Bases de Wavelets para $L^p(\mathbb{R}^d)$: Convergencia en norma y puntual.

Seminario/ Tesis de Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Alumno: Juan Miguel Medina

Director: Dr. Carlos Cabrelli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
de la
Universidad de Buenos Aires

Marzo, 2006.

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Carlos Cabrelli, mi director, por haber aprendido de él una cantidad inestimable de cosas sobre ésta hermosa disciplina que es el Análisis Armónico. A mis padres: Juana Elsa Guerra A. y Juan Carlos por haberme apoyado en esta opción "insensata" de ser matemático. A algunos de mis compañeros y amigos de la FCEyN, como Mariana Valeria Perez, que ayudó a darle una forma coherente a todo este trabajo. También, no puedo evitar de agradecer a cierta gente del Dpto. de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la UBA como los Dres. Rafael García, Jose Luis Mancilla A. y Bruno Cernuschi F. y muchos más que me brindaron su apoyo a lo largo de éstos años.
Finalmente, se lo dedico a la memoria de mis abuelos y a mi amigo desde la infancia en el Colegio del Salvador, en el Dpto. de Física de la Univ. Autónoma de Madrid: Daniel E. López.

INDICE

1. Introducción..pag. 1

2. Preliminares
2.1. Algunos resultados Generales..................pag. 4
2.2. El Principio de Banach
y Convergencia en Casi todo punto................pag. 13
2.3. Bases Incondicionales..............................pag. 15
2.4. Wavelets y Análisis Multiresolución........pag. 16

3. Wavelets Como Bases de $L^p(\mathbb{R}^d)$
3.1. Algunas Definiciones e Inroducción.......pag. 19
3.2. Resultados Auxiliares............................pag. 22
3.3. Resultado Principal..............................pag. 34

4. Wavelets Como Bases Incondicionales de $L^p(\mathbb{R}^d)$
4.1. Resultados Auxiliares............................pag. 44
4.2. Resultado Principal..............................pag. 51

5. Comentarios Varios................................pag. 54

X. Referencias..pag. 55

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de Wavelet apareció a mediados de 1980 influenciado por ideas de matemática pura (principalmente: Análisis Armónico y Análisis Funcional) como así también de matemática aplicada (principalmente: Procesamiento de Señales, Física-Matemática, etc.). Para ser más precisos, en ésta breve discusión del tema, daremos una definición lo suficientemente general de lo que es una wavelet y que para el propósito de éste trabajo alcanzará:

Definición 1. *Una familia $\{\psi^\lambda\}_\lambda \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ se dice que es una familia de wavelets básicas si*

$$\left\{2^{\frac{jd}{2}}\psi^\lambda(2^j x - k)\right\}_{j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^d,\, \lambda\in\Lambda}, \quad \sharp(\Lambda) = 2^d - 1 \tag{1}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

El primer ejemplo conocido de lo que hoy llamamos wavelet que se conoció se debe a Alfred Haar (1910, para $d = 1$), aunque Haar lo estudiaba en otro contexto. Como veremos mas adelante la base de Haar sigue propocionando una buena fuente de ejemplos (y contraejemplos...).
Cuando hablamos de una base de un espacio de funciones, empiezan a surgir varias preguntas:

i) Dada una función si la desarrollamos en dicha base (en nuestro caso la expansión de f en serie de wavelets): hay convergencia puntual?

ii) Seguirá siendo una base (de Schauder) si cambiamos el espacio original subyacente por otro: en nuestro caso, lo que nos interesa es encontrar condiciones suficientes para las cuales si (1) es una base de $L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces es una base de $L^p(\mathbb{R}^d)$, con $p \neq 2$.

iii) Si (1) es una base ortonormal entonces es trivialmente una base incondicional, seguirá siendo cierto ésto en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p \neq 2$?

En este trabajo trataremos de responder algunas de éstas preguntas. En un principio la pregunta i) es mas o menos independiente de las otras dos para una base arbitraria; de hecho, en 1923 Menchoff probó un resultado que se suele utilizar en Teoría Ergódica: existe una base ortonormal de $L^2[0,1]$ digamos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y una $f_0 \in L^2[0,1]$ tales que: La sucesión de proyecciones $\{P_k f_0\}_k$, donde P_k es el operador de proyección sobre $span\{f_1, ..., f_k\}$, diverge en casi todo punto.
La pregunta ii) no es tan "antinatural", pues es relativamente fácil verficar

que el sistema de Haar es una base de $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$ ([8] y [16]) y por lo tanto cabe preguntarse si sigue valiendo en otro caso de wavelets mas generales.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 2 se exponen varios resultados de Análisis Armónico, Análisis Funcional y de la Teoría de Wavelets de índole general. En el capítulo 3 se estudia el comportamiento de las wavelets en $L^p(\mathbb{R}^d)$: convergencia de series en norma y puntualmente. Finalmente, en el capítulo 4 se estudian condiciones suficientes para que las wavelets formen una base incondicional de $L^p(\mathbb{R}^d)$.
Los resultados generales de Análisis Armónico del capítulo 2 siguen en general los lineamientos de [3], [10] y [14], algunos resultados fueron adaptados para el propósito de éste trabajo. En cuanto al tema de bases incondicioanles en espacios de Banach arbitrarios, los resultados son de [8].
Los resultados del Capítulo 3 fueron en gran parte extraídos de [7], de los cuales, algunos resultados sobre convergencia en norma de series de Wavelets fueron corregidos.
Por último, el Capítulo 4 sobre la convergencia incondicional de las expansiones Wavelet sigue las ideas de [15].

NOTACION

Repasaremos algunos aspectos de notación:
El espacio en que trabajaremos es, en general, $\mathbb{R}^d$, su norma euclidea la representaremos por $|\,.\,|$. Si $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \ |x-y| < r\}$ es la bola de centro x y radio r. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ es dx y en la esfera $d\Omega$. Si $E \subset \mathbb{R}^d$, su medida de Lebesgue será $|E|$ y su función característica: $\mathbf{1}_E(x) = 1$ si $x \in E$ y $\mathbf{1}_E(x) = 0$ si x pertenece al complemento de E. La expresión *En casi todo punto* se abreviará "c.t.p.".
La clausura de un conjunto la denotaremos $\overline{A}$, y a su interior A^o. Dada una función $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ su soporte es

$$\mathbf{S}upp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \ f(x) \neq 0\}}\ .$$

Sea (X,μ) (o $(X,\mathcal{F},\mu)$ si queremos explicitar la sigma álgebra considerada) un espacio de medida, para $1 \leq p < \infty$ definimos los espacios de Banach $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$ como el espacio de funciones con dominio en X y valores en $\mathbb{C}$ de potencia p integrable con la identificación usual. Si $f \in \mathrm{L}^p$ entonces su norma es

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} .$$

Así también, podemos definir $L^\infty(X,\mathcal{F},\mu)$ como el espacio de Banach de funciones f esencialmente acotadas de X en $\mathbb{C}$, o sea tales que para algún $C > 0$, $\mu\{x \in X : |f(x)| > C\} = 0$ y su norma $\|f\|_{L^\infty}$ es el ínfimo de las constantes que satisfacen dicha propiedad.
Por otra parte, en algunas ocasiones haremos uso de la *Tranformada de Fourier* $\hat{f}$ de una función $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, para la cual tomaremos la siguiente definición:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\omega.x} dx\ .$$

Las propiedades elementales de dicha transformada se darán por conocidas.
Aunque no serán muy usadas: AC denotará el conjunto de las funciones absolutamentes continuas y VA el conjunto de las funciones de variación acotada.

Por último: una función $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ es *radial* si solo depende de $|x|$. Es *radial decreciente* si $f(x) \leq f(y)$ siempre que $|x| \geq |y|$. Una función f pertenece a la clase $\mathcal{RB}$ si está absolutamente acotada por $\eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con η radial decreciente (necesariamente acotada).

2. PRELIMINARES

En esta sección se describirán algunas herramientas necesarias para demostrar ciertos resultados relacionados con la convergencia en c.t.p. y en norma de sucesiones de operadores, como así también algunos resultados necesarios sobre interpolación de operadores.

2.1. Algunos Resultados Generales

Más adelante nos será de utilidad el siguiente resultado:

Teorema 1. *(Descomposición de Calderón-Zygmund) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\lambda > 0$. entonces existe una familia de cubos $\{Q_i\}_i$ que está formada por cubos diádicos que satisfacen:*
1) $Q_i{}^o \cap Q_j{}^o = \oslash$ *si* $i \neq j$.
2) $\lambda < \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}|f| \leq 2^d\lambda$.
3) $|f(x)| \leq \lambda$ *c.t.p. en* $(\cup_i Q_i)^c$.
4) $|\cup_i Q_i| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$.

Demostración. Expondremos, como se construye tal familia de cubos. Evidentemente se puede encontrar algún cubo Q diádico tal que

$$\int\limits_Q |f| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f| \leq \lambda|Q|\,.$$

Ahora, a Q se lo puede dividir en 2^d cubos diádicos, digamos Q', tales que $|Q| = 2^d|Q'|$, para estos Q' se dá alguna de las siguientes situaciones:

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f| > \lambda \;\; o \;\; \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f| \leq \lambda$$

Si Q' verifica la primera desigualdad entonces lo agregamos a la lista de los cubos deseados, que en efecto, verifica la propiedad 2):

$$\lambda < \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f| \leq \frac{1}{|Q'|}\int\limits_Q |f| = \frac{2^d}{|Q|}\int\limits_Q |f| \leq 2^d\lambda\,.$$

En caso, de darse la segunda desigualdad se repite el proceso, es decir se subdivide a Q' en 2^d cubos diádicos y se vé cuales de estos cubos se agrega a la lista. Por otra parte, notemos que los cubos que vamos descartando van formando una subsucesión decreciente (por inclusión) de cubos diádicos que verifican la propiedad:

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f| \leq \lambda$$

Luego, por el teorema de diferenciación de Lebesgue, tenemos que $|f(x)| \leq \lambda$ para casi todo $x \in (\cup_i Q_i)^c$; de donde se sigue 3). 4) es inmediato, pues

$$|\cup_i Q_i| \leq \sum_i |Q_i| \leq \frac{1}{\lambda}\sum_i \int\limits_{Q_i}|f| = \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$$

$\square$

Como veremos el teorema de descomposición de Calderón -Zygmund nos permitirá, dada una función integrable, descomponerla en una función *buena* para la cual será relativamente fácil probar los resultados deseados, y otra *mala*, pero donde ésta función mala está soportada en un conjunto particular y además tiene valor medio nulo.
Ahora, recordemos dos definiciones que nos serán de utilidad:

Definición 2. *Dadas f y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definimos la convolución de f y g como:*

$$f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy\ .$$

Definición 3. *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ se define la función Maximal de Hardy-Littlewood:*

$$Mf(x) = \underset{r>0}{Sup}\,\frac{1}{|B(x,r)|}\int\limits_{B(x,r)}|f(y)|dy\ .$$

También será de utilidad el siguiente resultado, que da una cota para operadores de convolución:

Teorema 2. *Sea φ no negativa, radial, decreciente como función de $|x|$ en $[0,\infty)$ y $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces*

$$\underset{t>0}{Sup}\,|\varphi_t * f\,(x)| \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\, Mf(x)\ (2)$$

donde $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^d}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$.

Demostración. El conjunto $E = \{(y,s),\, y \in \mathbb{R}^d,\, s > 0 \,:\, \varphi_t(y) > s\}$ es medible y además

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(y,s)ds = \int_0^{\varphi_t(y)} ds = \varphi_t(y)\,.$$

Luego

$$|\varphi_t * f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_t(y)dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \int_0^\infty \mathbf{1}_E(y,s)dsdy$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\mathbf{1}_E(y,s)dyds = \int_0^\infty \int_{\{y:\varphi_t(y)>s\}} |f(x-y)|dyds\,.$$

Sea $E_t = \{y : \varphi_t(y) > s\}$, $t > 0$, la cual resulta ser una bola centrada en 0. Por lo tanto,

$$|\varphi_t * f(x)| \leq \int_0^\infty |E_t| \frac{1}{|E_t|} \int_{E_t} |f(x-y)|dyds \leq Mf(x) \int_0^\infty |E_t|ds = Mf(x)\, \|\varphi\|_{L^1}\ .$$

□

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida arbitrario, se puede dar la siguiente definición que usaremos posteriormente:

Definición 4. *Sea T un operador definido de un espacio vectorial de funciones medibles en funciones medibles, se dice que T es sublineal si*

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$$

y

$$|T(\lambda f)(x)| = |\lambda||Tf(x)|, \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Ahora, en adelante supondremos que todos los operadores involucrados son sublineales.

Definición 5. *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ dos espacios de medida y T un operador definido sobre $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$. se dice que T es (p,q)-débil $(q < \infty)$ si*

$$\nu\,\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\} \leq \left(\frac{C\, \|f\|_p}{\lambda} \right)^q \ ,$$

y (p,∞)-débil si es acotado de $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ en $L^\infty(Y, \mathcal{G}, \nu)$

Por ejemplo la función maximal de Hardy-Littlewood, visto como operador es sublineal, es más se tiene en siguiente resultado conocido de Análisis Real:

Proposición 1. *El operador maximal de Hardy-Littlewood es (1,1)-débil.*

Por otra parte también tenemos la siguiente definición:

Definición 6. *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ dos espacios de medida y T un operador definido sobre $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$. se dice que T es (p, q)-fuerte, si existe una constante $C_{pq} > 0$ independiente de f tal que:*

$$\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \leq C_{pq} \|f\|_{L^p(X,\mu)} \ ,$$

o sea T es un operador acotado en el sentido usual.

Ahora, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ será un espacio de medida arbitrario. El siguiente resultado habla de operadores *sublineales*, definidos sobre $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$: a veces, vamos a querer establecer resultados sobre la acotabilidad de operadores que actúan en $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ (L^p para simplificar), y para éste propósito nos será útil el siguiente resultado de interpolación debido a Marcinkiewicz.

Teorema 3. *Sea T un operador sublineal (p, p)-débil y (q, q)-débil* [1] *, $1 \leq p < q \leq \infty$, definido en $L^p + L^q$ entonces T es (r, r)-fuerte para todo $r \in (p, q)$.*

Demostración. Sea $f \in L^p$ entonces para cada $\lambda > 0$ descomponemos

$$f = f\mathbf{1}_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} + f\mathbf{1}_{\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}} = f_p + f_q$$

con c una constante que elegiremos después. Entonces $f_p \in L^p$ y $f_q \in L^q$, adems $|Tf(x)| \leq |Tf_p(x)| + |Tf_q(x)|$ de modo que

$$\mu\left\{x : |Tf(x)| > \lambda\right\} \leq \mu\left\{x : |Tf_p(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} + \mu\left\{x : |Tf_q(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \ .$$

[1]En general basta probarlo para un denso pues: supongamos que tenemos un operador sublineal T definido en un denso $S \subset L^p$ y que se cumple que $\exists C > 0$ tal que $\mu\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{C\|f\|_p^p}{\lambda^p}$ $\forall f \in S$, ahora dada $f \in L^p$ arbitraria, existe una sucesión $\{f_n\}_n \subset S$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en L^p, cuando $n \longrightarrow \infty$ entonces $\{Tf_n(x)\}_n$ es de Cauchy en medida y por lo tanto existe una g medible tal que $Tf_n \longrightarrow g$ en medida, mas aún, $\exists$ $\{f_{n_k}\}_k$ tal que $Tf_{n_k} \longrightarrow g$ en c.t.p, podemos definir $Tf = g$ y luego $|Tf(x)| \leq |T(f - f_n)(x)| + |Tf_n(x)|$, de donde se obtiene $\mu\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \mu\{x : |T(f - f_n)(x)| > \frac{\lambda}{2}\} + \mu\{x : |Tf_n(x)| > \frac{\lambda}{2}\} \longrightarrow \frac{C2\|f\|_{L^p}}{\lambda^p}$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Caso $q = \infty$.
Tomemos $c = \frac{1}{2A_1}$ donde A_1 es tal que $\|Tg\|_\infty \leq A_1 \|g\|_\infty$, resulta que $\mu\left\{x : |Tf_q(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} = 0$. Luego por la desigualdad (p,p)-débil

$$\mu\left\{x : |Tf_p(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \leq \left(\frac{2A_p}{\lambda}\|f_p\|_p\right)^p$$

y por lo tanto

$$\|Tf\|_r^r = r\int_0^\infty \lambda^{r-1-p}(2A_p)^p \int_{\{|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^p d\mu d\lambda$$

$$= r(2A_p)^p \int_X |f(x)|^p \int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} \lambda^{r-1-p} d\lambda d\mu$$

$$= \frac{r}{r-p}(2A_p)^p(2A_1)^{r-p}\|f\|_p^p \ .$$

Caso $q < \infty$.
Ahora, tenemos 2 desigualdades:

$$\mu\left\{x : |Tf_p(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \leq \left(\frac{2A_p}{\lambda}\|f_p\|_p\right)^p$$

y

$$\mu\left\{x : |Tf_q(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \leq \left(\frac{2A_q}{\lambda}\|f_q\|_q\right)^q$$

por lo que

$$\|Tf\|_r^r = r\int_0^\infty \lambda^{r-1-p}(2A_p)^p \int_{\{|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^p d\mu d\lambda + ...$$

$$+ r\int_0^\infty \lambda^{r-1-q}(2A_q)^q \int_{\{|f(x)|\leq c\lambda\}} |f(x)|^p d\mu d\lambda$$

$$= \left(\frac{r2^p}{r-p}\frac{A_p^p}{c^{r-p}} + \frac{r2^q}{q-r}\frac{A_q^q}{c^{q-r}}\right)\|f\|_p^p \ .$$

$\square$

Cabe destacar que el resultado sigue valiendo para el caso *no diagonal.* Veamos una primera aplicación de éste teorema:

Proposición 2. *El operador maximal de Hardy-Littlewood es (1,1)-débil y (p,p)-fuerte para* $p \in (1, \infty)$.

Demostración. Es evidente que dada $f \in L^\infty$ entonces $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Luego en resultado sigue de la proposición 1 y el teorema 3. $\square$

Con ésto podemos enunciar el siguiente resultado que se obtiene del teorema 2 y la proposición 2:

Corolario 1. *Si* $|\varphi| \leq \psi$ *donde* ψ *es radial, decreciente e integrable entonces* $\underset{t>0}{Sup}\ |\varphi_t * f(x)|$ *es de tipo (1,1)-débil y del tipo (p,p)-fuerte,* $1 < p \leq \infty$.

Demostración.

$$|\varphi_t * f\,(x)| \leq |\varphi_t| * |f\,|(x) \leq \psi_t * |f|(x)$$

y por lo tanto

$$\underset{t>0}{Sup}\ |\varphi_t * f(x)| \leq \underset{t>0}{Sup}\ \psi_t * |f|(x) \leq Mf(x)\,\|\varphi\|_{L^1}\ .$$

y el resultado buscado sigue de aplicar la proposición 2. $\square$

Veamos una última aplicación del teorema 3, nuevamente sobre operadores de convolución, que nos será de utilidad mas adelante:

Proposición 3. *Sea* $H \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *fija. Para* f *medible definimos*

$$Tf(x) = H * f(x)\ ,$$

entonces T *es de tipo* (p,p)*-fuerte para* $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. Primero: Sea $f \in L^\infty$, entonces:

$$|Tf(x)| = |H * f(x)| \leq \|f\|_\infty \|H\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

entonces $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|H\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. Ahora, sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)H(y)dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dydx$$

Por Fubini, esto último es igual a:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|dx|H(y)|dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|H\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\ .$$

Luego T es de tipo $(1,1)$ -fuerte y (∞,∞)-débil, entonces el resultado buscado sale de aplicar el teorema 3. $\square$

La proposición 3 será usada profusamente, por lo tanto, a veces quedará claro del contexto cuando se la está invocando. Una clase de operadores que nos interesa es la de los operadores integrales, es decir operadores definidos sobre espacios de funciones medibles (en nuestro caso funciones de $\mathbb{R}^d$) mediante formulas del tipo (siempre que tenga sentido):

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy \ ,$$

donde la función $K : \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}$ se la suele llamar el *núcleo* del operador integral T. Un ejemplo de éstos operadores son los operadores de convolución ya vistos antes, en este caso el núcleo del operador es la función $K(x,y) = H(x-y)$. También, utilizaremos aproximaciones de la identidad que de alguna manera se relacionan con el teorema de diferenciación de Lebesgue, por eso, recordemos la siguiente:

Definición 7. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ el conjunto de puntos de Lebesgue de f es*

$$Leb(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0 \right\}$$

O sea si $x \in Leb(f)$ se dá la convergencia a $f(x)$ del teorema de Lebesgue. El siguiente resultado es una versión ligeramente mas general de un resultado de [10], el cual usaremos mas adelante:

Teorema 4. *Sea $K_n(x,y)$ una familia de núcleos tales que: $\int K_n(x,y)dy \longrightarrow C$ cuando $n \longrightarrow \infty$, donde C es una constante; $|K_n(x,y)| \leq c_n^d H(c_n\,|x-y|)$, $c_n \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$, $H(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y es una función decreciente y acotada radialmente. Entonces, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $1 \leq p \leq \infty$:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_n(x,y)f(y)dy \longrightarrow Cf(x)$$

cuando $n \longrightarrow \infty$ para todo $x \in Leb(f)$ y por lo tanto c.t.p. Y además la convergencia hacia f es en $L^p(\mathbb{R}^d)$ $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. (conv. c.t.p.) Sin perdida de generalidad, supongamos $C = 1$, entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} K_n(x,y)f(y)dy \ - \ f(x) \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |K_n(x,y)|\,|f(y)-f(x)|dy \,+\, |f(x)| \left| \int_{\mathbb{R}^d} K_n(x,y)dy \,-\, 1 \right| = \, I_n^1 \,+\, I_n^2.$$

Definamos

$$\Phi(r) = \int_{B(0,r)} |f(x-y)-f(x)|dy$$

y veamos que $\exists\, K \,<\, 0$ tal que $\Phi(r) \leq Kr^d \;\forall\, r \,>\, 0$, en efecto si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\Phi(r) = \int_{B(0,r)} |f(x-y)-f(x)|dy \,\leq\, \int_{B(0,r)} |f(x-y)|dy \,+\, |f(x)|\; r^d\; |S_d|$$

$$\leq\, |B(0,r)|^{\frac{1}{q}}\, \|f\|_{L^p} \,+\, |f(x)|\, |B(0,r)| \,=\, |S_d|^{\frac{1}{q}}\; r^{\frac{d}{q}}\, \|f\|_{L^p} \,+\, |f(x)|\, |S_d|\; r^d\,,$$

y por lo tanto

$$\frac{\Phi(r)}{r^d} \,\leq\, |S_d|^{\frac{1}{q}}\; r^{d\left(\frac{1}{q}-1\right)}\, \|f\|_{L^p} \,+\, |f(x)|\, |S_d| \,=\, |S_d|^{\frac{1}{q}}\; r^{-\frac{d}{p}}\, \|f\|_{L^p} \,+\, |f(x)|\, |S_d|\;.$$

Dado que si $x \in Leb(f)$ entonces $\exists\, R_0 \,>\, 0$ tal que $\frac{\Phi(r)}{r^d} \,<\, 1$ si $r \,<\, R_0$ (que x sea punto de Lebesgue implica que $\frac{\Phi(r)}{r^d} \longrightarrow 0$ cuando $r \longrightarrow 0$) y por otra parte

$$\frac{\Phi(r)}{r^d} \,\leq\, |S_d|^{\frac{1}{q}}\; {R_0}^{-\frac{d}{p}}\, \|f\|_{L^p} \,+\, |f(x)|\, |S_d| = \, K_x \quad \forall\, r \,\geq\, R_0\,,$$

entonces

$$\frac{\Phi(r)}{r^d} \,\leq\, Max\,\{1, K_x\} \quad \forall\, r \,\geq\, 0\,. \tag{3}$$

Ahora, usando coordenadas esféricas,

$$I_n^1 \,\leq\, \int_{\mathbb{R}^d} c_n^d H(c_n|\,y\,|)\, |f(x-y)-f(x)|\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} \int_{S_{d-1}} c_n^d H(c_n\rho)\, |f(x-\rho\Omega)-f(x)| d\Omega \rho^{d-1}\, d\rho \,=\, I_n^{1\prime}\,,$$

ahora, notemos que $\Phi(r) = \int_0^r \phi(\rho)d\rho$, donde

$$\phi(\rho) = \int_{S_{d-1}} |f(x-\rho\Omega)-f(x)| d\Omega \rho^{d-1}\;,$$

por lo tanto,

$$I_n^{1\prime} = \int_0^{\infty} c_n^d H(c_n\rho)\phi(\rho)\,d\rho = \int_0^{\infty} c_n^d H(c_n\rho) d\Phi(\rho) = -\int_0^{\infty} c_n^d \Phi(\rho)\,dH(c_n\rho)\,,$$

Observamos que basta que exista alguna de las integrales de alguna de las igualdades para que exista la otra (Zygmund), esto se debe a que $H(r) \in VA$ y que $\Phi(r) \in AC$; y además vale la fórmula de integración por partes en su forma para integrales de Riemmann-Stieltjes. La última integral la podemos escribir como:

$$-\int_0^{\infty} \frac{\Phi\left(\rho/c_n\right)}{\left(\rho/c_n\right)^d} \rho^d\, dH(\rho)\,,$$

observemos que $\mu((a,b)) = -\int_a^b \rho^d dH(\rho) = \int_a^b \rho^{d-1} H(\rho)\,d\rho = \int_{\{a\le|x|\le b\}} H(x)dx\,,$ define una medida (finita) sobre toda la semirecta y que por (ec. 3) tenemos que $\frac{\Phi(\rho/c_n)}{(\rho/c_n)^d} \le K = ctte. \in L^1(\mu)$ para todo n. Luego por el teorema de convergencia mayorada se tiene que:

$$I_n^1 \le I_n^{1\prime} \longrightarrow 0\,,$$

si $n \longrightarrow \infty$ y como $I_n^2 \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ queda demostrada la convergencia c.t.p..
(conv. en L^p) sea $T_n f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_n(x,y)f(y)dy$, entonces

$$\|T_n f - f\|_{L^p}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} K_n(x,y)\,(f(y) - f(x))dy + f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_n(x,y)dy - 1 \right) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} |K_n(x,y)\,(f(y) - f(x))|dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left| \int_{\mathbb{R}^d} K_n(x,y)dy - 1 \right| \|f\|_{L^p}\,.$$

El segundo término de la suma tiende a cero por hipótesis, por lo que bastará estudiar el primer término, llamemoslo I_n^1. Por otra parte

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K_n(x,y)\,(f(y) - f(x))|dy \le \int_{\mathbb{R}^d} c_n^d H(c_n\,|x-y|)\,|f(y) - f(x)|dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} H(|\,y\,|)\,|f\,(x - y/c_n) - f(x)|dy\,.$$

Luego

$$I_n^1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} H(|\,y\,|)\,|f\,(x - y/c_n) - f(x)|dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} H(|y|)\,\|f(\,.\, - y/c_n) - f\|_{L^p} dy \;= I_n^2\,,$$

dado que por continuidad en norma: $\|f(\,.\, - y/c_n) - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y que $\|f(\,.\, - y/c_n) - f\|_{L^p} \leq 2\,\|f\|_{L^p}\ \forall\, n$. Usando como función mayorante $H(x)2\,\|f\|_{L^p}$, por el teorema de convergencia mayorada tenemos $I_n^2 \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y por lo tanto $I_n^1 \longrightarrow 0$, de donde sigue el resultado buscado.

□

2.2. El Principio de Banach y Convergencia en casi todo punto (c.t.p.)

En ésta sección describiremos algunos resultados generales que se suelen utilizar para establecer la convergencia en casi todo punto. En lo que sigue $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ será un espacio de medida arbitrario. Más precisamente: hablaremos de operadores lineales T, definidos sobre $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ tales que:
1) Para toda $f \in L^p$, $|Tf(x)| < \infty$ c.t.p.
2) T es continuo en medida, es decir dadas, $f,\ f_n \in L^p$ y $\|f - f_n\|_{L^p} \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces, para todo $\epsilon > 0$, $\mu\{x : |T_n f(x) - Tf(x)| > \epsilon\} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ahora, dada una sucesión de operadores $\{T_n\}_n$, se define, para toda $f \in L^p$:

$$T^*(f)(x) = \sup_{n \geq 1} |T_n f(x)|$$

Veremos como se relaciona T^*f con la convergencia en c.t.p., el primer resultado que damos sin demostración es consecuencia del teorema de Categoria de Baire:

Teorema 5. *(Principio de Banach) Sea $\{T_n\}_n$ una sucesión de operadores sobre $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ que verifican $T^*f(x) < \infty$ c.t.p.-$[\mu]$ para toda $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,* *entonces existe una función positiva y decreciente $C(\lambda)$ definida para todo $\lambda > 0$ y que tiende a 0 cuando $\lambda \longrightarrow \infty$ tal que, para toda $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ se tiene:*

$$\mu \{x : \ T^* f(x) > \lambda \|f\|_{L^p}\} \leq C(\lambda); \ \ \forall \lambda > 0 \tag{4}$$

En muchos casos de interés es posible establecer con relativa facilidad la convergencia c.t.p. para un conjunto denso en $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, y de éste hecho se puede establecer la convergencia en c.t.p. para toda $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ usando el siguiente resultado:

Teorema 6. *Cuando la sucesión $\{T_n\}_n$ satisface la desigualdad (4), entonces el conjunto de las $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ para las cuales $T_n f(x)$ es convergente en c.t.p. es cerrado en $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.*

Demostración. Denotaremos éste conjunto de funciones como $\mathcal{C}$. Probaremos que dada una $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ que verifica que $\forall \epsilon > 0$ se tiene una $g \in \mathcal{C}$ tales que: $\|f - g\|_{L^p} < \epsilon$ entonces $f \in \mathcal{C}$.
Para toda $f \in L^p$ definamos la función:

$$R(x, f) = \overline{\lim_{n,m \to \infty}} \ |T_n f(x) - T_m f(x)| \ .$$

Como $R(x, f) \leq 2T^*(f)(x)$ c.t.p., tenemos:

$$\mu \{x : R(x, f) > \lambda \|f\|_{L^p}\} \leq C \left(\frac{\lambda}{2} \right) \ . \tag{5}$$

Por otra parte, para toda $f \in L^p$ y cualquier $g \in \mathcal{C}$ tenemos:

$$R(x, f) = R(x, f - g) \quad c.t.p.$$

Por lo tanto, de 5 tenemos:

$$\mu \{x : R(x, f) > \lambda \|f - g\|_{L^p}\} \leq C \left(\frac{\lambda}{2} \right) .$$

tomando $\lambda = 1/\epsilon$ y $\|f - g\|_{L^p} < \epsilon^2$:

$$\mu \{x : R(x, f) > \epsilon\} \leq C \left(\frac{1}{2\epsilon} \right) .$$

Como ϵ era arbitrariamente chico se tiene que $R(x, f) = 0$ c.t.p. de donde se deduce la convergencia en c.t.p. de $T_n f(x)$. $\square$

2.3. Bases Incondicionales

Una noción de la que haremos uso, es la de base incondicional. Antes de estudiar bases incondicionales, se hará la presentación de un resultado general sobre convergencia incondicional en un espacio de Banach [8]:

Teorema 7. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores en un espacio de Banach X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge para cada permutación π de los enteros.
ii) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n_i}$ converge para cada elección de enteros $n_1 < n_2 \ldots.$
iii) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ converge para cada elección de signos de $\theta_n = \mp 1$.
iv) Para todo $\epsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \sum\limits_{i\in\sigma} x_i \right\| < \epsilon$ para todo subconjunto de $\sigma \subset \mathbb{N}$ que verifica min $\{i \in \sigma\} > n$.
Una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ que verifica una, y por lo tanto todas las condiciones, se le dice incondicionalmente convergente.

Demostración. La equivalencia de (ii) y (iii) es inmediata. Si (iv) es cierta entonces las sumas parciales que aparecen en (i) y (ii) satisfacen la condición de Cauchy y por lo tanto (iv)$\Rightarrow$(i) y (iv)$\Rightarrow$ (ii). Ahora, supongamos que (iv) no se statisface. Entonces, existe un $\epsilon > 0$ y una familia de conguntos finitos de enteros $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$q_n = \max\{i,\ i \in \sigma_n\} < p_{n+1} = \min\{i,\ i \in \sigma_{n+1}\}$$

y $\left\| \sum\limits_{i\in\sigma} x_i \right\| \geq \epsilon$ para todo n. Luego $\sigma = \cup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ es una subsucesión de enteros para los cuales $\sum\limits_{n=\sigma} x_n$ no converge, y por lo tanto (ii)$\Rightarrow$(iv).
Ahora, si π es una permutación, tal que para todo n: π mapea el conjunto $\{i\,, p_n \leq i \leq q_n\}$ en sí mismo de manera que: $\pi^{-1}(\sigma_n) = \{p_n,\, p_n+1,\, p_n+k_n\}$, donde $k_n = \sharp\sigma_n$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ no converge, luego (i)$\Rightarrow$ (iv). □

Ahora, estamos en condiciones de definir que es una base incondicional:

Definición 8. *Una base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (de Schauder) de X (un espacio de Banach) se dice que es incondicional si para todo $x \in X$, su desarrollo en serie en términos de dicha base $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge incondicionalmente.*

Más adelante nos será de utlilidad la siguiente proposición que es consecuencia directa del teorema 7:

Proposición 4. *Una sucesión básica $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es incondicional si y sólo si cualquiera de las siguientes afirmaciones se cumple:*
i) Para toda permutación π de los enteros la sucesión $\{x_\pi n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica (es base de span$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$).
ii) Para cualquier subconjunto σ de enteros la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ implica la convergencia de $\sum_{n\in\sigma} a_n x_n$.
iii) La convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$, donde $|b_n| \leq |a_n|$.
iv) La convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$ donde $\theta_n = \mp 1$ arbitrariamente.

2.4. Wavelets y Análisis Multirresolución

Recordemos que un análisis multirresolución (AMR) de $L^2(\mathbb{R}^d)$ es una descomposición de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en una sucesión de subespacios cerrados V_n de manera que,

$$\dots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$$

con la propiedad de que si $f(2x) \in V_{j+1} \iff f(x) \in V_j$ para todo j. También se cumple que:

$$\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\} \tag{6}$$

$$\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^d) \tag{7}$$

Se asume que existe una función $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ que verifica:

$$\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$$

es una base ortonormal de V_0. A esta función ϕ se la llama función de escala. Se define $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$. De la existencia de ϕ se deduce que existe una familia de *wavelets básicas* $\left\{\psi^\lambda(x)\right\}_\lambda$ de manera que $\psi^\lambda_{j\,k}(x) = \psi^\lambda(2^j x - k)$ fijo j es una base ortonormal de W_j, y una base para todo $L^2(\mathbb{R}^d)$. Observamos que λ es un índice en un conjunto de $2^d - 1$ elementos [2], o sea es finito.

[2]Que la cantidad de elementos sea $2^d - 1$ no es caprichoso, pues una de las maneras de obtener bases de wavelets $L^2(\mathbb{R}^d)$ es por medio del producto tensorial apropiado de funciones de escala y wavelets de $L^2(\mathbb{R})$, en ésta construcción se consigue un conjunto de wavelets básicas de $2^d - 1$ elementos [16]. Otra manera de obtener bases de Wavelets es por medio de matrices de *dilatación*, en el caso de utilizar la matriz $2.Id$ se llega a la misma conclusión [16].

Antes de seguir, enunciemos algunas propiedades conocidas de las funciones de escala que nos serán de utilidad.

Proposición 5. *El sistema* $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *es ortonormal si y sólo si*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\hat{\phi}(x+2\pi k)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \quad c.t.p.$$

Ahora, con ésto, probemos un par de propiedades bástante útiles sobre las funciones de escala:

Proposición 6. *Sea* ϕ *una función de escala asociada a un AMR y supongamos que* $\hat{\phi}(\omega)$ *es continua en cero, entonces:* $|\hat{\phi}(0)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}$*, en particular, si* $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *entonces*

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx \right| = 1$$

Demostración. Sea $P_j = P_{V_j}$ la proyección ortogonal sobre el subespacio V_j, y sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\mathbf{S}upp(\hat{g}) \subset [-1,1]^d$ entonces,

$$\|P_j g\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |<g, \phi_{j\,k}>|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| \int\limits_{[-1,1]^d} \hat{g}\bar{\hat{\phi}}(2^{-j}\omega)e^{i2^{-j}k}2^{-\frac{j}{2}}d\omega \right|^2,$$

ahora tomemos $j \in \mathbb{Z}$ de manera que $2^j\pi > 1$, entonces por la identidad de Parseval para series de Fourier, la última sumatoria es igual a:

$$(2\pi)^d \int\limits_{[-1,1]^d} |\hat{g}(\omega)\hat{\phi}(2^{-j}\omega)|^2 d\omega \longrightarrow (2\pi)^d |\hat{\phi}(0)|^2 \, \|g\|^2$$

cuando $j \longrightarrow \infty$, pues $|\hat{\phi}(2^{-j}\omega)| \longrightarrow |\hat{\phi}(0)|$ uniformemente cuando $j \longrightarrow \infty$. Pero por otra parte

$$\|P_j g\|^2 \longrightarrow \|g\|^2$$

cuando $j \longrightarrow \infty$, de donde sigue el resultado buscado. $\square$

Proposición 7. *Sea* $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ *la función de escala de un AMR, entonces:*

1) $|\hat{\phi}(0)| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$ *y* $\hat{\phi}(2\pi k) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^d - \{0\}$

2) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} \phi(x+k) = 1$ *c.t.p.*

Demostración. Por la proposición 5 sabemos que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^d}$ en c.t.p., por otra parte, como $\hat{\phi}$ es continua, por la proposición 6 tenemos que $|\hat{\phi}(0)| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$ y por lo tanto, como $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} |\hat{\phi}(2\pi k)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^d}$ tenemos que $\hat{\phi}(2\pi k) = 0$ para todo $k \neq 0$, pero éstos son los coeficientes de Fourier de $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} \phi(x+k)$, de donde se obtiene la afirmación 2). $\square$

3. WAVELETS COMO BASES DE $L^p(\mathbb{R}^d)$

Las propiedades de las bases de wavelets en $L^2(\mathbb{R}^d)$ son conocidas, y fueron usadas con éxito en distintas aplicaciones. En este trabajo se estudia las propiedades de convergencia de las expansiones de wavelets y de las expansiones de escala para funciones en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con p no necesariamente igual a 2. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, veremos que bajo ciertas condiciones de decaimiento las expansiones wavelets y de escala convergen puntualmente y en norma a f. La mayor parte de los resultados son de [7].

3.1. Algunas Definiciones e Introducción

Llamaremos P_j a la proyección ortogonal sobre V_j y Q_j a la proyección sobre W_j.
Para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ definimos:
i) Su *aproximación multirresolución* está dada por la sucesion $\{P_n f\}_n$
ii) Su *expansión wavelet* es

$$\sum_j \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^\lambda_{j\,k}\psi^\lambda_{j\,k} \sim f \quad [3]$$

iii) Su *expansión escala* es

$$\sum_k b_k\phi_k + \sum_{j>0} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^\lambda_{j\,k}\psi^\lambda_{j\,k} \sim f$$

En un principio estas series convergen en la norma $L^2(\mathbb{R}^d)$ por la teoría conocida de espacios de Hilbert, quisieramos saber si ésto sigue valiendo para $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, mas aún: saber cuando hay convergencia en norma y en c.t.p.
La idea utilizada es escribir a la proyecciones P_j (Q_j) como operadores integrales, siempre que sea posible, con núcleo

$$P_m(x,y) = \sum_{j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y) = \sum_k \phi_{m\,k}(x)\phi_{m\,k}(y)\,,$$

[3]En adelante, salvo que se indique lo contrario, en los índices de las sumatorias: $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}^d$ lo cual quedará claro del contexto, y recordemos que $\lambda \in \Lambda$ donde $\sharp\lambda = 2^d - 1$.

extenderlos a $L^p(\mathbb{R}^d)$ y utilizar resultados sobre aproximación de la identidad.

Por lo visto anteriormente, es evidente que aunque la función (o familia de funciones) que genera un AMR no puede ser cualquier función de $L^2(\mathbb{R}^d)$ lo mismo, en un principio no está sujeta a grandes restrcciones, más aún si sólo se quiere generar una base de wavelets de $L^2(\mathbb{R}^d)$ no necesariamente asociada a un AMR, por lo tanto la dificultad de probar resultados sobre convergencia dependerá en gran parte sobre las hipótesis adicionales que se hagan sobre ψ (y/o ϕ). Una característica de ψ (ϕ) que puede llegar a ser determinante en éste aspecto es su velocidad de decaimiento para valores grandes de $|x|$. La contrapartida de éste punto de vista es imponer restricciones en el decaimiento de $\hat{\psi}$ ($\hat{\phi}$), pero en este trabajo no analizaremos ese caso. En efecto, cuanto más rápido sea el decaimiento, más fácil es de probar que hay convergencia puntual. A manera de ejemplo y de introducción, probemos un resultado para wavelets de soporte compacto, asociadas a un AMR: primero probaremos que hay convergencia puntual para una f suficientemente buena en un denso de $L^p(\mathbb{R}^d)$ y después probaremos que ciertas funciones maximales asociadas a las proyecciones son $(1,1)$-débil y (p,p)-fuerte para $p \in (1,\infty)$. Luego el resultado buscado saldrá por aplicación del teorema 6.

Teorema 8. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$ entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j<m,\, k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j\,k} \rangle \psi_{j\,k}(x) = f(x) \ .$$

Demostración. Primero: Sea $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ planteamos la diferencia,

$$f(x) - P_{m+1}(x) = f(x) - \sum_k \langle f, \phi_{m+1\,k} \rangle \phi_{m+1\,k}(x) =$$

$$= f(x) - \int_{\mathbb{R}} f(y) 2^{(m+1)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2^{m+1}y - k)\phi(2^{m+1}x - k)dy \ .$$

Si definimos $P(x,y) = \sum_k \phi(y-k)\phi(x-k)$, y además notemos que por las proposiciones 6 y 7:

$$\int_{\mathbb{R}} P(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \sum_k \phi(y-k)\phi(x-k)dy = \sum_k \int_{\mathbb{R}} \phi(y-k)dy\phi(x-k) = 1 \ .$$

y por lo tanto,

$$f(x) - \int_{\mathbb{R}} f(y) 2^{(m+1)} P(2^{m+1}x, 2^{m+1}y)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y)) 2^{(m+1)} P(2^{m+1}x, 2^{m+1}y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x + 2^{-(m+1)}t)) P(2^{m+1}x, 2^{m+1}x + t) dy$$

Veamos que pasa cuando $m \longrightarrow \infty$. Observemos que

$$|P(z, z+t)| \leq \sum_k |\phi(z-k)\phi(z+t-k)|$$

Notemos que en la sumatoria sólo debemos considerar aquellos k para los cuales $|z-k| \leq R$ para cierto $R > 0$ (El soporte de ϕ está contenido en una bola) y $|z+t-k| \leq R$. Por lo tanto t queda acotado para $|t| \leq 2R$, luego $|P(z, z+t)| \leq C\mathbf{1}_{|t| \leq 2R}$. Luego la integral queda acotada por

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x + 2^{-(m+1)}t)||P(2^{m+1}x, 2^{m+1}x + t)| dy$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x + 2^{-(m+1)}t)| \mathbf{1}_{|t| \leq 2R} dy \ .$$

Pero, por la continuidad de f y por el teorema de convergencia mayorada ésta integral tiende a cero cuando $m \longrightarrow \infty$.
Por otra parte, notemos que la cota sobre el núcleo $P(x, y)$ la podemos reescribir como: $|P(x, y)| \leq C\mathbf{1}_{B(0,2R)}(|x - y|)$. y por lo tanto,

$$|P_m f(x)| \leq 2^m C \int_{B(x, 2^{1-m}R)} |f(y)| dy \leq C' Mf(x) \ ,$$

donde $Mf(x)$ es la función maximal de de Hardy Littlewood, luego la función maximal $\sup_{m \in \mathbb{Z}} |P_m f(x)|$ asociada a la sucesión de proyecciones $P_m f(x)$ queda acotada por

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} |P_m f(x)| \leq C' Mf(x)$$

pero el operador M es $(1,1)$-débil y (p,p) fuerte para $p \in (1, \infty)$. Luego el resultado buscado sale de que el enunciado del resultado es cierto para un denso y por aplicación del teorema 6.

$\square$

Es interesante ver la simpleza de éste resultado comparado con su análogo para series de Fourier (R. Hunt y L. Carleson). Se podría haber acortado aún más la demostración, invocando el teorema 4. Aunque como veremos , si no asumimos ésta hipótesis sobre el soporte de ϕ la situción se volverá mas complicada.

Necesitaremos la siguiente definición, que es un poco mas débil que la noción de continuidad para una función: Una función f es *parcialmente continua* si existe un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ de medida positiva tal que $\lim_{t \to 0} f(x+ta) = f(x)$ para todo $a \in A$. Sobre las funciones parcialmente continuas se puede afirmar lo siguiente, que usaremos en varias ocasiones:

Proposición 8. *Sean f y g parcialmente continuas, $f(x) = g(x)$ c.t.p. entonces $f(x) = g(x)$ en todo punto.*

Demostración. Sea x tal que $f(x) > 0$, f parcialmente continua en x, veamos que $\exists\, \delta$ A medible $|A| > 0$ tales que $f(x+ta) > 0$ $\forall\, a \in A$ y $|t| < \delta$, en efecto, supongamos que no, entonces para casi todo $a \in \mathbb{R}^d$ y para todo $\delta > 0$ $\exists$ $|t| < \delta$ tal que $f(x+ta) \leq 0$, por lo tanto como $\exists\, \lambda > 0$ tal que $|f(x)| > \lambda > 0$ luego $|f(x+ta) - f(x)| > \lambda$ entonces f no es parcialmente continua, lo cual es un absurdo.
Como consecuencia de lo anterior: Si $f(x) > 0$ y f es parcialmente continua en x entonces $\exists$ $|B| > 0$ tal que $x \in B$ y $f(y) > 0$ $\forall\, y \in B$: Definamos $B = \left\{y \in \mathbb{R}^d : y = x + at,\ a \in A,\ |t| < \delta\right\}$ donde A es el conjunto anterior, por lo tanto $|B| > 0$.
Ahora si existiera x tal que $f(x) \neq g(x)$ entonces $h(x) = |f(x) - g(x)| > 0$ y como h es parcialmente continua debe existir A medible $|A| > 0$ tal que $|f(x) - g(x)| > 0$: Absurdo. $\square$

3.2. Resultados Auxiliares

En esta sección daremos algunos resultados de índole técnica, necesarios para establecer nuestro resultado buscado sobre convergencia puntual y en norma de las expansiones Wavelet y Multirresolución.

Proposición 9. *Sea $\{\psi_n\}$ una sucesión de funciones parcialmente continuas y A_n el conjunto de direcciones para ψ_n. Si $A = \bigcap_n A_n$ tiene medida positiva y si $\sum_n \psi_n = \psi$ uniformemente, entonces ψ es también parcialmente continua.*

Demostración. sea $y \in A = \bigcap_n A_n$.Por la convergencia uniforme vale intercambiar el limite con la sumatoria:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\psi(x+\epsilon y) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0}\sum_n \psi_n(x+\epsilon y) = \sum_n \lim_{\epsilon\to 0}\psi_n(x+\epsilon y) = \sum_n \psi_n(x)\;.$$

Teorema 9. *Sea $f(x,y)$ definida sobre $\mathbb{R}^{d+v}$, o sea $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^v$; entonces si $f(x,y)$ es parcialmente continua en x para casi todo y, y si $\forall\, x\in\mathbb{R}^d \;\; \exists\,\delta>0$ tal que:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathit{sup}_{|z-x|\le\delta} |f(z,y)|dy \;<\; \infty\,,$$

entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}^v} f(x,y)dy$$

es parcialmente continua.

Demostración. Sea $a\in A$ $|a|\le 1$, donde A es el conjunto de direcciones de $f(x,y)$ en la variable x. Entonces,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^v}(f(x+\epsilon a,y)-f(x,y))dy\right| \le \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^v}|f(x+\epsilon a,y)-f(x,y)|\,dy = 0\,,$$

pues sabemos que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} f(x+\epsilon a,y)=f(x,y)$ por ser f parcialmente continua en la variable x, además $|f(x+\epsilon a,y)-f(x,y)| \le \sup\limits_{\epsilon\le\delta}|f(x+\epsilon a,y)| \in L^1(\mathbb{R}^v)$ pues por hipótesis;

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\sup_{|x+\epsilon a-x|\le\delta}|f(x+\epsilon a,y)|dy \;<\; \infty\,,$$

luego por convergencia mayorada y por la continuidad parcial de f:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^v}|f(x+\epsilon a,y)-f(x,y)|\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^v}\lim_{\epsilon\to 0}|f(x+\epsilon a,y)-f(x,y)|\,dy = 0\,.$$

De donde sigue el resultado buscado. □

Teorema 10. *Supongamos que el núcleo $P_0(x,y)$ del operador de proyección P_0 verifica la cota de convolución: $|P_0(x,y)|\le H(\,|x-y|\,)$ donde $H\in\mathcal{RB}\cap L^1(\mathbb{R}^d)$ (sin asumir la existencia de una función de escala), entonces: i) $P_m \longrightarrow Id$ fuertemente en $L^p(\mathbb{R}^d)$, para $1\le p<\infty$. Además para*

$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, la aproximación $P_m f$ converge a f en $L^p(\mathbb{R}^d)$.
ii) Para $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $P_m f(x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ c.t.p. .
iii) $P_m(x,y)$ puede ser redefinido sobre un conjunto de Lebesgue de medida cero de manera de que (ii) vale $\forall\, x \in Leb(f)$ $(1 \leq p \leq \infty)$.
iv) Si además $P_m(x,y)$ es parcialmente continua en x, entonces la convergencia en (ii) vale $\forall\, x \in Leb(f)$

Observación. La existencia de una función de escala simplificaría bastante parte de la demostración utilizando las proposiciones 6 y 7.

Demostración. i)y ii) La idea es usar el teorema 4, para eso probaremos que $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)dy = 1$ c.t.p. en x.
Por propiedades de escalas de los espacios V_m se tiene que $V_{m+1} = J_1 V_m$ donde $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $J_j f(x) = 2^{dj/2} f(2^j x)$ (La constante $2^{dj/2}$ hace que $J_j : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ sea unitario).
Ahora veamos que $P_m = J_1 P_{m-1} J^{-1}$: Tomemos $\{g_n\}_n$ una base ortonormal de V_{m-1}, entonces dado que es inmediato que $\langle f, J_1 g\,\rangle = \langle J_{-1} f, g\,\rangle$, luego $\{J_1 g_n\}_n$ es una base ortonormal de V_m, con esto último tenemos que

$$J_1 P_{m-1} J_{-1}\, f = J_1 \sum_n \langle g_n, J_{-1} f\rangle g_n = \sum_n \langle J_1 g_n, f\,\rangle J_1 g_n = P_m f\ .$$

De donde se deduce que el núcleo se escribe como:

$$P_m(x,y) = 2^d P_{m-1}(2x, 2y) = 2^{md} P_0(2^m x, 2^m y)\,, \tag{8}$$

en efecto, si $P_m f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y) f(y)dy$ y por otra parte,

$$P_{m-1} J_{-1} f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_{m-1}(x,y) J_{-1} f(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_{m-1}(x,y) 2^{-d/2} f(2^{-1}y)dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_{m-1}(x,2y) 2^{-d/2} 2^d f(y)dy\,.$$

Entonces,

$$J_1(P_{m-1}J_{-1})(f)(x) = 2^d \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_{m-1}(2x, 2y) f(y)dy$$

de donde se sigue 8.
En virtud del teorema 4 para demostrar i) y ii) bastará probar que:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_0(x,y)dy = 1 \ c.t.p. \tag{9}$$

Pues, en este caso, tendríamos que:

$$|P_0(x,y)| \leq H(\,|x-y|\,)$$

donde $H(\,|x|\,)$ es una función decreciente en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y por la igualdad 8 se tiene que $|P_m(x,y)| = 2^{md}\,|P_0(2^m x, 2^m y)| \leq 2^{md} H(2^m\,|x-y|\,)$ y además:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)dy = 1 \ c.t.p.$$

de donde se obtendría el resultado buscado. Para probar 10, primero, observemos que el núcleo P_0 es invariante por traslaciones, o sea $P_0(x+k, y+k) = P_0(x,y)$. Si $T_k f(x) = f(x-k)$, entonces

$$T_k P_0 T_k^{-1} f(x) = T_k P_0 f(x+k)$$

$$= T_k \{g \in V_0 \ : min \, \|f(x+k) - g(x)\|_2\}$$
$$= T_k \{g(.+k) \in V_0 \ : min \, \|f(x+k) - g(x+k)\|_2\}$$
$$= T_k \{g(.+k) \in V_0 \ : min \, \|f(x) - g(x)\|_2\}$$
$$= \{g \in V_0 \ : min \, \|f - g\|_2\} = P_0 f$$

Entonces $T_k P_0 T_k^{-1} f = P_0 f$, para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
Luego

$$T_k P_0 T_k^{-1} f = T_k \int P_0(x,y) f(y+k)dy = T_k \int P_0(x, y-k) f(y)dy$$

$$P_0 f(x) = \int P_0(x-k, y-k) f(y)dy$$

Luego $P_0(x-k, y-k) = P_0(x,y)$.
Veamos ahora que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_0(x,y)dy = 1 \ c.t.p.$$

Supongamos que es falso, o sea que existe $E_0 \subset \mathbb{R}^d$ tal que $|E_0| > 0$, y para $x \in E_0$: $\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_0(x,y)dy - 1 \right| > \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. O sea

$$E_0 = \left\{ x \ : \exists \ \epsilon > 0 \ : \ \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_0(x,y)dy - 1 \right| > \epsilon \right\}$$

Notemos que E_0 es invariante por traslaciones enteras ya que P_0 es invariante por traslaciones enteras. Definiendo

$$E_m = \left\{ x \,:\, \exists\, \epsilon > 0 \,:\, \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)dy - 1 \right| > \epsilon \right\}$$

Veamos que por la invarianza de escalas de los núcleos P_m que los conjuntos (módulo un conjunto de medida cero) se pueden escribir,

$$E_m = R_m E_0 = \{2^{-m}x \,:\, x \in\, E_0\}$$

donde del lado derecho definimos el operador escala R_m.

En efecto, si $x \in E_m$ tenemos $\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)dy - 1 \right| > \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$, y ésto es si y sólo si $\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} 2^{md} P_0(2^m x, 2^m y)dy - 1 \right| > \epsilon$ para algún $\epsilon > 0 \iff$ $\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} 2^{md} 2^{-md} P_0(2^m x, y)dy - 1 \right| > \epsilon$ para algún $\epsilon > 0 \iff x \in 2^{-m}E_0$.

Como los conjuntos E_m son invariantes bajo traslaciones por $2^{-m}k$,$k \in \mathbb{Z}^d$ y cada E_m es una reescala de E_0, y E_0 es invariante por traslaciones enteras y es de medida positiva (entonces infinita) luego se sigue que para cualquier $B_r = B(0,r)$:

$$\left| E_m \cap B_r \right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} C_r \,,$$

donde $C_r > 0$. Ahora, consideremos la función característica $\mathbf{1}_{B_r}(x)$ de B_r, entonces:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)dy - \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)\mathbf{1}_{B_r}(y)dy = \int\limits_{|y|>r} P_m(x,y)dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para $x \in B_r$ pues:

$$\left| \int\limits_{|y|>r} P_m(x,y)dy \right| \leq 2^{md} \int\limits_{|y|>r} |H(2^m\, |x-y|\,)|\, dy$$

$$= 2^{md}2^{-md} \int\limits_{|-y+2^m x|>2^m r} |H(\,|y|\,)|\, dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,, \tag{11}$$

y el último miembro de la igualdad tiende a cero cuando $m \longrightarrow \infty$ pues $H \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Por otro lado,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)\mathbf{1}_{B_r}(y)dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{B_r}$$

en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y también en medida (Tchevicheff), o sea dado $\epsilon > 0$

$$|\{x : |P_m\mathbf{1}_r(x) - \mathbf{1}_{B_r}(x)| > \epsilon\}| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,. \tag{12}$$

De éste hecho, fijo $\epsilon > 0$ si consideramos el conjunto de los $x \in B_r$ para los cuales $\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)\mathbf{1}_{B_r}(y)dy - 1\right| > \epsilon$, la medida de dicho conjunto tiende a cero cuando $m \longrightarrow \infty$ por ec. 10 y que $\mathbf{1}_{B_r}(x) = 1$ si $x \in B_r$. O sea

$$\left|\left\{x \in B_r : \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)\mathbf{1}_{B_r}(y)dy - 1\right| > \epsilon\right\}\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

ahora de ésto, del hecho de que $|B_r| < \infty$ y de las ecuaciones 11 y 12 se sigue que:

$$\left|\left\{x \in B_r : \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)dy - 1\right| > \epsilon\right\}\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

lo cual es un absurdo. Ahora por el teorema 4 tenemos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)f(y)dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

para todo punto de Lebesgue (por lo tanto c.t.p) y en $L^p(\mathbb{R}^d)$.
iii) La afirmación iii) valdría por el teorema 4 si $\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_0(x,y)dy = 1$ para todo x. Sabemos que dicha igualdad vale para casi todo x y por una redefinición de $P_m(x,y)$ sobre un conjunto de medida cero, entonces vale para todo x.

iv) En particular, Si $P_m(x,y)$ es parcialmente continua, del teorema 9 tenemos que $\int\limits_{\mathbb{R}^v} P_m(x,y)dy$ es parcialmente continua, en efecto,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^v} \max_{|z-x|<\delta} |P_m(z,y)|\,dy \le \int\limits_{\mathbb{R}^v} \max_{|z-x|\le\delta} 2^{md}H(2^m\,|z-y|\,)dy$$

si llamamos $G(x) = 2^{md}H(2^m x)$ tenemos,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^v} \max_{|z-x|\,\leq\delta} G(\,|z-y|\,)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^v} \max_{|z+u|\,\leq\delta} G(\,|z|\,)du \leq \int\limits_{\mathbb{R}^v} G(\,|u|\, - \delta)du < \infty\,,$$

entonces, por el teorema 9 $\int\limits_{\mathbb{R}^v} P_m(x,y)dy$ es parcialmente continua, como $\int\limits_{\mathbb{R}^v} P_0(x,y)dy$ es parcialmente continua e igual a 1 en c.t.p. se sigue que la igualdad vale en todo punto. Luego por el teorema 4 se sigue que:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)f(y)dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

para todo punto de Lebesgue. $\square$

Proposición 10. *Sobre* $\mathbb{R}^d$*, sea* $f(x)ln(2+\,|x|\,)$ *absolutamente acotada por una función radial decreciente e integrable* $\eta(\,|x|\,)$ *, sea* F *un conjunto cerrado que no contiene al* 0 *entonces*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_F 2^{jd}\,\left|f(2^j x)\right| dx < \infty \tag{13}$$

Demostración. Sin perdida de generalidad: $F = \mathbb{R}^d \backslash B(\rho,0)$ donde $\rho > 0$. Además denotaremos las variables angulares como Ω y $\omega_d = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d / \,|x| \leqslant 1\right\}\right|$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_F 2^{jd}\left|f(2^j x)\right| dx \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \int d\Omega \int\limits_{\rho}^{\infty} r^{d-1} 2^{jd} \eta(2^j r)/ln(2+2^j r)dr$$

$$= \omega_d \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{\rho}^{\infty} r^{d-1} 2^{jd} \eta(2^j r)/\ln(2+2^j r)dr$$

$$= \omega_d \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{2^j\rho}^{\infty} r^{d-1} \eta(r)/\ln(2+2^j r)dr = \omega_d \int\limits_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[2^j\rho,\infty]} r^{d-1}\eta(r)/\ln(2+r)dr$$

$$\leqslant C \int\limits_0^{\infty} r^{d-1} \ln(2+r)\eta(r)/\ln(2+r)dr < \infty$$

La última cota sale de que $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[2^j\rho,\infty]} = Max\{j \in \mathbb{N}_0 \ : \ 2^j\rho < r\}$. $\square$

Teorema 11. *i) Si* $\phi \in \mathcal{RB}$ *entonces el núcleo* $P_0(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \phi(x-k)\phi(y-k)$ *satisface*

$$|P_0(x,y)| \leq H_0(\,|x-y|\,) \tag{14}$$

dondee H_0 *es una función decreciente radialmente acotada en* $L^1(\mathbb{R}^d)$*.*
Ademas la convergencia de esta suma es uniforme sobre $\mathbb{R}^{2d}$*.*
ii) Si $\psi^\lambda(x) \in RB$ *entonces* $Q_0(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\,\lambda} \psi^\lambda(x-k)\psi^\lambda(y-k)$ *converge uniformemente y absolutamente sobre* $\mathbb{R}^{2d}$ *y está acotada. Ademas si* $\psi^\lambda(x)\ln(2+|x|\,) \in \mathcal{RB}$ *entonces* $|Q_0(x,y)| \leq \frac{H_1(\,|x-y|\,)}{\ln(2+|x|\,)}$ *Donde* H_1 *es una función decreciente, radial y acotada de* $L^1(\mathbb{R}^d)$*. Esta suma* $Q_0(x,y)$ *es el núcleo de la proyección ortogonal* Q_0 *sobre* W_0*.*

Demostración. Como $\phi \in \mathcal{RB}$ entonces ϕ está acotada absolutamente por $\eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$ una función radial decreciente. Sea $M = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\phi(x)|$, entonces, podemos escribir,

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \phi(x-k)\phi(y-k)\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\phi(x-k)\phi(y-k)|$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\phi(x-k)| \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\phi(y-k)| \leq M \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\phi(x-k)|$$

$$\leq M \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\eta(x-k)| \leq CM \int_{\mathbb{R}^d} \eta < \infty\,,$$

pues $\eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$, y esta suma es uniforme en x e y .
para demostrar 14, se observa primero que $P_0(x,y)$ es invariante bajo traslaciones enteras, entonces, podemos asumir que

$$x \in E_0 = \{x : \, 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq d\}\ .$$

Tomemos $x \in E_0$ e y tal que $\frac{|y|}{4} > diam\, E_0 = d^{1/2}$

$$|P_0(x,y)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\phi(x-k)\phi(y-k)| \leq \sum_{|k|\leq\left|\frac{y}{2}\right|} \eta(\,|x-k|\,)\eta(\,|y-k|\,)$$

$$+ \sum_{|k|>\left|\frac{y}{2}\right|} \eta(\,|x-k|\,)\eta(\,|y-k|\,) = I$$

Dado que $\eta(\,|y-k|\,) \leq \eta(\,\left|\frac{y}{2}\right|\,)$ si $|y-k| \geq \left|\frac{y}{2}\right|$ lo cual se verifica facilmente; y que $\eta(\,|x-k|\,) \leq \eta(\,\left|\frac{y}{2}\right| - diam\,E_0)$ si $|x-k| \geq \left|\frac{y}{2}\right| - diam\,E_0$, entonces,

$$
\begin{aligned}
I &\leq \sum_{|k|\leq\left|\frac{y}{2}\right|} \eta(\,|x-k|\,)\eta(\,\left|\frac{y}{2}\right|\,) + \sum_{|k|>\left|\frac{y}{2}\right|} \eta(\,\left|\frac{y}{2}\right| - diam\,E_0)\eta(\,|y-k|\,) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \eta(\,|x-k|\,)\eta(\,\left|\frac{y}{2}\right|\,) + \sum_{|k|>\left|\frac{y}{2}\right|} \eta(\,\left|\frac{y}{2}\right| - diam\,E_0)\eta(\,|y-k|\,) \\
&\leq \eta(\,\left|\frac{y}{2}\right|\,)C\int_{\mathbb{R}^d} \eta + C_2\eta(\,\left|\frac{y}{2}\right| - diam\,E_0) \\
&\leq C_1\eta(\,\left|\frac{y}{2}\right|\,) + C_2\eta(\,\left|\frac{y}{2}\right| - d^{1/2})\,.
\end{aligned}
$$

Ahora $\eta(\,\left|\frac{y}{4}\right|\,) \leq \eta(\,\left|\frac{y}{2}\right|\,)$ y $\eta(\,\left|\frac{y}{2}\right| - d^{1/2}) \leq \eta(\,\left|\frac{y}{4}\right|\,)$. Luego

$$
\leq \eta(\,\left|\frac{y}{2}\right|\,)C\int_{\mathbb{R}^d} \eta + C_2\eta(\,\left|\frac{y}{2}\right| - diam\,E_0) \leq C\eta(\,\left|\frac{y}{4}\right|\,)
$$

como $\left|\frac{y-x}{5}\right| \leq \left|\frac{y}{5}\right| + \left|\frac{x}{5}\right| = \left|\frac{y}{4}\right| - \left|\frac{y}{20}\right| + \left|\frac{x}{5}\right| \leq \left|\frac{y}{4}\right| - \left|\frac{y}{20}\right| + \left|\frac{d^{1/2}}{5}\right| \leq \left|\frac{y}{4}\right|$. Entonces,

$$
C\eta(\,\left|\frac{y}{4}\right|\,) \leq C\eta(\,\left|\frac{y-x}{5}\right|\,) = H_0(\,|y-x|\,)\,.
$$

Mostraremos que esta suma es efectivamente el núcleo asociado a la proyección P_0. O sea que $P_0f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_0(x,y)f(y)dy$ c.t.p..

Si definimos $P_0^M(x,y) = \sum_{|k|\leq M} \phi(x-k)\phi(y-k)$, se puede ver facilmente que si $P_0^M f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_0^M(x,y)f(y)dy$, entonces $P_0^M f \longrightarrow P_0 f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ cuando $M \longrightarrow \infty$. Además sabemos que $P_0^M(x,y) \underset{M\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} P_0(x,y)$ c.t.p. y que está bien definido $T : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ dado por $Tf(x) = \int P_0(x,y)f(y)dy$ puntualmente y en $L^2(\mathbb{R}^d)$ (y es acotado pues $|Tf(x)| \leq H * |f|(x)$). De todo esto bastará ver que $P_0^M f \longrightarrow Tf$ en c.t.p y en $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$
\left|P_0^M f(x) - Tf(x)\right| \leq \left\|P_0^M(x,.) - P_0(x,.)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}
$$

pero $\left\|P_0^M(x,.) - P_0(x,.)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0$ cuando $M \longrightarrow \infty$ por el teorema de convergencia mayorada, pues $\left|P_0^M(x,y) - P_0(x,y)\right| \leq 2H_0(\,|x-y|\,) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ahora,

$$
|P_0^M f(x) - Tf(x)| \leq 2H_0 * |f|(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)
$$

y por lo tanto,

$$\left\| P_0^M f - Tf \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0$$

cuando $M \longrightarrow \infty$, nuevamente por convergencia Mayorada.

ii) Para demostrar la convegencia uniforme, se demuestra igual que en i). La demostración de la cota es también idéntica salvo que se reemplaza $\eta(\,|x|\,)$ por $\eta(\,|x|\,)/\ln(2+|x|\,)$ □

Teorema 12. *Si $\psi^\lambda(x)\ln(2+|x|\,) \in \mathcal{RB}$ para cada λ entonces: En todo conjunto $F \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ con $F \cap D = \oslash$, el núcleo de escala positiva*

$$M_m(x,y) = \sum_{0\leq j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y)$$

Satisface $M_m(x,y) \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} M(x,y)$ donde $M(x,y)$ está acotado absolutamente por $H_2(\,|x-y|\,)$, donde H_2 es una función radial decreciente en $L^1(\mathbb{R}^d)$ (puede valer ∞ en 0). Además, la convergencia de M_m a M es uniforme y absoluta si F está a una distancia positiva de la diagonal $D = \{(x,y) : x = y\}$ y si se cumple la siguiente cota:

$$\sum_{0\leq j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|\psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y)\right| \leq H_3(\,|x-y|\,)$$

donde H_3 tiene las mismas propiedades que H_2.

Demostración. Tenemos

$$M_m(x,y) = \sum_{0\leq j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y) = \sum_{0\leq j<m} 2^{jd} Q_0(2^j x, 2^j y)$$

Por el teorema 11 se tiene que:

$$|M_m(x,y)| \leq \sum_{0\leq j\leq\infty} 2^{jd} \frac{H_1(2^j\,|x-y|\,)}{\ln(2+2^j\,|x-y|\,)} \equiv H_2(\,|x-y|\,)$$

Usando la proposición 10, veamos que $H_2(\,|x|\,)\,|_F \in L^1(\mathbb{R}^d)$ si F tiene distancia positiva del origen, pues:

$$\int_F |H_2(\,|x|\,)|\,dx = \int_F \left| \sum_{0\leq j\leq\infty} 2^{jd} \frac{H_1(2^j\,|x|\,)}{\ln(2+2^j\,|x|\,)} \right| dx$$

$$\leq \int_F \sum_{0\leq j\leq\infty} 2^{jd} \left| \frac{H_1(2^j\,|x|\,)}{\ln(2+2^j\,|x|\,)} \right| dx = \sum_{0\leq j\leq\infty} \int_F 2^{jd} \left| \frac{H_1(2^j\,|x|\,)}{\ln(2+2^j\,|x|\,)} \right| dx\,,$$

donde la última igualdad es por Fubini, considerando la medida producto. El hecho de que la función sea radial y decreciente es claro por las propiedades de la función $H_1(\,|x|\,)/\ln(2+|x|\,)$.
Veamos que existe $\underset{m\to\infty}{lim}\, M_m(x,y) = M(x,y)$ para todo $x \neq y$. Probemos que $M(x,y)$ converge absolutamente , en efecto:

$$\int_F |M(x,y)|\,dy = \int_F \left| \sum_{0\le j<\infty} 2^{jd} Q_0(2^j x, 2^j y) \right| dy$$
$$\le \int_F \sum_{0\le j\le\infty} 2^{jd} \frac{H_1(2^j\ |x-y|\,)}{\ln(2+2^j\ |x-y|\,)} dx$$
$$\le \int_F \sum_{0\le j\le\infty} 2^{jd} \left| \frac{H_1(2^j\ |x-y|\,)}{\ln(2+2^j\ |x-y|\,)} \right| dx < \infty$$

por la proposición 10. Entonces, existe y es finita la suma (nuevamente Fubini): $\sum\limits_{0\le j<\infty} 2^{jd} Q_0(2^j x, 2^j y)$ para casi todo y. Por último, la convergencia uniforme de M_m se seguirá si podemos ver que la convergencia de

$$\sum_{0\le j\le\infty} 2^{jd} \frac{H_1(2^j\ |x-y|\,)}{\ln(2+2^j\ |x-y|\,)}$$

es uniforme, y ésto se sigue de que la funciones $2^{jd} H(2^j\ |x|\,)$ son decrecientes con $|x|$. Sea $x \neq y$, Sabemos que $M_m(x,y) \le \sum\limits_{0\le j\le\infty} 2^{jd} \frac{H_1(2^j\ |x-y|\,)}{\ln(2+2^j\ |x-y|\,)}$ $= \sum\limits_{0\le j\le\infty} \Phi_j(\,|x-y|\,) < \infty$, si $z = x-y$, entonces para cualquier $|z_1| \ge |z|$ tenemos $\Phi_j(\,|z_1|\,) \le \Phi_j(\,|z|\,)$ y además $\sum\limits_{0\le j\le\infty} \Phi_j(\,|z|\,) < \infty$ entonces la convergencia uniforme para $|x| \le |x|$ se sigue por el test M de Weierstrass.
Que $\sum\limits_{0\le j<m} \sum\limits_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|\psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y)\right| \le H_3(\,|x-y|\,)$ sale usando argumentos idénticos a los de los teoremas: 11ii) y 12i). $\square$

Teorema 13. *Bajo la suposición de que:* $\psi^\lambda(x) \in \mathcal{RB}$*, la parte negativa del núcleo* $N(x,y) = \sum\limits_{j<0} \sum\limits_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y)$ *converge uniformemente y absolutamente sobre* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *y es un núcleo acotado.* $N(x,y)$ *resulta ser el núcleo de* P_0*, la proyección sobre* V_0*.*

Demostración. Por un argumento usado anteriormente para acotar el núcleo $P_0(x,y)$ tenemos:

$$\sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|\psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y)\right| \le H_1(\,|x-y|\,)$$

donde $H_1 \in \mathcal{RB}$, además:

$$\sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|\psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y)\right| \leq 2^{jd} H_0(2^j\ |x-y|\,)$$

ésto es consecuencia de la demostración del teorema 11i). Entonces

$$\sum_{j<0}\ \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|\psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y)\right| \leq \sum_{j<0} 2^{jd} H_0(2^j\ |x-y|\,) \leq \sum_{j<0} 2^{jd}\, \|H\|_\infty < \infty$$

Entonces hay convergencia absoluta y uniforme por el test M de Weierstrass. Veamos que $N(x,y)$ es el núcleo de P_0 la proyección sobre V_0: Para eso se usa que $\sum\limits_{j<0}\ \sum\limits_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y) = \sum\limits_{j<0} Q_j(x,y)$ converge uniformemente a su límite $N(x,y)$ que el operador repesentado por la suma parcial converge fuertemente al operador $P_0 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$ y un argumento similar al usado en el teorema 11i) se sigue $P_0(x,y) = N(x,y)$ c.t.p. $\square$

Teorema 14. *Asumamos que $\psi^\lambda(x)\ln(2+|x|\,) \in \mathcal{RB}$ para todo λ. La suma:*

$$P_\infty(x,y) = \sum_{-\infty<j<\infty} Q_j(x,y)$$

converge uniformemente y absolutamente sobre un conjunto F con distancia positiva de la diagonal y es igual a cero en c.t.p. en F fuera de la diagonal. Si el núcleo es parcialmente continuo, entonces $P_\infty(x,y) = 0$ en todo punto.

Demostración. Escribamos $P_\infty(x,y) = \sum\limits_{j<0} Q_j(x,y) + \sum\limits_{j\geq 0} Q_j(x,y) = S_1 + S_2$ donde S_1 converge uniformemente por el teorema 13 y S_2 por el teorema 12, la convergencia absoluta y uniforme de $P_\infty(x,y)$ se sigue de los teoremas 12 y 13: Definiendo

$$M_m(x,y) = \sum_{0\leq j<m} Q_j(x,y) \tag{15}$$

$$N_{-m}(x,y) = \sum_{m\leq j<0} Q_j(x,y) \tag{16}$$

Sea B_1, $B_2 \subset \mathbb{R}^d$ dos bolas cerradas con $B_1 \cap B_2 = \oslash$ y $|B_1 \cap B_2 \cap A| > 0$, sean f_1, f_2 dos funciones medibles no negativas soportadas en B_1 y B_2 respectivamente.
Escribamos

$$P_m(x,y) = M_m(x,y) + N(x,y) \tag{17}$$

si denotamos $P_m \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$ al operador con núcleo $P_m(x,y)$, tenemos $P_m f_2 \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f_2$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f_1(x)f_2(y)P_\infty(x,y)dydx = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f_1(x)f_2(y)\lim_{m\to\infty} P_m(x,y)dydx$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f_1(x)f_2(y)P_m(x,y)dydx$$

por el teorema 12 y convergencia mayorada, ésto a su vez es igual a

$$\lim_{m\to\infty}\langle f_1, P_m f_2\rangle = \langle f_1, f_2\rangle = 0\,,$$

pues $B_1 \cap B_2 = \oslash$ entonces $P_\infty(x,y) = 0$ c.t.p. $(x,y) \in B_1 \times B_2$ entonces vale $P_\infty(x,y) = 0$ para casi todo $x \neq y$, pues B_1 y B_2 son bolas cerradas y vale para cualquiera; y además $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L(\mathbb{R}^{2d})$.

ii) La suma $P_\infty(x,y)$ es una suma uniformemente convergente de funciones parcialmente continuas (en x) en un conjunto común A, entonces por la proposición 9 es parcialmente continua fuera de D y como $P_\infty(x,y) = 0$ c.t.p fuera de la diagonal, luego es igual a cero para todo punto fuera de la diagonal. □

3.3. Resultado Principal

Ahora estamos en condiciones de enunciar y probar el resultado principal:

Teorema 15. *i) Supongamos que la función de escala ϕ de un análisis multirresolución está en $\mathcal{RB}$ entonces, para cualquier $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $1 \leq p \leq \infty$ su aproximación de multirresolución converge a f en casi todo punto.*
ii) Si $\phi\,,\psi^\lambda \in \mathcal{RB}$ para todo λ entonces la expansión escala y al expansión wavelet de cualquier $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ converge a f en casi todo punto. Si además, $\phi\,,\psi^\lambda$ son parcialmente continuas entonces ambas expansiones convergen a f sobre su conjunto de Lebesgue.
iii) Si suponemos que $\psi^\lambda(x)\ln(2+|x|) \in \mathcal{RB}$ para todo λ entonces la expansión wavelet ($1 \leq p \leq \infty$) de cualquier $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ converge a f en casi todo punto; si además ψ^λ son parcialmente continua entonces la expansión wavelet y la aproximación de multirresolución converge a f sobre todo el conjunto de Lebesgue de f.

También se puede dar el siguiente resultado con respecto a la convergencia en $L^p(\mathbb{R}^d)$:

Teorema 16. *Bajo las mismas hipótesis de los casos i) , ii) y iii) del teorema anterior, la expansión multirresolución de una $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ convergen a f en la norma de $L^p(\mathbb{R}^d)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, y si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 < p \leq \infty)$ su expansión wavelet converge en la norma de $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Observación 1. En [7] se dá una demostración que incluye el caso $p = 1$ para la expansión wavelet pero contiene un error. La cota $p > 1$ es "óptima" en el siguiente sentido: Sea $d = 1$ y consideremos la base de Haar, veamos brevemente que la expansión Wavelet de $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ no converge en la norma de $L^1(\mathbb{R})$ [9]: Primero observemos que facilmente se verifica que $\langle f, \psi_{jk} \rangle = 0$ para todo $j \geq 0$ y $k \neq 0$ y además $\left\langle f, \psi_{j0} \right\rangle = 2^{\frac{j}{2}}$ para los otros valores de j. Analicemos que sucede cuando $N \longrightarrow \infty$ en

$$\int_{\mathbb{R}} |\sum_{j=-N}^{N} 2^j \psi(2^j x) - f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |\sum_{j=-N}^{-1} 2^j \psi(2^j x) - f(x)| dx =$$

donde $\psi = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1]}$, ahora estas integrales son iguales a

$$2^{(-N+1)} + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{N} (3\ 2^{-(j+1)} + 2^{-N-2}) 2^{j-1}$$

$$= 2^{(-N+1)} + \frac{1}{2} + (N-2)\ 3\ 2^{-2} + 2 - 2^{-(N+1)}$$

que es una sucesión divergente, luego obtenemos el resultado buscado, aunque es importante observar que si consideramos la aproximación multirresolución de f tenemos trivialmente que $P_j f = f\ \forall j \geq 0$, luego $P_j f \longrightarrow f$ en la norma de L^1 cuando $j \longrightarrow \infty$.

Observación 2. El teorema 15 a diferencia de otros resultados sobre convergencia en c.t.p. (por ejemplo, el teorema 8) prueba que el conjunto sobre el que hay convergencia *incluye* el conjunto de puntos de Lebesgue de $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. (Demostraremos simultaneamente los teoremas 15 y 16). Sea $\phi \in \mathcal{RB}$. Sabemos que $P_0 = P_{V_0}$ y $V_0 = span\ \{\phi(x-k)\}_k$, luego:

$$P_0 f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle \phi_{0\,k}, f \rangle \phi_{0\,k}$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la idea es, primero, extender $P_0 : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ a $P_0 : L^p(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$, lo cual se podrá hacer pues si $P_0 f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_0(x,y) f(y) dy$

donde $P_0(x,y) = \sum_k \phi_{0\,k}(x)\phi_{0\,k}(y)$, por el teorema 11 la función definida por $P_0(x,y) = \sum_k \phi_{0\,k}(x)\phi_{0\,k}(y)$ es el núcleo integral del operador proyección P_0 y como además $|P_0(x,y)| \leq H_0(\,|x-y|\,)$, donde H_0 es una función decreciente radialmente acotada en $L^1(\mathbb{R}^d)$, luego del teorema 10 tenemos

$$P_m f \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ en casi todo punto.
ii) Para expansiones escala: consideramos la expansión escala:

$$f_m = \sum_k b_k \phi_{0\,k} + \sum_{0\leq j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^\lambda_{j\,k}\psi^\lambda_{j\,k} \tag{18}$$

Si ϕ, $\psi^\lambda \in \mathcal{RB}$ entonces los coeficientes $b_k = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-k)f(x)dx$ están acotados uniformemente, en efecto por Hölder: $b_k \leq \|\phi\|_{L^q}\,\|f\|_{L^p}$ si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, ademas $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Usando esto, ahora veamos que la serie que define f_m converge uniformemente y absolutamente para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. La primera suma está acotada por una constante,

$$\left|\sum_k b_k\phi(x-k)\right| \leq \|\phi\|_{L^q}\,\|f\|_{L^p} \sum_k |\phi(x-k)|$$

$$\leq \|\phi\|_{L^q}\,\|f\|_{L^p} \sum_k |\eta(x-k)| \leq \|\phi\|_{L^q}\,\|f\|_{L^p}\, C \int_{\mathbb{R}^d} \eta < \infty\,,$$

la segunda suma converge absolutamente, usando que $a_{j\,k}$ están acotados para un conjunto finito de valores de j, en efecto,

$$a^\lambda_{j\,k} \leq \left|\int_{\mathbb{R}^d} 2^{\frac{jd}{2}}\psi^\lambda(2^jx-k)f(x)dx\right| \leq 2^{\frac{jd}{2}} \left\|\psi^\lambda(2^j.)\right\|_{L^q} \|f\|_{L^p}$$

$$\leq 2^{j_0 d\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \left\|\psi^\lambda(2^j.)\right\|_{L^q} \|f\|_{L^p}$$

para algun j_0 si los j son finitos, por lo tanto los $a^\lambda_{j\,k}$ están acotados uniformemente sobre un conjunto finito de valores de j. entonces

$$\left|\sum_{0\leq j\leq m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^\lambda_{j\,k}\psi^\lambda_{j\,k}(x)\right| \leq k_0 \left\|\psi^\lambda(2^j.)\right\|_{L^q} \|f\|_{L^p} \sum_{0\leq j\leq m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|\psi^\lambda_{j\,k}(x)\right|$$

$$= C\left\|\psi^\lambda\right\|_{L^q}\|f\|_{L^p}\sum_{0\leq j\leq m}\sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda}\left|2^{\frac{jd}{2}}\psi^\lambda(2^jx-k)\right| \leq C\sum_{0\leq j\leq m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\eta(\left|2^jx-k\right|)$$

$$\leq C\sum_{0\leq j\leq m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\eta(2^j\left|x-k2^{-j}\right|) \leq C\sum_{0\leq j\leq m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\eta(\left|x-k2^{-j}\right|) < \infty$$

donde la anteúltima desigualdad se debe a que $2^j\ |x-k2^{-j}| \geq |x-k2^{-j}|$ y la ultima a que η es radial, decreciente, acotada e integrable. Notemos que P_m tiene asociado un núcleo $P_m(x,y)$ el cual está acotado por un núcleo de convolución $H(\,|x-y|\,)$ en $\mathcal{RB}$ (por la parte i) de éste teorema), esto permite ver que P_m es un operador (p,p)-fuerte para todo $1\leq p\leq\infty$: En efecto, $|P_mf(x)|\leq H*|f|(x)$ luego el resultado sale de aplicar la proposición 3.
Tambien es fácil ver que la representación

$$P_m(x,y) = \sum_k \phi_{0\,k}(x)\phi_{0\,k}(y) + \sum_{0\leq j\leq m}\sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda}\psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y) \qquad (19)$$

converge absolutamente (teorema 11).
Afirmamos que para $1\leq p\leq\infty$ $P_m(x,y)$ define un proyector; es decir con un pequeño abuso de notación: P_m es un operador integral con núcleo $P(x,y)$ que verifica $P_m^2 = P_m$. En efecto, de la demostración del teorema 11 se tiene: $P_mf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)f(y)dy$, de ésto y de que sobre $L^2(\mathbb{R}^d)$ es efectivamente un proyector, usando que $L^2(\mathbb{R}^d)\cap L^p(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ se tiene el resultado para $1\leq p<\infty$, para $p=\infty$ se lo deduce de que es cierto para $L^1(\mathbb{R}^d)$ y que $L^1(\mathbb{R}^d)\subset(L^\infty(\mathbb{R}^d))^*$.
Usando la ec. 19 que converge uniforme y absolutamente y el teorema de convergencia mayorada se prueba que $f_m = P_mf$ c.t.p.: en efecto, sabemos que $P_mf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)f(y)dy$, luego, es fácil ver que está bien definido puntualmente:

$$|P_mf(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |P_m(x,y)f(y)|\,dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |H_m(\,|x-y|\,)f(y)|\,dy \leq \|H\|_{L^q}\|f\|_{L^p} < \infty$$

Por otra parte, sabemos que

$$\sum_k b_k\phi_{0\,k}(x) + \sum_{0\leq j\leq m}\sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^\lambda_{j\,k}\psi^\lambda_{j\,k}(x)$$

converge a $f_m(x)$ en casi todo punto. Ahora queremos ver que $P_m f(x) = f_m(x)$ c.t.p. Si reescribimos esto

$$f_m(x) = \sum_k \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\phi_{0\,k}(y)dy\,\phi_{0\,k}(x) + \sum_{0\le j\le m}\ \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\psi^\lambda_{j\,k}(y)dy\,\psi^\lambda_{j\,k}(x)$$

bastará ver que podemos intercambiar la suma con la integral. Por el teorema 11:

$$\sum_{|k|<M} \phi_{0\,k}(x)\phi_{0\,k}(y) + \sum_{0\le j\le m}\ \sum_{|k|<M}\ \sum_{\lambda} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y)$$

converge absolutamente y

$$f(y) \sum_{|k|<M} \phi_{0\,k}(x)\phi_{0\,k}(y) + \sum_{0\le j\le m}\ \sum_{|k|<M}\ \sum_{\lambda} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} P_m(x,y)f(y)$$

puntualmente y esto está acotado por $|H_m(\,|x-y|\,)f(y)| \ \in\ L^1(\mathbb{R}^d)$, por lo tanto el resultado sigue por una aplicación del teorema de convergencia mayorada. O sea,

$$f_m(x) = P_m f(x)\,.$$

Por la parte i) del teorema la suma parcial $f_m = P_m f \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f$ c.t.p. si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, con lo que queda probada la primera parte del punto ii) del teorema para expansiones escalas y la correspondiente asersión para la convergencia $L^p(\mathbb{R}^d)$ en el teorema 16.

Si ψ^λ y ϕ son parcialmente continuas, entonces por el teorema 10 iv) y la convergencia uniforme de la suma $P_m(x,y)$, concluimos que $P_m(x,y)$ es parcialmente continua en x pues: por el teorema 11 i)

$$\sum_k \phi(x-k)\phi(y-k)) + \sum_{0\le m}\ \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y)$$

converge uniformemente, entonces está suma es parcialmente continua entonces $P_m(x,y))$ es parcialmente continua entonces $P_m f(x) \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f(x)$ en todo punto de Lebesgue.

Por el teorema 9 $\int_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)f(y)dy$ es parcialmente continua como función en x, en efecto $P_m(x,y)$ está acotado por $2^{md}H(2^m\ |x-y|\,)$, si $m=0$:

$$\underset{|z-x|\le\delta}{max}\ |P_0(x,y)| \le \underset{|z-x|\le\delta}{max}\ |H(x,y)| = H^*(\,|x-y|\,)$$

Ahora tenemos que $H(\,|.|\,)$ y $H^*(\,|.|\,) \in \mathcal{RB}$, además en este caso , f_m es también parcialmente continua, en el mismo conjunto de direcciones por ser limite uniforme de parcialmente continuas (ψ y ϕ^λ lo son), por otra parte sabemos que $P_m f(x) = f(x)$ c.t.p., luego en todo punto, por lo anterior y por lo tanto

$$f_m(x) = P_m f(x) \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f(x))$$

en todo punto de Lebesgue.

ii)(expansión Wavelet) Veamos que con las hipótesis ii) la expansión wavelet convege en casi todo punto si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Notemos que usando el teorema 13 se puede probar convergencia absoluta y uniforme de

$$f_m \sim \sum_{j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^\lambda_{j\,k} \psi^\lambda_{j\,k}(x) \ ,$$

y se puede concluir además por argumentos del teorema 13 de que

$$P_0(x,y) = \sum_{j<0} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\psi^\lambda_{j\,k}(y) = \sum_{j<0} Q_j(x,y)$$

es el núcleo de la proyección P_0 sobre V_0 en $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Para $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ la suma parcial dada por:

$$f_m = \sum_{j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^\lambda_{j\,k} \psi^\lambda_{j\,k}(x)$$

converge uniformemente e independientemente del orden de la suma, para un m finito fijo, en efecto, usando un argumento similar al usado en 11 ii), con $m = 0$ por conveniencia, se vé que:

$$\begin{aligned}\left|a^\lambda_{j\,k}\right| \ &= \ \left|\langle f_m, \psi^\lambda_{j\,k}\rangle\right| \ \leq 2^{jd/2} \left\|\psi^\lambda(2^j.)\right\|_{L^q} \|f\|_{L^p} \\ &= 2^{\frac{jd}{2}} 2^{-jd\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left\|\psi^\lambda\right\|_{L^q} \|f\|_{L^p}\end{aligned}$$

y por lo tanto $\left|a^\lambda_{j\,k}\right| \ \leq \ C \|f\|_{L^p} 2^{jd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}$, ahora veamos que f_m converge uniformemente:

$$\sup_x \sum_{j<0} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|a^\lambda_{j\,k}\psi^\lambda_{j\,k}(x)\right| \leq \sup_x \sum_{j<0} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|C \|f\|_{L^p} 2^{jd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \psi^\lambda_{j\,k}(x)\right|$$

$$\sup_x \sum_{j<0} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|C \|f\|_{L^p} 2^{jd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \psi^\lambda_{0\,k}(2^j x)\right| \leq c \sum_{j<0} 2^{jd/p} \sum_\lambda \sup_x \sum_k \left|\psi^\lambda_{0\,k}\right|$$

$$\leq C \sum_{j<0} 2^{dj/p} \sum_\lambda \int \left|\psi^\lambda\right| < \infty$$

Por lo tanto la serie converge absoluta y uniformemente y la suma parcial es automáticamente indpendiente del orden con respecto a todos los índices de sumación.
Veamos que $f_m = P_m f$ en c.t.p para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, sabemos que $P_0(x,y)$ es el núcleo asociado a la proyección P_0 (ahora definida sobre $L^p(\mathbb{R}^d)$) y sabemos que $P_0(x,y) = \sum_{j<0} Q_j(x,y)$ donde Q_j es la proyección ($L^2(\mathbb{R}^d)$) ortogonal a W_j. La convergencia absoluta de la suma $\sum_{j<0} Q_j(x,y)$ se sigue de la convergencia absoluta de $\sum_{j<0} \psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)$ con la representación

$$Q_j(x,y) = \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)$$

ahora, tenemos que

$$\sum_{j<0} \left|\psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)\right| < \infty$$

pues

$$\sum_{j<0} |Q_j(x,y)| = \sum_{j<0} \left| \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y) \right| \leq \sum_{j<0} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|\psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)\right| < \infty$$

por el teorema 13. Para mostrar que $f_m = P_m f$ es suficiente ver que $f_0 = P_0 f$ escribimos:

$$f_0(x) - P_0 f(x) = \lim_{M\to\infty} \sum_{-M<j<0} a^{\lambda}_{j\,k}\psi^{\lambda}_{j\,k}(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{M\to\infty} \sum_{-M<j<0} Q_j(x,y)$$

Ahora veamos que para $j < \infty$ y si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$:

$$\sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^{\lambda}_{j\,k}\psi^{\lambda}_{j\,k}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} Q_j(x,y)f(y)dy$$

De hecho, fijo x, podemos hacer la siguiente cota, usando la representación de $Q_j(x,y)$:

$$|Q_j(x,y)f(y)| \leq \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \left|\psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)\right| \, |f(y)| \leq H(\,|x-y|\,)\;|f(y)|$$

donde H es acotada radialmente en $L^1(\mathbb{R}^d)$ (también en L^∞) entonces $H \in L^q$ para todo $1 \leq q < \infty$, luego por Hölder:

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(\,|x-y|\,)\;|f(y)|\,dy \leq \|H\|_{L^q}\,\|f\|_{L^p} < \infty$$

por lo tanto $H(\,|x-y|\,)\ |f(y)|$ está en $L^1(\mathbb{R}^d)$ en la variable y.
entonces podemos usar el teorema de convergencia mayorada :

$$\int \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)f(y)dy = \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \int \psi^{\lambda}_{j\,k}(y)f(y)dy\,\psi^{\lambda}_{j\,k}(x)$$

Este resultado se puede extender para sumas finitas:

$$\sum_{-M<j<0}\ \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^{\lambda}_{jk}\psi^{\lambda}_{jk}(x) = \int_{R^d} \sum_{-M<j<0} Q_j(x,y)f(y)dy$$

y por lo tanto

$$\int \sum_{j<0} Q_j(x,y)f(y)dy = \int \sum_{j<-M} Q_j(x,y)f(y)dy + \int \sum_{-M<j<0} Q_j(x,y)f(y)dy$$

$$= \int \sum_{j<-M} Q_j(x,y)f(y)dy + \sum_{-M<j<0}\ \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^{\lambda}_{jk}\psi^{\lambda}_{jk}(x)$$

$$\left\| \int \sum_{j<-M} Q_j(x,y)f(y)dy \right\|_{L^p} = \left\| \int P_{-M}(x,y)f(y)dy \right\|_{L^p}$$

pero

$$\int P_M(x,y)f(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} 2^{Md}H(2^M\,|x-y|)\,|f(y)|\,dy$$
$$\leq \left\|2^{Md}H(2^M.)\right\|_{L^q}\|f\|_{L^p}$$

Con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ahora

$$\left\|2^{Md}H(2^M.)\right\|_{L^q} = 2^{\frac{Md}{p}}\,\|H\|_{L^q} \longrightarrow 0$$

si $M \longrightarrow -\infty$. Por otra parte

$$\int_{\mathbb{R}^d} 2^{Md}H(2^M\,|x-y|)\,|f(y)|\,dy = H_M * |f|(x) \leq M|f|(x)\,\|H\|_{L^1}$$

donde $M|f| \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p>1$ es la función maximal de Hardy Littlewood (por el teorema 2 y la proposición 2) luego como

$$\int P_{-M}(x,y)f(y)dy \to 0$$

cuando $M \longrightarrow \infty$ por el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue:

$$\left\| \int P_{-M}(x,y)f(y)dy \right\|_{L^p} \to 0$$

de donde sale la igualdad puntual y en norma:

$$\int \sum_{j<0} Q_j(x,y)f(y)dy = \sum_{j<0} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^{\lambda}_{jk}\psi^{\lambda}_{jk}(x)$$

entonces $P_0 f = f_0$ y por lo tanto $P_m f = f_m$. Para ver que f_m tiende a f c.t.p bastará ver que $P_m f \longrightarrow f$ cuando $m \to \infty$, y esto vale por el teorema 10 y el teorema 11 mas afirmaciones del item ii):

$$|P_0(x,y)| \le H(\,|x-y|\,)$$

y por lo tanto $P_m f \longrightarrow f$.
Si ψ^{λ} y ϕ son parcialmente continuas se sigue que $P_m(x,y)$ es parcialmente continuo, se debe a que la suma

$$P_0(x,y) = \sum_{j<0} Q_j(x,y)$$

converge uniformemente (teorema 13), por otra parte por el teorema 10 $P_m f \longrightarrow f$ sobre su conjunto de Lebesgue. Se sabe que $\int P_m(x,y)f(y)dy$ es parcialmente continua en x por el teorema 9, como asi tambien la suma que define f_m y como estas coinciden en casi todo punto deben ser iguales en todo punto entonces $f_m \longrightarrow f$ sobre su conjunto de Lebesgue.

iii) Supongamos que $\psi^{\lambda}(x)\ln(2+\,|x|\,) \in \mathcal{RB}$ para todo λ, entonces como en ii) el núcleo

$$P_m(x,y) = \sum_{j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)$$

converge uniformemente para m finito por el teorema 13, pues que $\psi^{\lambda}(x)\ln(2+|x|\,) \in \mathcal{RB}$ y por lo tanto $\psi^{\lambda}(x) \in \mathcal{RB}$ como asi tambien la expansión parcial $f_m = \sum_{j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} a^{\lambda}_{j\,k}\psi^{\lambda}_{j\,k}(x)$ de una $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Usando que $\psi^{\lambda}(x) \in \mathcal{RB}$ no es dificil mostrar que para $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$:

$$f_m(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_m(x,y)f(y)dy$$

c.t.p. con $P_m(x,y) = \sum_{j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)$ Notar que de acuerdo con el teorema 13 y las propiedades de escalas de sumas wavelets, tenemos para $m \geq 0$:

$$P_m(x,y) = N(x,y) + M_m(x,y)$$

entonces, $M_m(x,y) = \sum_{0\leq j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)$ y

$$P_m(x,y) = \sum_{j<0} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y) + \sum_{0\leq j<m} \sum_{(k,\lambda)\in\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \psi^{\lambda}_{j\,k}(x)\psi^{\lambda}_{j\,k}(y)$$

, ahora sabemos que $P_m(x,y) \longrightarrow 0$ (teorema 14) en culaquier conjunto F a distancia positiva de la diagonal. Como $M_m(x,y) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} M(x,y)$ por el teorema 13 se deduce que $N(x,y) = -M(x,y)$ siempre que $x \neq y$ y por el teorema 13 $M(x,y)$ está acotado radialmente por un núcleo de convolucion H_1, lo mismo es cierto para $N(x,y)$ fuera de la diagonal. Notar que $H_0(x,y) = 0$ pues la suma es vacia, entonces

$$|P_0(x,y)| \leq H_1(\,|x-y|\,)\,,$$

luego por el teorema 9 se sigue que la aproximación de multirresolución de f converge a f c.t.p y en $L^p(\mathbb{R}^d)$, tambien sabemos que $P_m \longrightarrow f$ c.t.p. y que $P_m f = f_m$ c.t.p entonces $f_m \longrightarrow f$ c.t.p.
Si las ψ^{λ} son parcialmente continuas f_m (es una serie unif. convergente) y $P_m f$ (usando su expresion como integral) son parcialmente continuas luego, nuevamente $P_m f(x) = f_m(x)$ en todo x y como $P_m(x,y)$ es parcialmente continuo $f_m(x) = P_m f \longrightarrow f(x)$ en todo punto de Lebesgue. La convergencia en norma de ii) y iii) sale de que $P_m f(x) = f_m(x)$ c.t.p. y de que $P_m \longrightarrow I$ fuertemente en $L^p(\mathbb{R}^d)$. $\square$

4. WAVELETS COMO BASES INCONDICIONALES DE $L^p(\mathbb{R}^d)$

En el capítulo anterior vimos que las wavelets forman una base de $L^p(\mathbb{R}^d)$, en éste capítulo probaremos que bajo ciertas condiciones de decaímiento impuestas, similares a las del capítulo anterior, sobre la wavelets básicas ψ^λ, resulta que $\{\psi^\lambda_{j\,k}\}_{j\,k\,\lambda}$ es una base incondicional de $L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p > 1$. Observemos, que el caso $p = 1$ no tiene sentido pues es sabido que $L^1(\mathbb{R}^d)$ no admite bases incondicionales [8]. La idea principal es usar la proposición 4, o sea: si definimos el operador U_ε de la siguiente manera

$$U_\varepsilon f = \sum_{(j,k,\lambda)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d\times\Lambda} \varepsilon^\lambda_{jk} \left\langle \psi^\lambda_{jk}, f \right\rangle \psi^\lambda_{jk} \quad , \; f \in L^p(\mathbb{R}^d) \; ,$$

donde ε es cualquier elemento de $\{1, -1\}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d\times\Lambda}$, bastaría probar que U_ε es acotado de $L^p(\mathbb{R}^d)$ en $L^p(\mathbb{R}^d)$, luego el resultado buscado sería consecuencia inmediata de la proposición 4. La demostración se puede dividir en los siguientes pasos: primero, observemos que U_ε es trivialmente acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$, luego si se pudiera probar que U_ε es $(1,1)$-débil, por el teorema 3, tendríamos que U_ε es (p,p)-fuerte para $p \in (1,2]$, y para $p > 2$, lo obtendríamos por dualidad. Con lo cual concluiría la demostración. En [2] se dá una demostración más corta siguiendo en lineas generales estos pasos, y usando propiedades de los operadores de Calderón-Zygmund, pero éste resultado es más restrictivo; por una parte se asume un decaimiento mayor de la wavelet y por otra se asume que ésta está asociada a un AMR, en nuestro caso nunca se hará tal suposición. En lineas generales se seguirá la demostración de [15] para el caso d-dimensional.
En ésta primera sección daremos algunos resultados auxiliares, que necesitaremos para probar la cota $(1,1)$-débil para los U_ε.

Observación. En Adelante se hará la siguiente suposición sobre las wavelets básicas: $\psi^\lambda(x) \in \mathcal{RB}$, mas aún, existe una función radial decreciente $\eta(x)$ tal que $\eta(x)ln(2 + |x|) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $|\psi^\lambda(x)| \leq \eta(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Seguiremos asumiendo que $\lambda \in \Lambda$, donde Λ es un conjunto tal que $\sharp(\Lambda) = 2^d - 1$.

4.1. Resultados Auxiliares

En ésta sección se enunciaran algunos resultados auxiliares.

Proposición 11. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *tal que* $\boldsymbol{S}upp(f) \subset [0,1]^d$*, si* $\frac{|x|}{4} > \sqrt{d}$ *entonces*

$$|U_\varepsilon Q_0 f(x)| \leqslant C \, \|f\|_{L^1} \sum_{j \geqslant 0} 2^{jd} \eta \left(2^{j-1} |x|\right) \tag{20}$$

Demostración. Si $U_\varepsilon Q_0 f(x) = \sum_{j\geqslant 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda}_{jk} \left\langle f, \psi^{\lambda}_{jk} \right\rangle \psi^{\lambda}_{jk}(x)$ para un $x \in \mathbb{R}^d$ fijo, podemos desarmar la sumatoria en dos partes:

$$U_\varepsilon Q_0 f(x) = \sum_{j\geqslant 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda}_{jk} \left\langle f, \psi^{\lambda}_{jk} \right\rangle \psi^{\lambda}_{jk}(x) \tag{21}$$

$$= \sum_{j\geqslant 0} \sum_{|k| < |x| 2^{j-1}} \sum_{\lambda} + \sum_{j\geqslant 0} \sum_{|k| \geqslant |x| 2^{j-1}} \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda}_{jk} \left\langle f, \psi^{\lambda}_{jk} \right\rangle \psi^{\lambda}_{jk}(x) = \sum_{I} + \sum_{II} \tag{22}$$

Por otra parte, para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \Lambda$ y $x \in \mathbb{R}^d$ tenemos lo siguiente:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left|\psi^{\lambda}(2^j x - k)\right| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta(2^j x - k) \leqslant K \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u) du \leqslant C < \infty \tag{23}$$

Donde C es una constante independiente de x, de ésto se tiene

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \psi^{\lambda} \left(2^j x - k\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta \left(2^j x - k\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \tag{24}$$

y si $|k| < |x| \, 2^{j-1}$ tenemos $|2^j x - k| \geqslant |2^j \, |x| - |k|| \geqslant 2^{j-1} \, |x|$, entonces:

$$\left|\psi^{\lambda} \left(2^j x - k\right)\right| \leqslant \eta(2^j x - k) \leqslant \eta \left(2^{j-1} |x|\right) \tag{25}$$

de todo lo anterior, se obtiene la siguiente cota:

$$\left| \sum_{I} \right| \leqslant \sum_{j\geqslant 0} \sum_{|k| < |x| 2^{j-1}} \sum_{\lambda} 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left|\psi^{\lambda} \left(2^j y - k\right)\right| dy \left|\psi^{\lambda} \left(2^j x - k\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{j\geqslant 0} \sum_{|k| < |x| 2^{j-1}} \sum_{\lambda} 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left|\psi^{\lambda} \left(2^j y - k\right)\right| dy \; \eta(2^j x - k)$$

de ésto último y de (25) tenemos:

$$\leqslant \sum_{j\geqslant 0} \sum_{|k| < |x| 2^{j-1}} \sum_{\lambda} 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left|\psi^{\lambda} \left(2^j y - k\right)\right| dy \; \eta \left(2^{j-1} |x|\right)$$

$$= \sum_{j\geqslant 0}\sum_{\lambda} 2^{jd}\eta\left(2^{j-1}|x|\right)\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(y)|\sum_{|k|<|x|2^{j-1}}\left|\psi^{\lambda}\left(2^j y-k\right)\right|dy$$

de (24) se deduce que

$$\leqslant \left(2^d-1\right)\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\eta(2^j x-k)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^1}\sum_{j\geqslant 0}2^{jd}\eta\left(2^{j-1}|x|\right)$$

$$\leqslant C\|f\|_{L^1}\sum_{j\geqslant 0}2^{jd}\eta\left(2^{j-1}|x|\right) \tag{26}$$

El segundo término de la suma se puede acotar de la siguiente manera:

$$\left|\sum_{II}\right| \leqslant \sum_{j\geqslant 0}\sum_{|k|\geqslant|x|2^{j-1}}\sum_{\lambda}2^{jd}\int\limits_{[0,1]^d}|f(y)|\left|\psi^{\lambda}\left(2^j y-k\right)\right|dy\left|\psi^{\lambda}\left(2^j x-k\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{j\geqslant 0}\sum_{|k|\geqslant|x|2^{j-1}}\sum_{\lambda}2^{jd}\int\limits_{[0,1]^d}|f(y)|\underset{|y|\leqslant\sqrt{d}}{Sup}\,\eta(2^j y-k)dy\left|\psi^{\lambda}\left(2^j x-k\right)\right|$$

$$\leqslant \left(2^d-1\right)\sum_{j\geqslant 0}\sum_{|k|\geqslant|x|2^{j-1}}2^{jd}\int\limits_{[0,1]^d}|f(y)|\underset{|y|\leqslant\sqrt{d}}{Sup}\,\eta(2^j y-k)dy\;\eta(2^j x-k)$$

pero $|2^j y-k|+|2^j y|\geqslant|k|\geqslant|2^{j-1}x|$ y $\frac{|x|}{4}>\sqrt{d}$ entonces $|2^j y-k|\geqslant 2^j\left(\frac{|x|}{2}-|y|\right)\geqslant 2^j\left(\frac{|x|}{2}-\sqrt{d}\right)$, de ésto se obtiene:

$$\leqslant C\sum_{j\geqslant 0}\sum_{|k|\geqslant|x|2^{j-1}}2^{jd}\int\limits_{[0,1]^d}|f(y)|\;\eta\left(2^j\left(\frac{|x|}{2}-\sqrt{d}\right)\right)dy\;\eta(2^j x-k)$$

$$= C\|f\|_{L^1}\sum_{j\geqslant 0}\sum_{|k|\geqslant|x|2^{j-1}}2^{jd}\eta\left(2^j\left(\frac{|x|}{2}-\sqrt{d}\right)\right)\eta(2^j x-k)$$

$$\leqslant C\|f\|_{L^1}\sum_{j\geqslant 0}2^{jd}\eta\left(2^j\left(\frac{|x|}{2}-\sqrt{d}\right)\right)\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\eta(2^j x-k)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \tag{27}$$

Ahora, como $\frac{|x|}{2}-\sqrt{d}\geqslant\frac{|x|}{2}-\frac{|x|}{4}=\frac{|x|}{2}$ y de: (26) y (27), tenemos:

$$\left|\sum_{I}\right|+\left|\sum_{II}\right|\leqslant C\|f\|_{L^1}\sum_{j\geqslant 0}2^{jd}\eta\left(2^{j-1}|x|\right) \tag{28}$$

$\square$

Proposición 12. *En* $\mathbb{R}^d$*, Sea* $f(x)$ *absolutamente acotada por una función radial decreciente* $\eta(|x|)$ *tal que* $\eta(|x|)ln(2+|x|) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *. Si* F *es un conjunto cerrado que no contiene al* 0 *entonces:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_F 2^{jd} \left| f(2^j x) \right| dx < \infty$$

Demostración. Sin perdida de generalidad, sea $F = \mathbb{R}^d \backslash B(\rho, 0)$ donde $\rho > 0$. Denotemos con Ω a las variables angulares y sea $\omega_d = \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^d / \, |x| \leqslant 1 \right\} \right|$. Entonces:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_F 2^{jd} \left| f(2^j x) \right| dx \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \int d\Omega \int_{\rho}^{\infty} r^{d-1} 2^{jd} \eta(2^j r) dr = \omega_d \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\rho}^{\infty} r^{d-1} 2^{jd} \eta(2^j r) dr$$

$$= \omega_d \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j \rho}^{\infty} r^{d-1} \eta(r) dr = \omega_d \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[2^j \rho, \infty]} r^{d-1} \eta(r) dr$$

$$\leqslant C \int_0^{\infty} r^{d-1} \ln(2+r) \eta(r) dr < \infty$$

□

Observación. Dado un cubo diádico, lo indexamos, de la siguiente manera: $I_{j\,k} = \Pi_{r=1}^{d} (2^{-j} k_r, 2^{-j}(k_r + 1)]$ con $j \in \mathbb{Z}$ y $k = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Lema 1. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ *tal que* ***S****upp*$(f) \subset I_{j\,k}$ *(cubo díadico) entonces existe una función radial decreciente e integrable* $\Phi_1(|x|)$ *para* $\frac{|x|}{4} > \sqrt{d}$ *y una constante* C *independiente de* f*,* $j \in \mathbb{Z}$*,* $k \in \mathbb{Z}^d$ *y* ε *de manera que:*

$$|U_\varepsilon Q_j f(x)| \leqslant C \left\| f \right\|_{L^1} 2^{jd} \Phi_1 \left(\left| 2^j x - k \right| \right) \quad \forall \, x \in \mathbb{R}^d \; : \left| 2^j x - k \right| > 4\sqrt{d} \tag{29}$$

Demostración. Es consecuencia del teorema 11 y la proposición 12 y un cambio de variables siendo mas precisos por un argumento similar a uno utilizado en el teorema 10:

$$Q_j = J_j Q_0 J_{-j} \tag{30}$$

Es fácil verificar que $(J_j)^* = 2^{-jd} J_{-j}$. Por otra parte, sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$U_\varepsilon J_i f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\lambda} \varepsilon_{jk}^{\lambda} \left\langle J_i f, \psi_{jk}^{\lambda} \right\rangle \psi_{jk}^{\lambda}(x) \tag{31}$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\lambda} \varepsilon_{jk}^{\lambda} 2^{-id} \left\langle f, J_{-i}\psi_{jk}^{\lambda} \right\rangle \psi_{jk}^{\lambda}(x) \tag{32}$$

Como $J_{-i}\psi_{jk}^{\lambda} = 2^{\frac{id}{2}}\psi_{j-ik}^{\lambda}$ entonces (32) es igual a

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\lambda} \varepsilon_{jk}^{\lambda} 2^{-\frac{id}{2}} \left\langle f, \psi_{j-ik}^{\lambda} \right\rangle \psi_{j-i+ik}^{\lambda}(x)$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\lambda} \varepsilon_{jk}^{\lambda} \left\langle f, \psi_{j-ik}^{\lambda} \right\rangle J_i\psi_{j-ik}^{\lambda}(x)$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\lambda} \varepsilon_{j+ik}^{\lambda} \left\langle f, \psi_{jk}^{\lambda} \right\rangle J_i\psi_{jk}^{\lambda}(x) = J_i U_{\widetilde{\varepsilon}} f\,(x) \tag{33}$$

donde $\widetilde{\varepsilon}_{jk}^{\lambda} = \varepsilon_{j+ik}^{\lambda}$ entonces $U_{\epsilon}J_i = J_i U_{\widetilde{\varepsilon}}$, de éste hecho y de (30) tenemos

$$U_{\epsilon}Q_j = U_{\epsilon}J_jQ_0J_{-j} = J_jU_{\widetilde{\varepsilon}}Q_0J_{-j}$$

Ahora, sin perdida de generalidad, sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\mathbf{S}upp(f) \subset I_{j\,0}$ entonces $f = J_jg$ con $\mathbf{S}upp(g) \subset I_{00}$, de ésto

$$J_jU_{\widetilde{\varepsilon}}Q_0J_{-j}f = J_jU_{\widetilde{\varepsilon}}Q_0J_{-j}J_jg = J_jU_{\widetilde{\varepsilon}}Q_0g$$

entonces (29) se obtiene de aplicar la proposición 11 y una traslación.

□

Proposición 13. *Existe $\Phi_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ decreciente, constante en cada conjunto $A_n = \left\{x \in \mathbb{R}^d : n < \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i| \leqslant n+1\right\}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, de manera que $\forall f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ con $\boldsymbol{S}upp(f) \subset I_{j\,k}$ se verifica:*

$$|P_jf(x)| \leqslant C\,\|f\|_{L^1} 2^{jd}\Phi_2\left(2^jx-k\right) \tag{34}$$

Demostración. Por medio de un cambio de variables, alcanza con verificar (34) para $j = 0$ y $k = 0$. Primero, hagamos notar que para cada $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene:

$$|U_{\varepsilon}P_0f(x)| \leqslant \sum_{j<0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\lambda} 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} |f\,(y)| \left|\psi^{\lambda}\left(2^jy-k\right)\right| dy \left|\psi^{\lambda}\left(2^jx-k\right)\right| \tag{35}$$

$$\leqslant \|\eta\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^d)} \left(2^d-1\right) \sum_{j<0} 2^{jd} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f\,(y)|\,\eta(2^jy-k)dy$$

$$\leqslant C \sum_{j<0} 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} |f\,(y)| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \eta(2^jy-k)dy$$

$$\leqslant C \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \eta(2^j y - k) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^1} \sum_{j<0} 2^{jd} \leqslant C \|f\|_{L^1} \tag{36}$$

Por otro lado, de la proposición 12 es fácil verificar que existe una función radial decreciente e integrable $\Phi_1(|x|)$ tal que $|Q_0 f(x)| \leqslant C \|f\|_{L^1} \Phi_1(|x|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d \ : |x| > 4\sqrt{d}$. Entonces podemos encontrar una constante apropiada K de manera que podemos definir una nueva función radial decreciente:

$$\widetilde{\Phi_2}(x) = \begin{cases} C\|f\|_{L^1} & si \ \frac{|x|}{4} \leqslant \sqrt{d} \\ K\Phi_1(|x|) & si \ \frac{|x|}{4} > \sqrt{d} \end{cases} \tag{37}$$

Es claro que $\widetilde{\Phi_2} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y como $\mathbf{S}upp(f) \subset I_{00}$ entonces $|P_0 f(x)| = |Q_0 f(x)|$ $\forall\ \frac{|x|}{4} > \sqrt{d}$. con un poco de abuso de notación podemos asumir que $\widetilde{\Phi_2} = G \circ r$ donde $r = |x|$ y $G : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función en L^∞ y decreciente. Ahora, se puede definir :

$$\Phi_2(x) = G(n) \ \ si \ \ x \in A_n$$

Para probar que $\Phi_2 \in L^1$ construimos la siguiente función auxiliar: $\Phi_3(x) = \widetilde{\Phi_2}\left(\frac{x}{10\sqrt{d}}\right)$ Ahora, para cada $x \in \mathbb{R}^d$ existe un $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $x \in A_n$. Si x verifica $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i| \leq n+1$ entonces $|x| \leqslant \sqrt{d}\,(n+1)$. De éste hecho: $\frac{|x|}{10\sqrt{d}} \leqslant \frac{(n+1)}{10} \leqslant n-1 \leqslant n$ si $n \geq 2$, entonces, como G es decreciente, $\Phi_3(x) = G\left(\frac{|x|}{10\sqrt{d}}\right) \geq G(n) = \Phi_2(x)$. Entonces $\Phi_3 \in L^1$ mayora Φ_2. $\square$

El siguiente resultado, más adelante nos permitirá utilizar el clásico teorema de descomposición de Calderón-Zygmund para probar que los operadores U_ϵ son de tipo $(1,1)$-débil.

Teorema 17. *Si los $I_{j\,k}$ son cubos díadicos y las $f_{j\,k}$ son funciones tales que $\boldsymbol{S}upp(f_{j\,k}) \subset I_{j\,k}$ para las cuales vale la siguiente desigualdad:*

$$\lambda < \frac{1}{|I_{jk}|} \int\limits_{I_{jk}} |f_{jk}| \leqslant 2^d \lambda$$

entonces

$$\left\| \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} P_j f_{jk} \right\|_{L^2}^2 \leqslant C\lambda \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \|f_{jk}\|_{L^1} \tag{38}$$

Demostración. Como los P_j son proyecciones ortogonales entonces son autoadjuntos:

$$\left\| \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} P_j f_{jk} \right\|_{L^2}^2 = \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \langle P_j f_{jk}, P_m f_{mn} \rangle$$

$$= \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \langle P_m P_j f_{jk}, f_{mn} \rangle$$

$$= \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \left\langle P_{\text{mín}\{m,j\}} f_{jk}, f_{mn} \right\rangle \leqslant 2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \sum_{m\geqslant j\ n\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} P_j f_{jk} \overline{f_{mn}} \right|$$

De la ecuación (34) y por la proposición 13 tenemos:

$$2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \sum_{m\geqslant j\ n\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} P_j f_{jk}(x) \overline{f_{mn}}(x) dx \right|$$

$$\leqslant 2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \sum_{m\geqslant j\ n\in\mathbb{Z}^d} \int_{I_{m\,n}} \|f_{jk}\|_{L^1} 2^{jd} \Phi_2(2^j x - k) \left| f_{mn}(x) \right| dx$$

$$= 2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \|f_{jk}\|_{L^1} 2^{jd} \sum_{m\geqslant j\ n\in\mathbb{Z}^d} \int_{I_{m\,n}} \Phi_2(2^j x - k) \left| f_{mn}(x) \right| dx = \Pi$$

Como $\Phi_2(2^j x - k)$ es constante sobre cada cubo $I_{m\,n}$ entonces:

$$\int_{I_{mn}} \Phi_2(2^j x - k) \left| f_{mn}(x) \right| dx = \frac{1}{|I_{mn}|} \int_{I_{mn}} \left| f_{mn}(x) \right| dx \int_{I_{mn}} \Phi_2(2^j x - k) dx$$

de ésto, tenemos:

$$\Pi \leqslant 2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \|f_{jk}\|_{L^1} 2^{jd} \sum_{m\geqslant j\ n\in\mathbb{Z}^d} 2^d \lambda \int_{I_{mn}} \Phi_2(2^j x - k) dx$$

$$\leqslant 2^{d+1} \lambda \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \|f_{jk}\|_{L^1} 2^{jd} \int_{\bigcup_{mn} I_{mn}} \Phi_2(2^j x - k) dx \leqslant 4\lambda \|\Phi_2\|_{L^1} \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d} \|f_{jk}\|_{L^1}$$

□

4.2. Resultado Principal

Antes de probar el último teorema (sobre bases incondicionales), se necesita el siguiente resultado, que es fundamental para su demostración:

Lema 2. *Sea $\psi^\lambda(x) \in \mathcal{RB}$, mas aún, existe una función radial decreciente $\eta(x)$ de manera que $\eta(x)ln(2+|x|) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $|\psi^\lambda(x)| \leq \eta(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ entonces Los operadores U_ε son del tipo $(1,1)$-débil: $\exists\ C > 0$ tal que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, y cada $\lambda > 0$:*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |U_\varepsilon f(x)| > \lambda\right\}\right| \leqslant C\frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$$

Uniformemente en ε.

Demostración. Por el teorema de descomposición de Calderón-Zygmund, para cada $\lambda > 0$ existe una familia de índices $\mathbf{F} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$ tales que para cada $(j,k) \in \mathbf{F}$:

$$\lambda < \frac{1}{|I_{jk}|}\int\limits_{I_{jk}} |f| \leqslant 2^d\lambda \tag{39}$$

y $|f(x)| \leqslant \lambda$ para cada $x \in \mathbb{R}^d - \bigcup\limits_{(j,k)\in\mathbf{F}} I_{jk}$ y de la ecuación (39) se sigue que:

$$\left|\bigcup_{(j,k)\in\mathbf{F}} I_{jk}\right| \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda} \tag{40}$$

Como de costumbre P_j denota la proyección ortogonal sobre

$$V_j = Span\ \left\{\psi^\lambda_{ik}\right\}_{i<j,\lambda\in\Lambda,k\in\mathbb{Z}^d}$$

así que podemos escribir P_j como $P_j(.) = \sum\limits_{i<j}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum\limits_{\lambda}\left\langle ., \psi^\lambda_{ik}\right\rangle\psi^\lambda_{ik}$ y la proyección al complemento ortogonal como $Q_j = I - P_j$. Ahora, descomopongamos a f en una función *buena* y otra *mala* [4] mas precisamente, si $f_{j\,k} = f\mathbf{1}_{I_{j\,k}}$, tenemos:

$$g(x) = f.\mathbf{1}_{\left(\mathbb{R}^d - \bigcup\limits_{(j,k)\in\mathbf{F}} I_{jk}\right)}(x) + \sum_{(j,k)\in\mathbf{F}} P_j f_{jk}(x)$$

y

$$b(x) = (f-g)(x) = \sum_{(j,k)\in\mathbf{F}} (I - P_j)\, f_{jk}(x) = \sum_{(j,k)\in\mathbf{F}} Q_j f_{jk}(x)$$

[4]Notemos que ésta descomposición es ligeramente diferente a la que se suele hacer, por ejemplo, para probar que ciertos operadores integrales singulares son de tipo $(1,1)$-débil

Luego

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| f.\mathbf{1}_{\left(\mathbb{R}^d - \bigcup\limits_{(j,k)\in\mathbf{F}} I_{j\ k}\right)} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| \sum_{(j,k)\in\mathbf{F}} P_j f_{jk} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} ,$$

además

$$\left\| f.\mathbf{1}_{\left(\mathbb{R}^d - \bigcup\limits_{(j,k)\in\mathbf{F}} I_{j\ k}\right)} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\left(\bigcup\limits_{(j,k)\in\mathbf{F}} I_{j\ k}\right)^c} |f(x)|^2 dx \leq \lambda \int\limits_{\left(\bigcup\limits_{(j,k)\in\mathbf{F}} I_{j\ k}\right)^c} |f(x)| dx$$

por otra parte de la ecuación (38):

$$\left\| \sum_{(j,k)\in\mathbf{F}} P_j f_{jk} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\lambda \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

luego se obtiene $\|g\|_{L^2} \leqslant C\sqrt{\lambda \|f\|_{L^1}}$. De ésto obtenemos:

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |U_\varepsilon f(x)| > \lambda\right\}\right|$$

$$\leqslant \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |U_\varepsilon g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |U_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| ,$$

y de la desigualdad de Tchevicheff sale que:

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |U_\varepsilon g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant \frac{4}{\lambda^2} \|U_\varepsilon g\|^2_{L^2} \leqslant \frac{4}{\lambda^2} \|g\|^2_{L^2} \leqslant C\frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda} \tag{41}$$

Ahora si $K > 0$ es una constante, que eventualmente depende de d de manera que $K\ I_{jk}$ contenga una esfera, para la cual valga la proposición 11, entonces si $\Omega = K \bigcup\limits_{(j,k)\in\mathbf{F}} I_{jk}$, de (40) tenemos:

$$|\Omega| \leqslant \frac{K}{\lambda} \|f\|_{L^1} \tag{42}$$

Si escribimos

$$\int\limits_{\Omega^c} |U_\varepsilon b| \leqslant \sum_{(j,k)\in\mathbf{F}} \int\limits_{\Omega^c} |U_\varepsilon Q_j f_{jk}| \leqslant \sum_{(j,k)\in\mathbf{F}} \int\limits_{\left(KI_{jk}\right)^c} |U_\varepsilon Q_j f_{jk}|$$

De (29) obtenemos:

$$\int_{\Omega^c} |U_\varepsilon b| \leqslant C \sum_{(j,k)\in \mathbf{F}} \|f_{j\,k}\|_{L^1} \leqslant C \|f\|_{L^1} \tag{43}$$

y por Tchevicheff, la ec. (42) y la ec. (43):

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |U_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant |\Omega| + \left|\left\{x \in \Omega^c : |U_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

$$\leqslant \frac{K}{\lambda} \|f\|_{L^1} + \frac{2C}{\lambda} \|f\|_{L^1}$$

□

Teorema 18. *Sea $\psi^\lambda(x) \in \mathcal{RB}$, mas aún, existe una función radial decreciente $\eta(x)$ tal que $\eta(x)ln(2+|x|) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $|\psi^\lambda(x)| \leq \eta(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^d$ entonces el sistema $\left\{\psi^\lambda_{ik}\right\}_{i<j,\lambda\in\Lambda,k\in\mathbb{Z}^d}$ es una base incondicional en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p < \infty$.*

Demostración. Del lema 2, los U_ε son acotados en $L^2(\mathbb{R}^d)$, y por el teorema de interpolación de Marcinkewiczs se tiene que los U_ε son acotados (y por lo tanto continuos) en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p \leq 2$, mas aún existe una constante $C_p > 0$ independiente de ε tal que: $\|U_\varepsilon f\|_{L^p} \leqslant C_p \|f\|_{L^p}$ $\left(\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)\right)$, por dualidad el mismo resultado vale para $2 \leq p < \infty$: Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces por la desigualdad de Hölder y que los U_ε son acotados para $1 < p < 2$

$$\int_{\mathbb{R}^d} U_\varepsilon^* f(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) U_\varepsilon g(x) dx$$

$$\leqslant \|f\|_{L^p} \|U_\varepsilon g\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p} C \|g\|_{L^q}$$

tomando supremo

$$\|U_\varepsilon f\|_{L^p} = \underset{\|g\|_{L^q}\leqslant 1}{Sup} \int_{\mathbb{R}^d} U_\varepsilon f(x) g(x) dx \leqslant \|f\|_{L^p} C$$

entonces los U_ε son continuos en $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, y sus normas son uniformenente acotados. □

5. COMENTARIOS VARIOS

5.1. Sobre la Convergencia Puntual

Nada se dijo sobre la convergencia puntual considerando algún otro método de sumación en la expansión Wavelet, por ejemplo, se puede probar lo siguiente [12]:

Teorema 19. *Sea ψ acotada y rápidamente decreciente a cero tal que $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$, si para $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ definimos:*

$$T_\lambda f = \sum_{|a_{j\,k}|>\lambda} a_{j\,k}\psi_{j\,k} \ ,$$

entonces para casi todo x vale:

$$T_\lambda f(x) \longrightarrow f(x)$$

cuando $\lambda \longrightarrow 0$.

Otros resultados de éste tipo se encuentran en [13]

5.2. Sobre la Convergencia Incondicional en otros Espacios Funcionales

Existen resultados análogos a los expuestos para el caso de espacios L^p pesados, por ejemplo en [1] se prueba que bajo ciertas condiciones sobre la función de peso w y suponiendo que la función de escala $\phi \in \mathcal{RB}$ entonces las wavelets asociadas son una base incondicional de $L^p(\mathbb{R}^d, w(x)dx)$ con $1 < p < \infty$.
Otros resultados sobre wavelets en espacios de Hardy se pueden encontrar en [16] y [5].

Referencias

[1] Aimar H.A. Bernardis A.L. y Martín-Reyes F.J., *Multirresolution Approximations and Wavelet Bases of Weighted L^p Spaces*, J. Fourier Anal. and App. Vol.9 (5), pp. 497-510 (2003).

[2] Daubechies I. "Ten Lectures on Wavelets", SIAM, 1992.

[3] Duoandikoetxea Z. J. "Análisis de Fourier", Addison-Wesley, 1995.

[4] Dunford N., Schwartz J. T. "Linear Operators, Part I: General Theory", Interscience, 1958.

[5] Hernandez E., Weiss G. "A First Course on Wavelets", CRC Press, 1996.

[6] Kahane J.P. "Some Random Series of Functions", Cambridge, 1993.

[7] Kelly S., Kon M.A., Raphael L.A. *Local Convergence for Wavelet expansions*, Journal of Functional Analysis 126, pp. 102-138 (1994)

[8] Lindenstrauss J. Tzafriri L. "Classical Banach Spaces" Vol. I y II, Springer Verlag 2ed., 1996.

[9] Pinsky M. "Introducción al Análisis de Fourier y las Ondeletas", Thompson, 2001.

[10] Stein E.M. Weiss G. "Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton Univ. Press, 1970.

[11] Stein E.M. "Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscilatory Integrals", Princeton Univ. Press, 1993.

[12] Tao T. *On the Almost Everywhere Convergence of Wavelet Summations Methods*, App. and Comp. Harmonic Anal. Vol.3 pp. 384-387 (1996).

[13] Tao T. Vidakovic B. *Almost Everywhere Behavior of General Wavelet Shrinkage Operators*, App. and Comp. Harmonic Anal. Vol.9 pp. 72-82 (1998).

[14] Torchinsky A. "Real-Variable Methods in Harmonic Analysis", Academic Press, 1986.

[15] Wojtaszczyk P. *Wavelets as Unconditional Basis in $L^p(\mathbb{R})$*, J. Fourier Anal. Appl. 5(1) 1999, pp. 73-85.

[16] Wojtasczyk P. "A Mathematical Introduction to Wavelets", Cambridge, 1997.

[17] Yang L., *Unconditional Basic Sequence in $L^p(\mu)$ and its l^p stability*, Proc. A.M.S. Vol. 127(2), 1999, pp. 455-464.