $A \in \mathsf{CAlg}_k^{\mathrm{op}}$, un cubrimiento es (módulo isomorfismo) el dual de una familia de la forma

$$\{ A \to A[a_i^{-1}] \mid i = 1, \dots, n \},$$

donde cada morfismo $A \to A[a_i^{-1}]$ es la localización en a_i y $1 \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. El axioma de estabilidad vale por lo siguiente. Los productos fibrados existen en $\mathsf{CAlg}_k^{\mathrm{op}}$ y corresponden al producto tensorial en CAlg_k. Por lo tanto, si $a_1, \dots, a_n \in A$ con $1 \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ y $h : A \to B$ es un k-morfismo, entonces $1 \in \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle$ y $B \otimes_A A[a_i^{-1}] \simeq B[h(a_i)^{-1}]$. Es decir, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & A[a_i^{-1}] \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B[h(a_i)^{-1}] \end{tikzcd}$$

es un pushout de k-álgebras. Para probar la transitividad, supongamos que tenemos un cubrimiento $A \to A[a_i^{-1}]$ y, para cada i, un cubrimiento $A[a_i^{-1}] \to A[a_i^{-1}][c_{ij}^{-1}]$, con $j = 1, \dots, n_i$ y $c_{ij} \in A[a_i^{-1}]$ tales que $1 \in \langle c_{i1}, \dots, c_{in_i} \rangle \subset A[a_i^{-1}]$. Se tiene que $c_{ij} = b_{ij}/a_i^{m_{ij}}$ para algún entero m_{ij} y algún $b_{ij} \in A$. Luego, invertir c_{ij} en $A[a_i^{-1}]$ es equivalente a invertir b_{ij} y podemos escribir estos cubrimientos como

$$A[a_i^{-1}] \to A[a_i^{-1}][b_{ij}^{-1}] \xrightarrow{\simeq} A[(a_i b_{ij})^{-1}],$$

donde $1 \in \langle b_{i1}, \dots, b_{in_i} \rangle \subset A[a_i^{-1}]$. Multiplicando por alguna potencia de a_i, obtenemos un número natural k_i tal que

$$a_i^{k_i} \in \langle a_i b_{i1}, \dots, a_i b_{in_i} \rangle \subset A.$$

Como $1 \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ en A, podemos escribir $1 = \sum d_i a_i$ y, por lo tanto, existe $k > n \cdot \max k_i$ tal que

$$1 = \left[\sum d_i a_i\right]^k \in \langle a_i^{k_1}, \dots, a_n^{k_n} \rangle \subset \langle a_i b_{ij} \mid i, j \rangle.$$

Refinamientos y cribas

Dado un objeto $c \in \mathsf{C}$ y un conjunto de flechas $\mathcal{U} = \{ c_i \to c \}$ en C, definimos un subfuntor $h(\mathcal{U}) \subset h(c)$ tomando $h(\mathcal{U})(d)$ el conjunto de flechas $d \to c$ con la propiedad de que exista alguna factorización $d \to c_i \to c$. Decimos que $h(\mathcal{U})$ es la *criba* asociada a $\mathcal{U}$: si pensamos que los c_i son agujeros en c, una flecha $d \to c$ pertenece a $h(\mathcal{U})(d)$ si y sólo si "pasa a través de algún agujero."

Sea C un sitio. Sea $c \in \mathsf{C}$ y sea $\{ c_i \to c \} \in K(c)$ un cubrimiento. Un *refinamiento* es un cubrimiento $\{ c'_j \to c \} \in K(c)$ tal que, para todo $j \in J$, existe $i \in I$ tal que $c'_j \to c$ se factoriza por $c_i \to c$.

Observación. Dados dos cubrimientos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in K(c)$, $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$ si y sólo si $h(\mathcal{U}) \subset h(\mathcal{V})$.

Claramente un refinamiento de un refinamiento es un refinamiento y es claro que un cubrimiento es un refinamiento de él mismo. Luego, la relación de "refinar" define un orden parcial en el conjunto $K(c)$ de cubrimientos de un objeto c.

Si C es una categoría y sean K, K' dos topologías en C. Decimos que K es *más fina* que K', y escribimos $K' \prec K$, si todo cubrimiento de K' admite algún refinamiento que pertenece a K. Si $K \prec K'$ y $K' \prec K$, decimos que K y K' son *equivalentes* y escribimos $K \equiv K'$. Claramente $\equiv$ define una relación de equivalencia en el conjunto de topologías de C. Esta relación se expresa naturalmente en términos de cribas: dos topologías son equivalentes si y sólo si tienen las mismas cribas.

Dada una topología K en una categoría C, decimos que K es *saturada* si, dado un cubrimiento $\mathcal{U} \in K(c)$, todo refinamiento de $\mathcal{U}$ pertenece a $K(c)$. Si K es una topología arbitraria, la *saturación* $\overline{K}$ de K es el conjunto de sus refinamientos. Claramente se tiene que $\overline{K}$ es una topología saturada equivalente a K, $K \prec \overline{K}$ y $K = \overline{K}$ si y sólo si K es saturada.

4.4. Revestimientos geométricos

El objetivo de esta sección es proponer una definición de revestimiento más cercana a la definición topológica de revestimiento, trabajando con la noción de entorno en una categoría dada por la definición de topologías de Grothendieck. Una condición que queremos que esta definición cumpla es que, si $p : X' \to X$ es un revestimiento, entonces el funtor $p_* : \mathsf{O}(X') \to \mathsf{O}(X)$, $U \mapsto p(U)$ (bien definido pues p es abierta) verifique nuestra definición de revestimiento.

Sea C un sitio. Un objeto $C \in \mathsf{C}$ se dice *minimal* si todo cubrimiento de C es de la forma $\{\alpha : C' \to C\}$, con α un isomorfismo.

Si $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ es un funtor y $c \in \mathsf{C}$, denotamos por $p^{-1}(c)$ la subcategoría de C' cuyos objetos son los objetos $c' \in \mathsf{C}'$ tales que $p(c') = c$ y cuyos morfismos $\alpha : c' \to c''$ son aquellos morfismos de $c' \to c''$ en C' tales que $p(\alpha) = 1_c$.

Definición. Sea $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ un funtor entre sitios y sea $c \in \mathsf{C}$. Decimos que p *se trivializa sobre* c si existe un conjunto $\{ u_i \} \subset p^{-1}(c)$ de objetos minimales tales que

1. p induce *isomorfismos* $\mathsf{C}/u_i \to \mathsf{C}/c$ para todo $i \in I$.
2. Todo objeto $u' \in p^{-1}(c)$ admite un morfismo $u' \to u''$ con u'' un objeto cubierto por los $\{ u_i \}$.

Decimos que p es un *revestimiento geométrico* si todo objeto $c \in \mathsf{C}$ tiene un cubrimiento $c_i \to c$ tal que p se trivializa sobre c_i.

Proposición. *Sea $p : X' \to X$ un revestimiento en* Top. *Entonces $p_* : \mathsf{O}(X') \to \mathsf{O}(X)$ es un revestimiento geométrico con las topologías usuales.*

Demostración. En efecto, sea $U \in \mathsf{O}(X)$. Existe un cubrimiento $U_i \subset U$ de abiertos parejamante cubiertos, i.e., $p^{-1}(U_i) = \coprod U'_{ij}$ con $p : U'_{ij} \to U_i$ homeomorfismos. Claramente los $U'_{ij} \in \mathsf{O}(X')$ son minimales. Si $V \in p_*^{-1}(U_i)$, entonces $p(V) = U_i$ y entonces $V = \coprod_j V \cap U_{ij}$ y $\coprod U_{ij}$ está cubierto por minimales. Claramente p induce isomorfismos $\mathsf{O}(X')/U_{ij} = \mathsf{O}(U_{ij}) \to \mathsf{O}(X)/U_i = \mathsf{O}(U_i)$. □

Proposición. *Sea $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ un funtor. Le damos a ambas categorías la topología trivial (los únicos cubrimientos son los isomorfismos). Si p es un revestimiento de categorías en el sentido del capítulo 2, entonces p es un revestimiento geométrico.*

Demostración. Supongamos que las categorías tienen la topología trivial. Sea $c \in \mathsf{C}$. Veamos que p se trivializa sobre c. Basta ver que p induce isomorfismos $\mathsf{C}'/c' \to \mathsf{C}/c$ para todo $c' \in p^{-1}(c)$, lo que es consecuencia del levantamiento único de morfismos. □

La vuelta de este resultado no vale, como lo muestra el siguiente ejemplos.

Ejemplo. Consideramos las categorías $\mathsf{C} = \{ a \xrightarrow{\alpha} b \}$ y $\mathsf{C}' = \{ c \xrightarrow{\beta} d \xleftarrow{\gamma} e \}$ y $p : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ definido por $p(\beta) = p(\gamma) = \alpha$. Si le damos a C, C' la topología trivial, claramente p es un revestimiento geométrico. Pero no es un revestimiento de categorías pues α no tiene levantamiento único.

Sin embargo, si $p : \mathsf{G}' \to \mathsf{G}$ es un revestimiento geométrico de grupoides, donde G' y G tienen la topología trivial, entonces p es un revestimiento de grupoides en el sentido del capítulo 2. En efecto, vimos que en el caso de grupoides basta levantar caminos que "llegan" a un objeto dado para cumplir la definición de revestimiento.

Finalmente, el siguiente ejemplo muestra un funtor que es un revestimiento geométrico respecto a dos topologías distintas.

Ejemplo. Sea $p : X' \to X$ un revestimiento topológico. Sea $\mathcal{U} = \{ U_i \}$ un cubrimiento trivializante de X. Sea $\mathcal{U}' = p^{-1}\mathcal{U} = \{ p^{-1}(U_i) \}$ el cubrimiento de X' inducido por p. Pensamos en $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ como posets. Como $\mathcal{U}$ es trivializante, se tiene que $p : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ es un revestimiento de categorías en el sentido del capítulo 2. Observamos que $\mathcal{U} \subset \mathsf{O}(X)$, $\mathcal{U}' \subset \mathsf{O}(X')$ y, cómo tales, heredan la topología de Grothendieck de los cubrimientos abiertos.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}' \arrow[r, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, "p"'] & \mathsf{O}(X') \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "\mathrm{inc}"'] & \mathsf{O}(X) \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que $p : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ es también un revestimiento geométrico con esta topología.

fin

Bibliografía

[Br88] R. Brown, *Topology. A geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid,* second edition, Ellis Horwood, 1988.

[dH05] M. del Hoyo, *Espacios clasificantes y atlas de grupoides,* tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2005.

[GZ67] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory,* Springer-Verlag, 1967.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements Etales et Groupe Fundamental,* Lect. Notes in Math. **224,** Springer-Verlag.

[SGA4] A. Grothendieck, *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas,* Lect. Notes in Math. **269,** Springer-Verlag.

[ML67] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician,* Springer-Verlag, 1967.

[ML92] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic,* Universitext, Springer-Verlag, 1992.

[May67] J.P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology,* D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1967.

[May99] J.P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology,* The University of Chicago Press, Chicago, 1999.

[Mil65] J. Milnor, *Construction of universal bundles I,* Ann. of Math. **63** (1965), 272–284.

[Min02] G. Minian, *Cat as a lambda-cofibration category,* J. Pure Appl. Algebra **167** (2002), 301–314.

[Mo95] I. Moerdijk, *Classifying Spaces and Classifying Topoi,* Lect. Notes in Math. **1616** (1995), Springer-Verlag.

[Qu73] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory: I,* Lect. Notes in Math. **341** (1973), 85–147, Springer-Verlag.

[Se68] G. Segal, *Classifying Spaces and Spectral Sequences,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34** (1968), 105–112.

tesis.tex
14 de agosto de 2006
19:21