**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

# Introducción a la teoría de deformaciones

**Autor:** César Massri
**Director:** Fernando Cukierman
Marzo 2007

*A Lauri*

# Índice

# 0. Introducción

Cuando uno se acerca a la teoría de deformaciones observa que en principio, hay por lo menos tres tipos distintos. Para hacer una primera aproximación, podríamos decir que estas deformaciones aparecen en análisis, álgebra y geometría algebraica. Describámoslas brevemente para tener una idea bien básica del tema.

## 0.1. Estructuras analíticas

La teoría de deformaciones de estructuras complejas de variedades Riemannianas es una idea que se remonta hasta el mismo Riemann donde en un trabajo de 1857 [20] calculó el número de parámetros independientes del cual depende las variaciones de una superficie de Riemann compleja compacta (dimensión compleja igual a uno). Llamó a estos parámetros "moduli". La fórmula de Riemann declara que el número de moduli de una superficie de Riemann compacta de género $g \geqslant 2$ es igual a $3g - 3$. Esta fórmula fue generalizada por Klein para superficies de Riemann con borde. Desde esa publicación el interés en las deformaciones de estas estructuras nunca se ha perdido.
Con respecto a variedades de dimensiones mayores, las deformaciones de superficies algebraicas fueron tratadas por primera vez en 1888 por Max Noether [19]. Sin embargo las teorías de deformación de variedades complejas de dimensiones superiores no han sido tratadas sino 100 años después.
En 1957 (100 años después del trabajo de Riemann) Frölicher y Nijenhuis publicaron un trabajo en el que estudian deformaciones de variedades complejas de dimensiones superiores mediante métodos de geometría diferencial obteniendo importantes resultados.
Inspirados por este trabajo Kodaira y Spencer concibieron una teoría de deformaciones de variedades complejas compactas. Veamos su teoría un poco más de cerca [13]:
Intuitivamente una deformación de una variedad compleja compacta $X$ viene dada por una familia $\{X_t\}_{t\in B}$. En caso de que $X$ sea una variedad algebraica compleja suave y proyectiva definida por polinomios homogéneos $X = \{P_\lambda(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$, viene dada por variaciones de los polinomios $P_\lambda(x_0, \ldots, x_n, t)$, con $P_\lambda(x_0, \ldots, x_n, 0) = P_\lambda(x_0, \ldots, x_n)$. Luego tomando $X_t = \{P_\lambda(x_0, \ldots, x_n, t) = 0\}$ se tiene que $X_t$ tiene dimensión constante para $|t| < \epsilon$ (en ese caso será suave).
Más formalmente, una deformación de $X$ viene dada por $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} B$ donde $\mathcal{X}$ y $B$ son variedades complejas y $\pi$ un morfismo (holomorfo) propio y suave (el diferencial $\pi_*$ tiene rango máximo). Luego las fibras $X_t = \pi^{-1}(t)$ son variedades complejas compactas. Asumimos que $X_{t_0} \cong X$ para algún $t_0 \in B$ fijo.
La teoría de Kodaira-Spencer es local, luego podemos pensar a $B$ como un entorno del cero en $\mathbb{C}^m$. Tomemos el caso $m = 1$ ya que a modo explicativo es el ejemplo testigo de la teoría. Entonces tendremos que $B$ tiene dimensión compleja igual a uno.
Algunas preguntas que trata la teoría de Kodaira-Spencer pueden ser ¿existen deformaciones de $X$?, ¿qué propiedades de $X$ son estables bajo deformación? ¿cómo se comporta el grupo cohomológico $H^q(X_t, \mathcal{J}_t)$ en la familia?
El primer invariante en ser estudiado es la aplicación de Kodaira-Spencer $T_tB \xrightarrow{\rho_t} H^1(\Theta_{X_t})$. Veamos cómo se define y qué datos aporta: intuitivamente mide las variaciones de primer orden de la estructura compleja.
La proyección $\pi$ tiene rango máximo, luego achicando $B$ si es necesario, podemos tomar

un cubrimiento de $\mathcal{X}$ por entornos coordenados $U_\alpha$ con coordenadas locales $(z_\alpha, t)$ tal que $\pi(z_\alpha, t) = t$; por lo tanto cercanos a $X_{t_0}$ la deformación es trivial (biholomorfa a $X \times B$), luego podría esperarse que la no-trivialidad global sea medida cohomológicamente. En las intersecciones de los entornos tenemos

$$(i) \quad z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta, t)$$

$$(ii) \quad f_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma, t), t) = f_{\alpha\gamma}(z_\gamma, t)$$

Si pensamos a la variedad compleja dada por los datos de pegado $(i)$, el campo vectorial

$$\theta_{\alpha\beta}(t) := \frac{\partial f^i_{\alpha\beta}(z_\beta, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z^i_\alpha}$$

describe la variación de los datos de pegado y por consiguiente de la estructura de variedad compleja.
Ahora, $\theta_{\alpha\beta}(t) \in C^1(\{U_\alpha(t)\}, \Theta_{X_t})$ una 1-cocadena de Čech para el haz tangente $\Theta_{X_t}$ relativo al cubrimiento $U_\alpha(t) := U_a \bigcap X_t$ de $X_t$.
Diferenciar $(ii)$ con respecto a $t$ muestra que el coborde $\delta\{\theta_{\alpha\beta}(t)\} = 0$ y por lo tanto se tiene definida una clase cohomológica $\{\theta_{\alpha\beta}(t)\} \in H^1(\Theta_{X_t})$.
Esta es la aplicación Kodaira-Spencer.
Un resultado de la teoría dice que la familia $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} B$ es localmente trivial si y sólo si todos los $\rho_t = 0$.
Otro resultado muy importante concerniente a $\rho_t$ es que da (en sentido práctico) la obstrucción a levantar $\frac{\partial}{\partial t}$ sobre la base de un campo vectorial holomorfo definido sobre $\mathcal{X}$.
Si $\frac{\partial}{\partial t}$ se levanta a un campo vectorial holomorfo $\nu$ con $\pi_*(\nu) = \frac{\partial}{\partial t}$, entonces el flujo holomorfo de $\nu$ da un isomorfismo (holomorfo) $X_{t_0} \cong X_t$ y por lo tanto una trivialización $\mathcal{X} \cong X_{t_0} \times B$.
Ahora, como puede ser visto usando particiones de la unidad, no hay obstrucción a levantar $\frac{\partial}{\partial t}$ como campo vectorial $C^\infty$, luego el difeomorfismo resultante ($X_{t_0} \cong X_t$), puede ser usado para transportar la estructura compleja de $X_t$ de vuelta a $X_{t_0}$.
Un análisis minucioso de esto, afirma que se puede expresar el operador de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}_t$ para $X_t$ como $\overline{\partial}_t = \overline{\partial} + \theta(t)$ donde $\theta(t)$ es una (0-1)-forma a valores en $\Theta_X$ tal que $\theta(t) = \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \dots$ es una serie convergente en $t$.
La condición de integrabilidad $\overline{\partial}_t^2 = 0$ da una serie de relaciones:

- $\overline{\partial}\theta_1 = 0$
- $\overline{\partial}\theta_2 + \frac{1}{2}[\theta_1, \theta_1] = 0$
- $\dots$

La primera afirma que $\theta_1$ define una clase cohomológica de Dolbeault $\{\theta_1\} \in H^{0,1}_{\overline{\partial}}(\Theta_X)$, la segunda que la clase cohomológica de Dolbeault $\{[\theta_1, \theta_1]\} \in H^{0,2}_{\overline{\partial}}(\Theta_X)$ definida por el corchete $[\theta_1, \theta_1]$ debe ser cero.
En conjunto, las relaciones son equivalentes a $\overline{\partial}_t\theta(t) = 0$, o sea, $\{\theta(t)\} \in H^{0,1}_{\overline{\partial}_t}(\Theta_X)$.
Luego usando el isomorfismo de Dolbeault $H^1(\Theta_{X_t}) \cong H^{0,1}_{\overline{\partial}_t}(\Theta_X)$ se tiene que

$$\rho_t(\frac{\partial}{\partial t}) = \{\theta(t)\}$$

Esto muestra cómo las clases de Kodaira-Spencer dan la variación de variedades complejas.
El teorema probado por Frölicher-Nijenhuis (de manera independiente) afirma que si $H^1(\Theta_X) = 0$ la familia $\pi$ es localmente trivial.
Un teorema fundamental en la teoría de Kodaira-Spencer afirma que si $H^2(\Theta_X) = 0$ existe una familia $\pi$ tal que $T_{t_0}B \xrightarrow{\rho_{t_0}} H^1(\Theta_X)$ es un isomorfismo.
Este teorema fue extendido por Kuranishi para probar la existencia de familias localmente universales donde $B$ es una subvariedad analítica en un entorno del cero en $H^1(\Theta_X)$ con $\dim B \geqslant \dim H^1(\Theta_X) - H^2(\Theta_X)$.
Como ejemplo sobre estabilidad, existe un teorema (de Kodaira-Spencer) que dice que si $X$ es una variedad de Kähler entonces $X_t$ también lo será para $t$ cercanos a $t_0$.
Para terminar cabe aclarar que esta teoría fue asimilada es diversas teorías de deformaciones incluyendo subgrupos discretos de grupos de Lie semisimples (Calabi, Weil, Matsushima, entre otros) y álgebras (Gerstenhaber), a lo largo de los años estas teorías fueron extendidas, expandidas y aplicadas.
En el área de geometría algebraica, la teoría de Kodaira-Spencer fue rápidamente absorbida, adaptada y muy extendida por Grothendieck y su escuela. Junto al estudio complementario de moduli global, especialmente de curvas algebraicas iniciadas por Mumford, uno ve que casi 50 años luego, la teoría de deformación (local y global) es absolutamente central en la geometría algebraica moderna. Inclusive en otras áreas como teoría de cuerdas (cohomología cuántica) y los trabajos en variedades de Calabi-Yau.

## 0.2. Esquemas

En algún sentido, la teoría de deformaciones en el contexto de geometría algebraica es tan vieja como la disciplina misma: esto es debido a que los objetos álgebro-geométricos pueden ser “deformados” con una variación de los coeficientes de sus ecuaciones de definición, y esto ha sido siempre, por supuesto, conocido por los geómetras clásicos.
Sin embargo, un entendimiento correcto de lo que significa “deformar” lleva a una de las partes técnicamente más difíciles de la geometría algebraica.
Es justo decir que estos obstáculos técnicos han tenido un fuerte impacto en el lenguaje clásico generando una crisis y llevándolo hacia el desarrollo moderno, basado en la teoría de esquemas y de métodos cohomológicos.
El enfoque moderno se originó gracias al trabajo de Kodaira-Spencer [13] sobre deformaciones infinitesimales de variedades analíticas complejas y a la formalización y traducción al lenguaje de esquemas gracias a Grothendieck [10],[11]. La teoría para variedades algebraicas fue construida por Artin [2] y Schlessinger [21].
Una deformación de una variedad algebraica es la inclusión de la variedad en una familia de variedades algebraicas. La teoría de deformaciones de variedades algebraicas (o mas generalmente, de esquemas) es el análogo algebraico de la teoría de deformaciones de estructuras analíticas previamente introducidas. Algunos problemas que trata son los siguientes: sea $X_0$ un esquema sobre un cuerpo $k$. $S$ un esquema y $s_0 \in S$ un punto con cuerpo residual $k$. Una pregunta que puede hacerse es si existirá un $S$-esquema $X$ playo cuya fibra sobre $s_0$ sea isomorfa a $X_0$. En caso afirmativo el $S$-esquema $X$ se dice deformación del esquema $X_0$ sobre $S$.
Otra pregunta pertinente es si existe una deformación $M$ sobre el esquema $X_0$ tal que

para cualquier otra deformación $X \longrightarrow S$ es posible encontrar un morfismo $S \longrightarrow M$ tal que $X$ es pullback sobre $M$.
Existe también lo que se conoce como deformaciones formales: dada una deformación $X \to S$ de un esquema $X_0$, la completación formal sobre la fibra $X_{S_0}$ define una deformación formal sobre la completación del anillo local $\mathcal{O}_{S,s_0}$. Claramente se tienen los mismos problemas descritos previamente. Por ejemplo, la deformación formal universal de una variedad suave es el análogo algebraico del espacio de moduli local en la teoría de deformaciones de estructuras analíticas.
Cuando $S = Spec(R)$ con $R$ anillo local de Artin (resp. completo) con cuerpo residual $k$ las deformaciones de $X_0$ sobre $S$ se dicen infinitesimales (resp. formales).
Si $X_0$ es un $k$-esquema suave y $H^2(X_0, T_{X_0}) = 0$ se tiene un teorema [9] que afirma la existencia de una deformación infinitesimal análoga al caso analítico. También se tiene un teorema [9] que afirma que si $H^1(X_0, T_{X_0}) = 0$ la deformación es trivial. Análogos al caso analítico.
El problema de la existencia de deformaciones formales se estudia mediante el funtor de deformación $Def_{X_0}$ de la categoría de anillos locales de Artin con cuerpo residual $k$ a la categoría de conjuntos, que a cada anillo le asocia el conjunto de las clases de isomorfismo de deformaciones infinitesimales de $X_0$ [2]. Existirá una deformación formal universal si y solo si el funtor es pro-representable (representable mediante un objeto fuera de la categoría) [21]. Las propiedades de la deformación se traducen en en propiedades del funtor [21].

## 0.3. Estructuras algebraicas

Todas las posibles operaciones bilineales que sean productos de álgebras sobre un $k$-espacio vectorial de dimensión finita $V$ forman una variedad algebraica $A(V)$. Notar que esta variedad está dentro del espacio vectorial $\hom_k(V \otimes V, V)$. El hecho de que $A(V)$ es una variedad algebraica se deduce de que fijada una base de $V$, cada multiplicación tiene asociada sus constantes estructurales definidas por ecuaciones polinomiales. Notar que si $\dim_k(V) = n$, se tendrá que $A(V)$ es una variedad algebraica dentro de un espacio vectorial de dimensión $n^3$.
Dos elementos de esta variedad representan álgebras isomorfas si y solo si pertenecen a la misma orbita del grupo $GL(V)$ que actúa naturalmente en $A(V)$. La teoría de deformaciones de álgebras hace posible un estudio local del conjunto cociente $A(V)/GL(V)$, o sea del conjunto de clases de isomorfismos de álgebras en el espacio $V$. Si se consideran ciertas clases de álgebras $T \subset A(V)$, uno puede considerar las deformaciones de estas álgebras que caen dentro de $T$. En particular uno puede considerar deformaciones de álgebras asociativas, asociativas-conmutativas, de Lie. Notar también que son clases invariantes bajo la acción de $GL(V)$.
La teoría de deformaciones de álgebras sobre un espacio vectorial de dimensión $n$ sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ recrea en varios aspectos la teoría de deformaciones de estructuras analíticas. Veremos en este trabajo que cada álgebra de dimensión finita $A$ sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tiene una deformación completa parametrizada por un "germen"de subespacio analítico (que contiene al 0) de $H^2(A, V)$ donde $H^\bullet(A, -)$ denota una teoría cohomológica adecuada. En el caso en que $H^3(A, V) = 0$, este subespacio coincide con $H^2(A, V)$. El teorema de rigidez (11.6), surge del siguiente resultado: si $H^2(A, V) = 0$ el álgebra $A$ en la clase $T$ es rígida, o sea, significa

que la orbita de $A$ por $GL(V)$ es un abierto (Zariski) de $T$. Luego, por ejemplo las álgebras de Lie semisimples, son rígidas como álgebras de Lie.
También se desarrollará en este trabajo la teoría de deformación de morfismos de álgebras de dimensión finita, de módulos, de morfismos dejando el dominio fijo y el codominio variable, complejos, coálgebras, etc. De hecho todas estas deformaciones entran dentro de una teoría englobadora que se modelan vía un álgebra de Lie diferencial graduada que estudiaremos en esta tesis (12). Para este enfoque/modelo un ingrediente muy importante es la ecuación de Maurer-Cartan; Las soluciones a esta ecuación serán las deformaciones de una estructura dada (ver 11)
Otro punto que la teoría de deformaciones algebraicas abarca es el de las deformaciones formales. Por ejemplo, una deformación formal de un álgebra definida en un espacio vectorial $V$ (sobre un cuerpo $k$) y multiplicación $\mu$, es un álgebra con espacio vectorial subyacente $V \otimes k[[t]]$ de series formales con la nueva operación $\phi_t$ definida por

$$\phi_t(a,b) = \mu(a,b) + \sum_{1}^{\infty} \varphi_i(a,b)t^i$$

donde $a, b \in V$ y $\varphi_i \in \hom_k(V \otimes V, V)$. Si se requiere que el álgebra resultante pertenezca a cierta clase, uno habla de deformaciones formales de álgebras asociativas, de Lie, etc.
Dos deformaciones $\phi_t$ y $\phi'_t$ de un álgebra se dicen equivalentes si existe un automorfismo $\Psi_t$ del espacio $V \otimes k[[t]]$ de la forma $\Psi_t(a) = a + \sum_1^\infty \psi_i(a)t^i$ con $\psi_i : V \longrightarrow V$ lineal, tal que $\phi'_t(a,b) = \Psi_t^{-1}(\phi_t(\Psi_t(a), \Psi_t(b)))$.
Las deformaciones equivalentes al producto usual del álgebra se denominan triviales, un álgebra sin deformaciones no-triviales dentro de cierta clase $T$ se dice rígida formal en $T$. Un resultado clásico ([6],[18]), dice que en las clases de álgebras asociativas, conmutativas-asociativas y de Lie, la ecuación $H^2(A,V) = 0$ es suficiente para la rigidez. En esta tesis no sólo lo probaremos para estos casos, sino que lo veremos para muchos ejemplos más. Incluso en su generalidad.

## 0.4. Conclusión

En esta tesis introduciremos al lector a la teoría de deformaciones vía $DGLA$ (álgebra de Lie diferencial graduada). El acercamiento a los problemas de deformaciones infinitesimales, clásicamente (Grothendieck-Schlessinger-Mumford) se hacia vía funtores de deformación [2]. Si bien este procedimiento es bastante abarcativo para la mayoría de los casos, tiene la desventaja de ser poco general (con respecto a las varias teorías de deformación existentes). El término *teoría de deformación* se refiere, en realidad, a un amplio conjunto de teorías de deformaciones como hemos detallado previamente: pequeñas perturbaciones de una estructura matemática específica; por ejemplo, teoría de deformación de variedades complejas, de álgebras asociativas, de esquemas, de representaciones, y muchas más.
La cuestión radica en que los resultados de cada una de estas teorías son probados usando herramientas completamente distintas, desde familias de operadores diferenciales elípticos para las deformaciones de estructura de variedad compleja ([13]) hasta topos anillados ([12]).
Pero, sin embargo, todas tienen cosas en común: por ejemplo poseen un espacio vectorial de deformaciones de primer orden (en general $H^1$ de algún complejo) y un espacio de obstrucciones (usualmente un $H^2$). Otro punto unificante de las teorías es la frase "bajo

un cuerpo de característica cero todo problema de deformación está gobernado por una *DGLA*", acuñada por las ideas de Quillen, Deligne, Drinfeld (y otros) de hace 25 años [3]. Hoy en día, gracias a Kontsevich, estas ideas fueron rescatadas y utilizadas [14],[15], mostrando gran utilidad y posibilidad de desarrollo, haciendo que la teoría de deformación general sea un área de investigación muy activa.

## 0.5. Objetivo

Esta humilde tesis, se va a concentrar en las deformaciones formales de estructuras algebraicas, llevándolas al enfoque actual y viendo cómo la teoría de deformaciones formales algebraicas encaja en la de *DGLA*.
Para esto deberé introducir al lector en muchos ejemplos de deformaciones formales, presentar la teoría de *DGLA* para así hablar de la teoría de deformaciones vía *DGLA* desde el enfoque clásico y el moderno, y luego, por último, traducir los ejemplos iniciales en la teoría de *DGLA*.

## 0.6. Organización

En las primeras nueve secciones se dan ejemplos detallados de diversas deformaciones formales de estructuras algebraicas.
La sección diez esta dedicada a explicar qué es una *DGLA* (desde el principio), para así meternos de lleno en la sección once que detalla cómo son utilizadas las *DGLA* y qué es la ecuación de Maurer-Cartan, así mismo, veremos aquí la relación de esta teoría con la teoría de deformaciones formales de las secciones previas. De hecho, esta relación se ve explotada en la sección doce donde se habla (sin demostraciones) del enfoque actual de la teoría.
Finalmente, en la última sección, daré ejemplos de *DGLA* demostrando que lo son y aplicaré la teoría desarrollada sobre estas, haciendo un par de comentarios.

## 0.7. Agradecimientos

Quisiera agradecer a toda la gente que me ayudo a lo largo de mi carrera y que estuvo siempre presente: en primer lugar a mi familia; mi viejo y mi vieja porque siempre me depositaron toda su confianza y apoyo dándome fuerzas y constancia en mis estudios, a mis hermanos Marcos, Ale y Nati, porque siempre me ayudaron y contaron conmigo en todo, a la Guille que es como mi segunda madre y a mi Lauri que es como mi primer amor. Ellos han podido darme todo el afecto, contención, confianza, amor, cariño y dirección que he necesitado para lograr terminar la licenciatura. Me han enseñado todo lo que sé.
Quiero agradecer a la gente de Matemática que con su ayuda y sus consejos he podido sortear este camino tan escabroso y a la vez hermoso, en particular a Ariel, Mati, a Fede Q., a Rodrigo, a Barmi, a Nico Botbol, al Lucio y por supuesto a Fernando que gracias a su ayuda, su apoyo, su comprensión, su guía y amistad he podido concluir la primera de mis etapas como futuro matemático.
Después me gustaría agradecer a mis profesores por servirme siempre de inspiración y ejemplo. Entre ellos están Andrea, Eduardo, Gabriel, Liliana y obviamente mi director.
Quisiera agradecer también a Reno, a Abi, Juliana, Julia, Eliana, Romina, Mariela y Laura Pezzati porque ellos, con su amistad y soporte, lograron que hoy esté donde estoy: escribiendo lo que me enseñaron a aprender.
También a mis amigos, Ron y Mister, a mi Lulu y a Mica, a mi banda: Emi, Martincito, el Fune, Alu, al Gure, Gustavo, Fernanda, Dieguito, Iván, Achi, Luz, al Holik, José y a Leandro. Ellos han podido mantenerme, divertirme, soportado y querido cuando no estudiaba matemática.

# 1. Preliminares

**Resumen**

Antes de comenzar con el trabajo quisiera hacer un pequeño comentario sobre la notación que utilizaré. También sobre algunos datos que supondré conocidos.

**Notación 1.0.1.** Dado un $k$-espacio vectorial $V$, a la función lineal identidad $V \xrightarrow{id} V$ tal que a cada $v \in V$ le asigna $v \in V$ la denotaré $id_V$ o $1_V$, o simplemente, si el contexto lo sugiere, $id$ o 1.

**Notación 1.0.2.** Una función $V \times V \xrightarrow{h} V$ bilineal se dice asociativa si para todo $a, b, c \in V$ se tiene $h(h(a,b),c) = h(a,h(b,c))$, o lo que es equivalente, viéndola como morfismo lineal $V \underset{k}{\otimes} V \xrightarrow{h} V$ que cumpla $h(h(a \otimes b) \otimes c) = h(a \otimes h(b \otimes c))$ y ésto pasa $\Longleftrightarrow h(h \otimes id_V) = h(id_V \otimes h)$.
Notar que $h(h \otimes id_V)(a \otimes b \otimes c) = h(h(a \otimes b) \otimes c)$, luego se deduce la afirmación.

**Notación 1.0.3.** Del mismo modo, un morfismo $k$-lineal $C \xrightarrow{h} C \otimes C$ se dice coasociativo si se tiene $(id_C \otimes h)h = (h \otimes id_C)h$. Veamos lo útil de esta notación al querer ver qué pasa con los elementos: sea $c \in C \Longrightarrow h(c) = \sum b_i \otimes a_i \Longrightarrow$ la coasociatividad queda
$\sum b_i \otimes h(a_i) = \sum h(b_i) \otimes a_i$.

**Observación 1.0.4.** En general no utilizaré los índices de las sumatorias cuando sean claros (como en el caso anterior).

**Observación 1.0.5.** Tampoco nombraré (en general) al anillo por el cual se está tensorizando, o sea, $\otimes$ significará $\underset{k}{\otimes}$.

**Notación 1.0.6.** A los automorfismos de un $k$-espacio vectorial $L$ los denotaré por $\mathrm{aut}_k(L)$. Cuando el espacio vectorial tenga una estructura adicional, por ejemplo álgebra de Lie, a los automorfismos lineales los seguiré denotando $\mathrm{aut}_k(L)$ y a los automorfismos de $k$-álgebras de Lie los denotaré por $\mathrm{aut}_{k-Lie}(L)$.

**Observación 1.0.7.** Siempre trabajaremos con cuerpos de característica cero, en realidad más concretamente con $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. A pesar de que gran parte de los resultados de este trabajo se adaptan a cuerpos de característica arbitraria no los trataré.

**Notación 1.0.8.** Para denotar que se está definiendo una función se utilizará la expresión ":=". Por ejemplo $f(x) := x+2$ significa que se está definiendo $f$ como $x \overset{f}{\longmapsto} x+2$. Notar la diferencia con la expresión $f(x) = x+2$ que afirma la igualdad entre los dos miembros.

**Observación 1.0.9.** Para las secciones de deformaciones formales (las ocho siguientes) utilizaré mucho el funtor exacto $(-)^v := (-) \underset{k}{\otimes} k((t))$ donde $k((t))$ es el cuerpo de fracciones del anillo de series formales $k[[t]]$. Notar que $(-)^v$ es exacto ya que $k((t))$ es playo sobre el cuerpo $k$ [25].
Dado un $k$-espacio vectorial $V$, se puede considerar el $k^v$- espacio vectorial $V^v$. Más aún, dados $V$, $W$ dos $k$-espacios vectoriales, se tiene que $(V \underset{k}{\otimes} W)^v = V^v \underset{k((t))}{\otimes} W^v$ pues $k((t))$ es $k$-playo. Por otro lado, cualquier morfismo $V \xrightarrow{g} W$ puede ser extendido de manera

única a $V^v \xrightarrow{g^v} W^v$ mediante $g^v := g \otimes id_{k((t))}$.
Se tiene que $g^v(\sum t^i v_i) = \sum t^i g(v_i)$. O sea, que $g^v$ es la misma $g$ salvo que en vez de ser $k$-lineal también es $k((t))$-lineal. En algunas ocasiones, por simplicidad, notaré a $g^v$ por $g$, sabiendo que es $k((t))$-lineal.

**Observación 1.0.10.** Notar que $g^v = 0 \iff g = 0$. Sale por construcción de $g^v$ ya que por un lado $g^v|_V = g$ y por otro $0^v = 0$.

**Observación 1.0.11.** Dado que $(-)^v$ es un funtor, se tiene que si $V$ es un $k$-espacio vectorial, entonces $(id_V)^v = id_{V^v}$.

**Observación 1.0.12.** Esta observación es simplemente para recordar un hecho muy simple y que utilizaré muy seguido. Dada una serie $s := 1+ta_1+t^2a_2+\ldots$ uno puede construir su inversa recursivamente, obteniendo $s^{-1} \equiv 1 - ta_1 \mod t^2$:
Se plantea

$$1 = (1 + ta_1 + \ldots)(b_0 + tb_1 + \ldots) = \sum_n t^n \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Luego se tiene para $n = 0$, $a_0 b_0 = 1$, o sea, $b_0 = 1$.
Para $n > 0$, $\sum_{i+j=n} a_i b_j = 0$. En particular para $n = 1$, $0 = b_1 + a_1$, o sea, $b_1 = -a_1$.

# 2. Álgebras Asociativas

**Resumen**

En esta sección seguiremos el artículo [6]. Trataremos la teoría de deformaciones formales de álgebras asociativas. Básicamente lo que se hace es: dada una $k$-álgebra asociativa $A$, se considera sobre $A \otimes k((t))$ un nuevo producto. Este producto será una serie de potencias formal y sobre él, se verán condiciones necesarias para que defina una estructura de álgebra asociativa. Se definirán las obstrucciones y cuáles son las estructuras de álgebras equivalentes. Esta construcción, por ser la primera, la detallaré un poco más que las siguientes. Se utilizará el complejo de Hochschild ([25] pp.301).

## 2.1. Deformaciones infinitesimales

Sea $A$ una $k$-álgebra, no necesariamente de dimensión finita con multiplicación $F_0$ y $V$ su espacio vectorial subyacente. Cualquier función lineal $V \underset{k}{\otimes} V \xrightarrow{f} V$ (en particular la multiplicación de $A$) puede ser extendida de manera única a una función lineal $V^v \underset{k((t))}{\otimes} V^v \xrightarrow{f^v} V^v$ (1.0.9).

**Definición 2.1.1.** Llamaremos *familia de deformaciones a un parámetro* de $F_0$ o *deformación formal* o sólo *deformación* de $F_0$ a un morfismo $V^v \underset{k((t))}{\otimes} V^v \xrightarrow{f_t} V^v$ expresable de la siguiente forma

$$f_t = \sum_{i=0}^{\infty} t^i F_i^v \tag{2.1.1}$$

donde $F_i \in \hom_k(V \underset{k}{\otimes} V, V)$ tal que $f_t$ es asociativa, o sea,

$$f_t(f_t \otimes id_{V^v}) = f_t(id_{V^v} \otimes f_t) \tag{2.1.2}$$

En otras palabras, una deformación de $F_0$ como álgebra asociativa es una serie formal de tipo (2.1.1) tal que cumpla asociatividad (2.1.2), o sea,

$$f_t(a,b) = F_0(a,b) + tF_1(a,b) + t^2F_2(a,b) + \dots$$

y vale

$$f_t(a, f_t(b,c)) = f_t(f_t(a,b), c)$$

**Observación 2.1.2.** Puede considerarse al álgebra $A_t := (V^v, f_t)$ cuyo espacio vectorial subyacente es $V^v$ y multiplicación $f_t$ como un elemento genérico de una familia de deformaciones a un parámetro del álgebra $A$.

**Observación 2.1.3.** Si $A$ tiene dimensión infinita, puede que $f_t$ no tenga especializaciones sobre $\mathbb{C}$ distinta a la trivial $t = 0$ (la multiplicación original), sin embargo,
si $\dim_k A < \infty$ existen necesariamente especializaciones no-triviales ([1] pp.39). Luego el espacio de especializaciones tiene dimensión mayor que uno.

**Ejemplo 2.1.4.** Sea $A = \mathbb{C}$ álgebra sobre $\mathbb{R}$ de $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$. En este caso, $V = \mathbb{R}^2$. La multiplicación $F_0$ de $\mathbb{C}$ viene dada por $1 \otimes 1 \to 1 \quad 1 \otimes i \to i \quad i \otimes 1 \to i \quad i \otimes i \to -1$. Notemos primero que $\dim_{\mathbb{R}}(\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}, \mathbb{C})) = 8$ y sea $\{G_k\}_1^8$ los generadores de $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}, \mathbb{C})$.
Supongamos dada $\mathbb{C}^v \underset{\mathbb{R}^v}{\otimes} \mathbb{C}^v \xrightarrow{f_t} \mathbb{C}^v$ expresable de la siguiente manera
$f_t = \sum_0^\infty t^i F_i^v$ donde $F_i \in \hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Luego, cada $F_i$ será combinación $\mathbb{R}$-lineal de $\{G_k\}$. Entonces, $f_t = \sum_1^8 P_k(t) G_k^v$ con $P_k \in \mathbb{R}((t))$. Luego los $t$ admisibles serán más que simplemente $t = 0$. Este ejemplo es válido para cualquier álgebra de dimensión finita, afirmando que en estos casos, hay especializaciones no triviales.

**Definición 2.1.5.** A $F_1$ se la llama *deformación infinitesimal* de $F_0$. También puede llamarse la *primera derivada* de la familia $f_t$.

**Observación 2.1.6.** La condición (2.1.2) de asociatividad para $f_t$ es equivalente a tener,

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geqslant 0}} F_i(F_j \otimes id_V) - F_i(id_V \otimes F_j) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.1.3}$$

Esto es, pues,

$$0 = f_t(id_{V^v} \otimes f_t) - f_t(f_t \otimes id_{V^v}) = \sum_i t^i F_i^v(id_{V^v} \otimes f_t) - t^i F_i^v(f_t \otimes id_{V^v}) =$$

$$\sum_i t^i (F_i^v(id_{V^v} \otimes f_t) - F_i^v(f_t \otimes id_{V^v})) = \sum_i t^i (F_i^v(\sum_j id_{V^v} \otimes t^j F_j^v) - F_i^v(\sum_j F_j^v t^j \otimes id_{V^v})) =$$

$$\sum_i \sum_j t^{i+j} (F_i(id_V \otimes F_j) - F_i(F_j \otimes id_V))^v = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geqslant 0}} F_i(id_V \otimes F_j) - F_i(F_j \otimes id_V))^v$$

Entonces, para que sea cero (ver 1.0.10), debe serlo en cada grado, obteniendo (2.1.3).

**Observación 2.1.7.** Para $n = 0$ se recupera la asociatividad de $F_0$.
Para $n = 1$ se obtiene

$$aF_1(b \otimes c) - F_1(ab \otimes c) + F_1(a \otimes bc) - F_1(a \otimes b)c = 0 \quad \forall a, b, c \in A$$

que en términos de la teoría de Hochschild, afirma que $F_1$ es un elemento del grupo $Z^2(A, A)$. En otras palabras, las deformaciones infinitesimales de $F_0$ [ver 2.1.5] son todas 2-cociclos de $A$ con coeficientes en $A$.

## 2.2. Obstrucciones

**Definición 2.2.1.** Dada una $k$-álgebra asociativa $A$, un elemento arbitrario $F_1 \in Z^2(A, A)$ no tiene por qué ser la derivada de una familia $f_t$. Cuando ese sea el caso, diremos que $F_1$ es *integrable*.

**Observación 2.2.2.** La integrabilidad de $F_1$ implica una secuencia infinita de relaciones que pueden interpretarse como la anulación de la obstrucción a la integrabilidad de $F_1$. Estas obstrucciones pueden deducirse fácilmente de (2.1.3):

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 0}} F_i(F_j\otimes id_V)-F_i(id_V\otimes F_j)=\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}}+\sum_{i=0,j=n}+\sum_{i=n,j=0}=$$

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}}+\quad\{-(F_0(id_V\otimes F_n)-F_0(F_n\otimes id_V)+F_n(id_V\otimes F_0)-F_n(F_0\otimes id_V))\}$$

El primer término lo utilizo para definir la $n$-ésima obstrucción $\delta F_n$, el segundo término es exactamente la condición de 3-coborde en $F_n$ (es $d^2(F_n)$, con $d^2$ el diferencial del complejo de Hochschild).

$$\delta F_n := \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} F_i(F_j\otimes id_V)-F_i(id_V\otimes F_j)\in \hom_k(V^{\otimes 3},V) \tag{2.2.1}$$

**Observación 2.2.3.** $f_t$ es asociativa$\Longleftrightarrow \delta F_n = d^2(F_n)\quad (n\geqslant 2)$
Por otro lado, si $f_t$ es asociativa y $\delta F_n=0$ se tendrá que $F_n$ es un 2-cociclo, pues queda
$0=\delta F_n-(F_0(id_V\otimes F_n)-F_0(F_n\otimes id_V)+F_n(id_V\otimes F_0)-F_n(F_0\otimes id_V))=0-d^2(F_n)$

**Observación 2.2.4.** Si $f_t$ es asociativa y $F_1=\ldots=F_{n-1}=0\Longrightarrow$
por construcción de $\delta F_n$ queda $\delta F_n=0$. Luego por (2.2.3), $F_n\in Z^2(A,A)$.

**Definición 2.2.5.** Diremos que $f_t$ es *asociativa hasta grado* $n$ si se cumple la condición de asociatividad (2.1.3) hasta $n$. En ese caso, notar que $\delta F_k = d^2(F_k)\quad 2\leqslant k\leqslant n$ y $F_1\in Z^2(A,A)$.

**Proposición 2.2.6.** $d^2(F_1)=\delta F_2-d^2(F_2)=\ldots=\delta F_{n-1}-d^2(F_{n-1})=0\Longrightarrow$
$\delta F_n\in Z^3(A,A)$

*Demostración.* Esta demostración (al igual que todas las demostraciones de las proposiciones similares a esta) se hará luego en un contexto más general en 11.4.
Se le puede asignar una estructura de álgebra de Lie graduada diferencial al complejo de Hochschild, definiendo lo que se llama el corchete de Gerstenhaber:
Sea $A$ un álgebra asociativa sobre un cuerpo $k$ de característica 0, considero el complejo de Hochschild (corrido en uno)

$$C^\bullet(A,A):=\bigoplus_{n\geqslant 0}\hom_k(A^{\otimes n+1},A)[-n]$$

con el diferencial $D$ que es el usual corrido en uno, o sea, si

$$f\in C^n(A,A)\Longrightarrow D^n(f)=d^{n+1}(f)$$

Le construimos un corchete: si $f,g$ homogéneos, se define $[f,g]:=f\circ g-(-1)^{\overline{f}\overline{g}}g\circ f$ donde $\circ$ es un producto no asociativo definido por

$$(f\circ g)(a_0\otimes\ldots\otimes a_{\overline{f}+\overline{g}}):=\sum_{i=0}^{\overline{f}}(-1)^{i\overline{g}}f(a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\otimes g(a_i\otimes\ldots\otimes a_{i+\overline{g}})\otimes a_{i+\overline{g}+1}\otimes\ldots\otimes a_{\overline{f}+\overline{g}})$$

Con esta estructura se tiene un álgebra de Lie diferencial graduada ([5] o [16]).
Notar que si $f$ tiene grado dos, o sea, $A^{\otimes 3} \xrightarrow{f} A$, se tiene que

$$[f, F_0] = F_0(id_A \otimes f) - f(F_0 \otimes id_A \otimes id_A) + f(id_A \otimes F_0 \otimes id_A) - f(id_A \otimes id_A \otimes F_0) +$$

$$+F_0(f \otimes id_A) = D^2(f) = d^3(f)$$

Por otro lado,

$$[f_t, f_t]_n = \sum_{i+j=n} [F_i, F_j] = \sum_{i+j=n} F_i \circ F_j + F_j \circ F_i =$$

$$= 2 \sum_{i+j=n} F_i \circ F_j = 2 \sum_{i+j=n} F_i(F_j \otimes id_A - id_A \otimes F_j) = 2(\delta F_n - d^2(F_n))$$

Luego la condición de asociatividad se traduce en $[f_t, f_t]_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Dado que $f_t$ es un elemento homogéneo de grado uno, por Jacobi graduado se tiene:

$$[[f_t, f_t], f_t] = 0 \Longrightarrow 0 = [[f_t, f_t], f_t]_n = \sum_{i+j=n} [[f_t, f_t]_i, F_j] = \sum_{i+j=n} [2(\delta F_i - d^2(F_i)), F_j] =$$

$$= (\text{hipótesis}) = 2[\delta F_n - d^2(F_n), F_0] = 2d^3(\delta F_n - d^2(F_n)) = 2d^3(\delta F_n)$$

□

**Observación 2.2.7.** Si se tienen definidos $F_1, \ldots, F_{n-1}$, como en la proposición anterior, se puede construir $\delta F_n \in Z^3(A, A)$. En caso de que $\delta F_n$ sea un coborde ($\delta F_n = d^2 F$), por la condición de asociatividad (2.2.3), debe definirse $F_n := F$.
Con lo cual $\delta F_n$ es la obstrucción a continuar una familia definida hasta $F_{n-1}$.

**Definición 2.2.8.** Llamaremos la *primera obstrucción* a la integración de $F_1$ a $[\delta F_2]$ la clase cohomológica de $\delta F_2$.

**Corolario 2.2.9.** *Si $H^3(A, A) = 0$ cualquier $F_1 \in Z^2(A, A)$ será integrable*

*Demostración.* Sale del hecho de que todas las obstrucciones son nulas, luego, dado $F_1 \in Z^2(A, A)$ se tiene que $\delta F_2 = d^2 F$, ya que su clase cohomológica es cero. Defino $F_2 := F$. Luego dados, $F_1, \ldots, F_{n-1}$ se tiene que $\delta F_n = d^2 G$. Defino $F_n := G$.
De esta manera se construye $f_t := \sum t^i F_i^v$ asociativa.
Notar que todos los $F_i$ construidos quedan únicos salvo cobordes. □

## 2.3. Deformaciones Triviales

**Definición 2.3.1.** Una familia de deformaciones a un parámetro $g_t$ de un álgebra asociativa se dice *trivial* si existe $\Phi_t \in \mathrm{aut}_k(V^v)$ de la forma $\Phi_t = id_{V^v} + \sum_1^\infty t^i \varphi_i^v$ con $\varphi_i \in \mathrm{end}_k(V)$ tales que $g_t = \Phi_t^{-1}(F_0^v(\Phi_t \otimes \Phi_t))$. Recordar que $F_0^v$ es el producto original de $A$ extendido a $A^v$, o sea, es el producto trivial del álgebra $A^v = (V^v, F_0^v)$.

**Observación 2.3.2.** $(A_t, g_t) \xrightarrow{\Phi_t} A^v$ es un isomorfismo de álgebras ya que la condición $\Phi_t g_t = F_0^v(\Phi_t \otimes \Phi_t)$ afirma que es un morfismo de álgebras y al ser isomorfismo lineal, queda de álgebras.

**Observación 2.3.3.** Si $g_t := \Phi_t^{-1}(F_0^v(\Phi_t \otimes \Phi_t)) \Longrightarrow g_t(a,b) = F_0^v(a,b) + tG_1^v(a,b) + \ldots$ con $G_1 = d^1(\varphi_1)$. Esto sale del siguiente hecho:
Si $\Phi_t \equiv id + t\varphi_1 \mod (t^2) \Longrightarrow (\Phi_t)^{-1} \equiv id - t\varphi_1 \mod (t^2)$. Por otro lado
$\Phi_t(a)\Phi_t(b) \equiv (a + t\varphi_1(a))(b + t\varphi_1(b)) \equiv ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b) \mod (t^2) \Longrightarrow$
$\Phi_t^{-1}(F_0^v)(\Phi_t \otimes \Phi_t)))(a \otimes b) \equiv \Phi_t^{-1}(ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b)) \equiv$
$(id - t\varphi_1)(ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b)) \equiv ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b) - t\varphi_1(ab) \equiv$
$ab + t(a\varphi_1(b) - \varphi_1(ab) + \varphi_1(a)b) \equiv ab + td^1(\varphi_1)(a \otimes b) \mod (t^2) \Longrightarrow G_1 = d^1(\varphi_1)$

**Observación 2.3.4.** Más generalmente, dada una familia de deformaciones a un parámetro $f_t(a,b) = ab + tF_1^v(a,b)\ldots$ Definiendo $g_t := \Phi_t^{-1}(f_t(\Phi_t \otimes \Phi_t))$, se tiene que
$g_t(a,b) = ab + tG_1^v(a,b)\ldots$ con $G_1 = F_1 + d^1(\varphi_1)$
Nuevamente, $f_t(\Phi(a) \otimes \Phi(b)) \equiv \Phi(a)\Phi(b) + tF_1(\Phi(a) \otimes \Phi(b)) \equiv ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b) +$
$tF_1((a + t\varphi_1(a)) \otimes (b + t\varphi_1(b)) \equiv ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b) + tF_1(a \otimes b) + tF_1(a \otimes t\varphi_1(b)) +$
$tF_1(t\varphi_1(a) \otimes b) + tF_1(t\varphi_1(a) \otimes t\varphi_1(b)) \equiv ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b) + tF_1(a \otimes b) +$
$t^2F_1(a \otimes \varphi_1(b)) + t^2F_1(\varphi_1(a) \otimes b) + t^3F_1(\varphi_1(a) \otimes \varphi_1(b)) \equiv$
$ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b) + tF_1(a \otimes b) \equiv ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b + F_1(a \otimes b)) \mod (t^2) \Longrightarrow$
$\Phi_t^{-1}(f_t(\Phi_t \otimes \Phi_t))(a \otimes b) \equiv (id - t\varphi_1)(ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b + F_1(a \otimes b))) \equiv$
$ab + t(a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b + F_1(a \otimes b)) - t\varphi_1(ab) \equiv ab + t(d^1(\varphi_1) + F_1)(a \otimes b) \Longrightarrow$
$G_1 = F_1 + d^1(\varphi_1)$
Luego se deduce que la integrabilidad de un elemento $F_1 \in Z^2(A,A)$ depende sólo de su clase cohomológica. Por otro lado, si un elemento es integrable, cualquier otro perteneciente a su clase también lo será mediante este proceso dando lugar a álgebras isomorfas.
Por este hecho, se puede interpretar $H^2(A,A)$ como deformaciones infinitesimales del álgebra $A$.
Notar que si la deformación infinitesimal en una familia $f_t$ es cero, no quiere decir que la familia sea trivial. Puede empezar trivialmente y después cambiar.

**Definición 2.3.5.** Dos familias de deformaciones a un parámetro $f_t$ y $g_t$ se dicen *equivalentes* si existe $\Phi_t \in \mathrm{aut}_k(V^v)$ de la forma $\Phi_t = id + \sum_1^\infty t^i\varphi_i^v$ con $\varphi_i \in \mathrm{end}_k(V)$ tales que $\Phi_t g_t = f_t(\Phi_t \otimes \Phi_t)$.
Cuando $f_t$ es equivalente a la deformación identidad, $f_t \sim F_0^v$, se dice *trivial*.

**Observación 2.3.6.** Recordar la observación (2.2.4): dada $f_t$ familia a un parámetro de deformaciones de un álgebra $A$ tal que $F_1 = \ldots = F_{n-1} = 0 \Longrightarrow F_n \in Z^2(A,A)$.
Si a parte se tiene que $F_n \in B^2(A,A)$, o sea, $\exists\psi \in C^1(A,A)$ tal que $F_n = d^1(\psi)$, definiendo[1] $\Phi_t(a) := a - t^n\psi(a)$ se tiene que $\Phi_t^{-1}f_t(\Phi_t(a) \otimes \Phi_t(b)) = ab + t^{n+1}F'_{n+1}(a,b) + t^{n+2}F'_{n+2} + \ldots$
Ya que $f_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b)) \equiv f_t(a,b) - t^n f_t(a,\psi(b)) - t^n f_t(\psi(a),b) \equiv$
$ab + t^nF_n(a,b) - t^na\psi(b) - t^n\psi(a)b \mod (t^{n+1}) \Longrightarrow$
$(id + t^n\psi)(ab + t^n(F_n(a,b) - a\psi(b) - \psi(a)b)) \equiv$
$(ab + t^n(F_n(a,b) - a\psi(b) - \psi(a)b)) + t^n\psi(ab) \equiv ab \mod (t^{n+1})$
Luego, usando nuevamente (2.2.4) se obtiene que $F'_{n+1} \in Z^2(A,A)$ pero ahora, no necesariamente, es un coborde. En resumen se tiene:

**Proposición 2.3.7.** *Sea $f_t$ una familia de deformaciones a un parámetro de un álgebra $A$. Entonces, $f_t$ es equivalente a una familia $g_t(a,b) = ab + t^nG_n^v(a,b) + \ldots$ donde el primer término no-nulo $G_n$ es un 2-cociclo no cohomólogo a cero.*

[1]En el paper original está mal hecho. Define $1 + t^n\psi$

**Corolario 2.3.8.** *Si* $H^2(A, A) = 0 \Longrightarrow A$ *es rígida.*

**Ejemplo 2.3.9.** Las $k$-álgebras separables de dimensión finita tienen $H^n(A, A) = 0\ \forall n > 0$ ([25] pp.310), luego son rígidas. En particular ([25] pp.310) $A = M_n(k)$ es rígida.
Cuando veamos el espacio de Maurer-Cartan (o espacio de parámetros) para álgebras asociativas de dimensión finita (que es la variedad algebraica de todas ellas), veremos que cada álgebra rígida, representa una componente conexa de esta variedad algebraica.

# 3. Álgebras de Lie

**Resumen**

En esta sección ampliaremos el artículo [18]. Trataremos la teoría de deformaciones formales de álgebras de Lie, hablando de deformaciones triviales, obstrucciones y rigidez. Como en el caso asociativo, que se utiliza el complejo de Hochschild, aquí se utilizará el de Chevalley-Eilenberg ([25] pp.240).

## 3.1. Deformaciones infinitesimales

Las deformaciones formales de álgebras de Lie, como veremos, son esencialmente iguales a las de álgebras asociativas.
Considero $L$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo $k$ cuyo espacio vectorial subyacente es $V$ y corchete $F_0$. Consideremos $V^v \underset{k^v}{\otimes} V^v \xrightarrow{f_t} V^v$ expresable de la siguiente forma:

$$f_t = \sum_{i=0}^{\infty} t^i F_i^v$$

donde $F_i \in \hom_k(V \underset{k}{\otimes} V, V)$ y $F_0$ el corchete del álgebra de Lie $L$.
Para que $f_t$ sea un corchete, se necesita que sea antisimétrica y que cumpla Jacobi:

$$f_t(a \otimes b) = -f_t(b \otimes a)$$

$$f_t(f_t(a \otimes b) \otimes c) + f_t(f_t(b \otimes c) \otimes a) + f_t(f_t(c \otimes a) \otimes b) = 0$$

O en función de los $F_i$ estas condiciones son análogas a:

$$F_i(a \otimes b) = -F_i(b \otimes a) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geqslant 0}} F_i(F_j(a \otimes b) \otimes c) + F_i(F_j(b \otimes c) \otimes a) + F_i(F_j(c \otimes a) \otimes b) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La demostración de este hecho es como en el caso asociativo (2.1.3).
Para $n = 0$ afirma que $L$ es un álgebra de Lie.
Para $n = 1$ se tiene que

$$F_1(a \otimes b) = -F_1(b \otimes a)$$

y

$$F_1([a, b], c) + F_1([b, c], a) - F_1([a, c], b) - [a, F_1(b, c)] + [b, F_1(a, c)] - [c, F_1(a, b)] = 0$$

En otras palabras que $F_1$ sea un 2-cociclo del complejo de Chevalley-Eilenberg.

**Definición 3.1.1.** A la serie $f_t$ que cumple Jacobi y antisimetría se la llama *familia de deformaciones a un parámetro* de $F_0$, o simplemente *deformación formal* o *deformación.*

**Definición 3.1.2.** A $F_1$ se la llama *deformación infinitesimal* $F_0$, o también *primera derivada* de $f_t$.

### 3.2. Obstrucciones

Analicemos la condición de Jacobi en función de los $F_i$ para el corchete $f_t$. Notar que la antisimetría indica que los $F_i$ deben ser antisimétricos:

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 0}} = \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} + \sum_{i=0,j=n} + \sum_{i=n,j=0} = (\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}}) + F_0(F_n(a\otimes b)\otimes c) + F_0(F_n(b\otimes c)\otimes a) +$$

$$+F_0(F_n(c\otimes a)\otimes b) + F_n(F_0(a\otimes b)\otimes c) + F_n(F_0(b\otimes c)\otimes a) + F_n(F_0(c\otimes a)\otimes b) +$$

$$= (\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}}) + [F_n(a,b),c] + [F_n(b,c),a] + [F_n(c,a),b] + F_n([a,b],c) + F_n([b,c],a) + F_n([c,a],b)$$

$$= (\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}}) - [c,F_n(a,b)] - [a,F_n(b,c)] + [b,F_n(a,c)] + F_n([a,b],c) + F_n([b,c],a) - F_n([a,c],b)$$

$$= (\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}}) - d^2(F_n)$$

**Definición 3.2.1.**

$$(\delta F_n)(a\otimes b\otimes c) := \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} F_i(F_j(a\otimes b)\otimes c) + F_i(F_j(b\otimes c)\otimes a) + F_i(F_j(c\otimes a)\otimes b)$$

**Observación 3.2.2.** En caso de que se cumpla la condición de Jacobi para algún $n$, se tendrá que $\delta F_n = d^2(F_n)$. Y si se cumple $\forall n \geqslant 2$ se tendrá que $f_t$ es un corchete de Lie. (Recordar que los $F_i$ deben ser antisimétricos y $d^2(F_1)=0$).

**Proposición 3.2.3.** $d^2(F_1) = \delta F_2 - d^2(F_2) = \ldots = \delta F_{n-1} - d^2(F_{n-1}) = 0 \Longrightarrow$ $\delta F_n \in Z^3(L,L)$

*Demostración.* Nuevamente, aclaro que esta demostración, al igual que todas las proposiciones análogas a ésta, son un caso particular de 11.4.
Se le puede asignar una estructura de álgebra de Lie graduada diferencial al complejo de Chevalley-Eilenberg.
Sea $L$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo $k$ de característica 0. Considero

$$C^{\bullet}(L,L) := \bigoplus_{n\geqslant 0} \hom_k(\bigwedge^{n+1} L, L)[-n]$$

El diferencial es el de Chevalley-Eilenberg corrido en uno ($D^n = d^{n+1}$) y el corchete: dados $f,g$ homogéneos, se define $[f,g] := f\wedge g - (-1)^{\overline{f}\overline{g}} g\wedge f$ donde $\wedge$ está definido por[2]

$$(f\wedge g)(a_0\wedge\ldots\wedge a_{\overline{f}+\overline{g}}) := \sum_{\eta} sgn(\eta) f(g(a_{\eta(0)}\wedge\ldots\wedge a_{\eta(\overline{g})})\wedge a_{\eta(\overline{g}+1)}\wedge\ldots\wedge a_{\eta(\overline{f}+\overline{g})})$$

[2]En el paper original está mal. Evalúa $deg(f)$ datos en $g$

Donde la suma se toma sobre todas las permutaciones $\eta$ tales que
$\eta(0) < \ldots < \eta(\overline{g})$ y $\eta(\overline{g}+1) < \ldots < \eta(\overline{f}+\overline{g})$. O sea, $(\overline{g}, \overline{f})$-shuffles.
Con esta estructura se tiene un álgebra de Lie diferencial graduada [17].
Veamos que si $f$ tiene grado dos, o sea, $\bigwedge^3 L \xrightarrow{f} L$ (alternada), resulta $[f, F_0] = -d^3(f)$.
Recordar primero que $F_0$ tiene grado uno, luego,

$$[f, F_0] = f \wedge F_0 - F_0 \wedge f \Longrightarrow (f \wedge F_0)(a,b,c,d) =$$

$$= f([a,b],c,d) - f([a,c],b,d) + f([a,d],b,c) + f([b,c],a,d) - f([b,d],a,c) + f([c,d],a,b)$$

Las permutaciones $\eta$ posibles (y usadas) para este cálculo fueron aquellas $(2,2)$-shuffles que tienen como imagen:

$$+(0,1,2,3), -(0,2,1,3), +(0,3,1,2), +(1,2,0,3), -(1,3,0,2), +(2,3,0,1)$$

Por otro lado,

$$(F_0 \wedge f)(a,b,c,d) = -[f(b,c,d),a] + [f(a,c,d),b] - [f(a,b,d),c] + [f(a,b,c),d]$$

En este caso las permutaciones fueron los $(3-1)$-shuffles:

$$-(1,2,3,0), +(0,2,3,1), -(0,1,3,2), +(0,1,2,3)$$

Juntando todo, se obtiene $[f, F_0] = -d^3(f)$.
Por otro lado,

$$[f_t, f_t]_n = \sum_{i+j=n} [F_i, F_j] = \sum_{i+j=n} F_i \wedge F_j + F_j \wedge F_i = 2 \sum_{i+j=n} F_i \wedge F_j =$$

$$= 2 \sum_{i+j=n} F_i(F_j(a,b),c) + F_i(F_j(b,c),a) + F_i(F_j(c,a),b) = 2(\delta F_n - d^2(F_n))$$

Luego la condición de Lie se traduce en $[f_t, f_t]_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Dado que $f_t$ es un elemento homogéneo de grado uno, por Jacobi graduado se tiene

$$[[f_t, f_t], f_t] = 0 \Longrightarrow 0 = [[f_t, f_t], f_t]_n = \sum_{i+j=n} [[f_t, f_t]_i, F_j] =$$

$$= \sum_{i+j=n} [2(\delta F_i - d^2(F_i)), F_j] = (\text{hipótesis}) =$$

$$= 2[\delta F_n - d^2(F_n), F_0] = -2d^3(\delta F_n - d^2(F_n)) = -2d^3(\delta F_n)$$

□

**Observación 3.2.4.** Si se tienen definidos $F_1, \ldots, F_{n-1}$, como en la proposición anterior, se puede construir $\delta F_n \in Z^3(L, L)$. En caso de que $\delta F_n$ sea un coborde ($\delta F_n = d^2 F$), por la condición de Lie, debe definirse $F_n := F$.
Con lo cual $\delta F_n$ es la obstrucción a continuar una familia definida hasta $F_{n-1}$.

**Definición 3.2.5.** Llamaremos la *primera obstrucción* a la integración de $F_1$ a $[\delta F_2]$ la clase cohomológica de $\delta F_2$.

**Corolario 3.2.6.** *Si* $H^3(L,L)=0$ *cualquier* $F_1 \in Z^2(L,L)$ *será integrable*

*Demostración.* Sale del hecho de que todas las obstrucciones son nulas, luego, dado $F_1 \in Z^2(L,L)$ se tiene que $\delta F_2 = d^2F$ ya que su clase cohomológica es cero. Defino $F_2 := F$. Luego dados, $F_1,\dots,F_{n-1}$ se tiene que $\delta F_n = d^2G$. Defino $F_n := G$. De esta manera se construye $f_t := \sum t^i F_i^v$ corchete.
Notar que todos los $F_i$ construidos quedan únicos salvo cobordes. □

## 3.3. Deformaciones Triviales

**Definición 3.3.1.** Una familia de deformaciones a un parámetro $g_t$ de un álgebra de Lie se dice *trivial* si existe $\Phi_t \in \mathrm{aut}_k(V^v)$ de la forma $\Phi_t = id + \sum_1^\infty t^i\varphi_i^v$ con $\varphi_i \in \mathrm{end}_k(V)$ tales que $g_t = \Phi_t^{-1}(F_0^v(\Phi_t \otimes \Phi_t))$.

**Observación 3.3.2.** Notar que en caso de que $g_t$ sea trivial se tiene que $(L_t, g_t) \xrightarrow{\Phi_t} L^v = (V^v, F_0^v)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie ya que la condición $\Phi_t g_t = F_0^v(\Phi_t \otimes \Phi_t)$ afirma que es un morfismo de álgebras de Lie y al ser isomorfismo lineal, queda también de álgebras.

**Observación 3.3.3.** Dada una familia de deformaciones a un parámetro $f_t(a,b) = [a,b] + tF_1^v(a,b) + \dots$ Definiendo $g_t := \Phi_t^{-1}(f_t(\Phi_t \otimes \Phi_t))$, se tiene que $g_t(a,b) = [a,b] + tG_1^v(a,b) + \dots$ con $G_1 = F_1 + d^1(\varphi_1)$
Esto es pues

$$f_t(\Phi(a)\otimes\Phi(b)) \equiv [\Phi(a),\Phi(b)] + tF_1(\Phi(a)\otimes\Phi(b)) \equiv$$
$$[a,b] + t([a,\varphi_1(b)] + [\varphi_1(a),b]) + tF_1((a+t\varphi_1(a)),(b+t\varphi_1(b)) \equiv$$
$$[a,b] + t([a,\varphi_1(b)] + [\varphi_1(a),b]) + tF_1(a,b) + tF_1(a,t\varphi_1(b)) +$$
$$+tF_1(t\varphi_1(a),b) + tF_1(t\varphi_1(a),t\varphi_1(b)) \equiv [a,b] + t([a,\varphi_1(b)] + [\varphi_1(a),b]) + tF_1(a,b) +$$
$$+t^2F_1(a,\varphi_1(b)) + t^2F_1(\varphi_1(a),b) + t^3F_1(\varphi_1(a),\varphi_1(b)) \equiv [a,b] + t([a,\varphi_1(b)] + [\varphi_1(a),b]) +$$
$$+tF_1(a,b) \equiv [a,b] + t([a,\varphi_1(b)] + [\varphi_1(a),b] + F_1(a,b)) \mod (t^2) \Longrightarrow$$
$$\Phi_t^{-1}(f_t(\Phi_t\otimes\Phi_t))(a\otimes b) \equiv (id - t\varphi_1)([a,b] + t([a,\varphi_1(b)] + [\varphi_1(a),b] + F_1(a,b))) \equiv$$
$$[a,b] + t([a,\varphi_1(b)] + [\varphi_1(a),b] + F_1(a,b)) - t\varphi_1([a,b]) \equiv [a,b] + t(d^1(\varphi_1) + F_1)(a\otimes b)$$
$$\Longrightarrow G_1 = F_1 + d^1(\varphi_1)$$

Luego se deduce que la integrabilidad de un elemento $F_1 \in Z^2(L,L)$ depende sólo de su clase cohomológica. Por otro lado, si un elemento es integrable, cualquier otro perteneciente a su clase también lo será dando lugar, mediante este proceso, a álgebras isomorfas.
Por este hecho, se puede interpretar $H^2(L,L)$ como deformaciones infinitesimales del álgebra $L$.
Notar que si la deformación infinitesimal en una familia $f_t$ es cero, no quiere decir que la familia sea trivial. Puede empezar trivialmente y después cambiar.

**Definición 3.3.4.** Dos familias de deformaciones a un parámetro $f_t$ y $g_t$ se dicen *equivalentes* si existe $\Phi_t \in \mathrm{aut}_k(V^v)$ de la forma $\Phi_t = id + \sum_1^\infty t^i\varphi_i^v$ con $\varphi_i \in \mathrm{end}_k(V)$ tales que $\Phi_t g_t = f_t(\Phi_t \otimes \Phi_t)$.
Cuando $f_t$ es equivalente a la deformación identidad, $f_t \sim F_0^v$, se dice *trivial* como ya lo hemos definido antes en 3.3.1.

**Observación 3.3.5.** Recordar que si se tiene $f_t$ familia a un parámetro de deformaciones de un álgebra $L$ tal que $F_1 = \ldots = F_{n-1} = 0 \Longrightarrow F_n \in Z^2(L,L)$.
Si a parte se tiene que $F_n \in B^2(L,L)$, o sea, $\exists \psi \in C^1(L,L)$ tal que $F_n = d^1(\psi)$, definiendo $\Phi_t(a) := a - t^n\psi(a)$ se tiene que $\Phi_t^{-1} f_t(\Phi_t(a) \otimes \Phi_t(b)) = ab + t^{n+1}F'_{n+1}(a,b) + t^{n+2}F'_{n+2} + \ldots$.
Ya que $f_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b)) \equiv f_t(a,b) - t^n f_t(a,\psi(b)) - t^n f_t(\psi(a),b) \equiv$
$[a,b] + t^n F_n(a,b) - t^n[a,\psi(b)] - t^n[\psi(a),b] \mod (t^{n+1}) \Longrightarrow$
$(id + t^n\psi)([a,b] + t^n(F_n(a,b) - [a,\psi(b)] - [\psi(a),b])) \equiv$
$([a,b] + t^n(F_n(a,b) - [a,\psi(b)] - [\psi(a),b])) + t^n\psi([a,b]) \equiv [a,b] \mod (t^{n+1})$
Con lo cual, dado que en esta deformación equivalente los primeros $n$ términos son nulos, se obtiene que $F'_{n+1} \in Z^2(L,L)$ pero ahora, no necesariamente, es un coborde. En resumen se tiene:

**Proposición 3.3.6.** *Sea $f_t$ una familia de deformaciones a un parámetro de un álgebra $L$. Entonces, $f_t$ es equivalente a una familia $g_t(a,b) = [a,b] + t^n G_n^v(a,b) + \ldots$ donde el primer término no-nulo $G_n$ es un 2-cociclo no cohomólogo a cero.*

**Corolario 3.3.7.** *Si $H^2(L,L) = 0 \Longrightarrow L$ es rígida.*

**Ejemplo 3.3.8.** Las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero son rígidas ([25] pp.246).

# 4. Morfismos de álgebras asociativas

**Resumen**

En esta sección trataré la teoría de deformaciones formales de morfismos de álgebras asociativas. Esta sección la hice generalizando el artículo [26]. Lo que se hará es extender los escalares de las dos álgebras (del dominio y del codominio) dejando libertad para poder definir un morfismo "formal" entre éstas, o sea, se define una serie formal de potencias bajo la condición de que sea morfismo: que mande productos en productos. Con esta simple condición se obtiene información suficiente para poder definir obstrucciones, deformaciones triviales y luego, el teorema de rigidez. Utilizaremos nuevamente el complejo de Hochschild ([25] pp.301)

## 4.1. Deformaciones infinitesimales

Sean $A$ y $B$ dos $k$-álgebras asociativas, y sea $A \xrightarrow{f_0} B$ un morfismo de álgebras. Notar que puede verse a $B$ como un $A$-bimódulo vía el morfismo $f_0$, definamos $a \cdot b := f_0(a)b$ y $b \cdot a := bf_0(a)$.
Veamos que se tienen dos estructuras de módulos (a izquierda y a derecha) compatibles, o sea, $a(ba') = (ab)a'$.
Empecemos por la izquierda, (a derecha es igual):

- $1 \cdot b = f_0(1)b = 1b = b$.
- $(aa') \cdot b = f_0(aa')b = f_0(a)f_0(a')b = a \cdot (a' \cdot b)$.
- $(a + a') \cdot b = f_0(a + a')b = f_0(a)b + f_0(a')b = a \cdot b + a' \cdot b$.
- $a \cdot (b + b') = f_0(a)(b + b') = f_0(a)b + f_0(a)b' = a \cdot b + a \cdot b'$.

Por último corroboremos que las dos estructuras son compatibles, lo cual es bastante sencillo ya que el producto de $B$ es asociativo:
$a(ba') = f_0(a)(bf_0(a')) = (f_0(a)b)f_0(a') = (ab)a'$.

**Definición 4.1.1.** Una deformación formal de $f_0$ es una serie de potencias formal, definida por

$$f_t = f_0^v + \sum_{1}^{\infty} t^i f_i^v$$

con $f_i \in \hom_k(A, B)$ tal que $f_t(\mu_A^v) = \mu_B^v(f_t \otimes f_t)$ donde $\mu_A$ y $\mu_B$ son los respectivos productos de $A$ y de $B$.

**Observación 4.1.2.** Notar que los productos de $A$ y de $B$ quedan fijos, o dicho en el contexto de deformaciones, sólo se está deformando el morfismo $f_0$. Si uno desea deformar también $A$ ó $B$, la condición a analizar debe ser $f_t(\mu_{A,t}) = \mu_{B,t}(f_t \otimes f_t)$.

**Observación 4.1.3.** La propiedad multiplicativa puede expresarse en función de los $f_i$ de la siguiente manera:

$$f_n(aa') = \sum_{i+j=n} f_i(a)f_j(a')$$

ya que

$$0 = f_t(aa') - f_t(a)f_t(a') = \sum_n t^n f_n^v(aa') - (\sum_i t^i f_i^v(a))(\sum_j t^j f_j^v(a')) =$$

$$= \sum_n t^n f_n^v(aa') - \sum_i \sum_j t^{i+j} f_i^v(a) f_j^v(a') = \sum_n t^n (\sum_{i+j=n} f_n(aa') - f_i(a)f_j(a'))^v$$

**Observación 4.1.4.** Cuando $n = 0$ queda exactamente que $f_0$ es un morfismo de álgebras. Para $n = 1$ se obtiene $f_1(aa') = f_0(a)f_1(a') + f_1(a)f_0(a')$ o equivalentemente que $d^1(f_1) = 0$, un 1-cociclo del complejo de Hochschild $\hom_k(A^{\otimes \bullet}, B)$ viendo a $B$ como un $A$-bimódulo vía $f_0$.
Recordar que $f_1(aa') = f_0(a)f_1(a') + f_1(a)f_0(a')$ es equivalente a escribir $f_1(aa') = a \cdot f_1(a') + f_1(a) \cdot a'$, o sino, más simplemente $d^1(f_1) = 0$.

**Definición 4.1.5.** Llamaremos *deformación infinitesimal* de $f_0$ a $f_1$, o también *primera derivada* de la familia $f_t$.

## 4.2. Obstrucciones

**Observación 4.2.1.** Analicemos la propiedad multiplicativa:

$$0 = \sum_{i+j=n} f_i(a)f_j(a') - f_n(aa') = (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}) + (\sum_{i=0,j=n}) + (\sum_{i=n,j=0}) - f_n(aa')$$

$$= (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}) + af_n(a') + f_n(a)a' - f_n(aa') = (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}) + d^1(f_n)(a \otimes a')$$

**Definición 4.2.2.** Definamos el primer término de la igualdad como:

$$\delta f_n(a \otimes a') := \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} f_i(a)f_j(a')$$

**Observación 4.2.3.** Notar que en caso de que la propiedad multiplicativa valga $\forall n \in \mathbb{N}$, se tendrá que
$d^1(f_1) = 0$ y $d^1(f_n) = -\delta f_n \quad (n \geqslant 2)$

**Proposición 4.2.4.** $d^1(f_1) = \delta f_2 + d^1(f_2) = \ldots = \delta f_{n-1} + d^1(f_{n-1}) = 0 \Longrightarrow$
$\delta f_n \in Z^2(A, B)$

*Demostración.*

$$d^2(\delta f_n)(a,b,c) = a \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} f_i(b)f_j(c) - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} f_i(ab)f_j(c) + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} f_i(a)f_j(bc) - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} f_i(a)f_j(b)c$$

$$= a \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} f_i(b)f_j(c) - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} (\sum_{l+m=i} f_l(a)f_m(b))f_j(c)$$

$$+\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} f_i(a)(\sum_{l+m=j} f_l(b)f_m(c)) - \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} f_i(a)f_j(b)c$$

Analicemos primero el renglón del medio: notar que para $l = 0$, $m = i$ se simplifica, dejando sólo

$$-\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} (\sum_{\substack{l+m=i\\ l>0}} f_l(a)f_m(b))f_j(c) = -\sum_{\substack{j,l,m=n\\ j,l,m>0}} f_l(a)f_m(b)f_j(c)$$

Con el tercer renglón pasa lo mismo; para $l = j$, $m = 0$ se simplifica dejando:

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} f_i(a)(\sum_{\substack{l+m=j\\ m>0}} f_l(b)f_m(c)) = \sum_{\substack{i,l,m=n\\ i,l,m>0}} f_i(a)f_l(b)f_m(c)$$

Luego, $d^2(\delta f_n) = 0$. □

**Observación 4.2.5.** Si se tiene $f_1 \dots f_{n-1}$ como en la proposición anterior uno puede construir $\delta f_n$. Si es un coborde ($\delta f_n = d^2(g)$), tomando $f_n := -g$ se tiene una deformación de orden $n$.
De esta manera, $\delta f_n$ es la obstrucción a definir una familia de orden $n$ dado que se tiene una de orden $n-1$.

**Corolario 4.2.6.** *Si $H^2(A, B) = 0$ cualquier 1-cociclo es integrable.*

## 4.3. Deformaciones Triviales

En esta sección hablaremos de rigidez de $f_0$, para esto necesitaremos definir una noción de equivalencia entre deformaciones. Si bien la definición que daré no es la más natural (al menos para mí), la elegí para que sea acorde con la teoría de Hochschild, en otras palabras así se tendrá $H^1 = 0$ [3] implica rigidez.

**Definición 4.3.1.** Un *automorfismo formal* de $f_t$ es un elemento en $B^v$ de la forma:

$$b_t = 1_B + \sum_1^\infty t^i b_i$$

**Definición 4.3.2.** Dos deformaciones $f_t$, $g_t$ se dirán equivalentes ($f_t \sim g_t$) si existe un automorfismo formal $b_t$ tal que $b_t g_t(a) = f_t(a) b_t$ $\forall a \in A$. En otras palabras que $g_t(a)$ y $f_t(a)$ sean conjugados.
Cuando $g_t \sim f_0^v$ se dice que $g_t$ es *trivial.*

**Observación 4.3.3.** Si $f_t$ es una deformación de $f_0$ y $b_t$ un automorfismo formal, entonces $g_t(a) := b_t^{-1} f_t(a) b_t$ define una deformación de $f_0$, o sea, tiene la propiedad multiplicativa, pues $g_t(aa') = b_t^{-1} f_t(aa') b_t = b_t^{-1} f_t(a) f_t(a') b_t = b_t^{-1} f_t(a) b_t b_t^{-1} f_t(a') b_t = g_t(a) g_t(a')$

[3] La filosofía general [22] dice que cuando se trata de morfismos, $H^1 = 0$ implica rigidez, pero cuando se trata de estructuras es $H^2 = 0$

**Observación 4.3.4.** Dada una deformación $f_t$ ya vimos que $f_1$ es un 1-cociclo (4.1.4). Más aún, dada $g_t \sim f_t$ se tiene que $g_1 - f_1$ es un 1-coborde.
Sale del siguiente hecho: $(1 - tb_1)(f_0 + tf_1)(1 + tb_1) \equiv (1 - tb_1)(f_0 + tf_1 + tf_0b_1) \equiv f_0 + tf_1 + tf_0b_1 - tb_1f_0 \equiv f_0 + t(f_1 + f_0b_1 - b_1f_0) \mod (t^2)$.
Recordar que $\hom(A^{\otimes 0}, B)$ se define como $B$ en la teoría de Hochschild, luego $g_1 - f_1 = f_0b_1 - b_1f_0 = d^0(b_1)$ un 1-coborde.

**Observación 4.3.5.** Dada una familia $f_t = f_0 + t^n f_n + \dots$ se tiene que $f_n$ es un 1-cociclo (4.1.3). Si también es un 1-coborde, existe una deformación equivalente de grado $n+1$: Sea $b_t = 1 - t^n b$ donde $d^0(b) = f_n$, entonces, $b_t^{-1} f_t b_t \equiv (1 + t^n b)(f_0 + t^n f_n)(1 - t^n b) \equiv (1 + t^n b)(f_0 + t^n f_n - t^n f_0 b) \equiv f_0 + t^n f_n - t^n f_0 b + t^n b f_0 \equiv f_0 + t^n(f_n - (f_0 b - b f_0)) \equiv f_0 + t^n(f_n - d^0(b)) \equiv f_0 \mod (t^n)$
Luego se tiene lo siguiente:

**Proposición 4.3.6.** *Dada $f_t$ deformación de $f_0$, existe $g_t \sim f_t$ tal que el primer término no nulo es no-cohomólogo a cero.*

**Corolario 4.3.7.** $H^1(A, B) = 0 \Longrightarrow A \xrightarrow{f_0} B$ *es rígido.*

# 5. Módulos

**Resumen**

En esta sección trataré la teoría de deformaciones formales de módulos. Lo que se hace es deformar (formalmente) el morfismo estructural del módulo. Básicamente es una aplicación de la sección anterior, pero a pesar de eso, tiene importancia por sí misma. Esta sección sigue el artículo [26].

## 5.1. Deformaciones infinitesimales

Sea $A$ un álgebra sobre un cuerpo $k$, no necesariamente de dimensión finita y sea $M$ un $A$-módulo a izquierda. Definir una deformación formal de la estructura de módulo sobre $M$ va a significar deformar el morfismo estructural de $M$, $A \xrightarrow{\xi_0} \mathrm{end}_k(M)$. Si bien esta construcción es un caso particular de las deformaciones de morfismos de $k$-álgebras asociativas, sigue siendo un caso importante para analizar.

**Definición 5.1.1.** Una deformación formal de $M$ es una serie de potencias formal, definida por

$$\xi_t = \xi_0^v + \sum_1^\infty t^i \xi_i^v$$

donde $\xi_i \in \hom_k(A, \mathrm{end}_k(M))$ morfismos $k$-lineales y tal que

$$\xi_t(ab) = \xi_t(a)\xi_t(b) \quad \forall a, b \in A$$

**Observación 5.1.2.** La propiedad multiplicativa puede expresarse en función de los $\xi_i$ de la siguiente manera:

$$\xi_n(ab) = \sum_{i+j=n} \xi_i(a)\xi_j(b)$$

**Observación 5.1.3.** Cuando $n = 0$ queda exactamente que $\xi_0$ es multiplicativa
Para $n = 1$ se obtiene $\xi_1(ab) = \xi_0(a)\xi_1(b) + \xi_1(a)\xi_0(b)$ o equivalentemente que $d^1(\xi_1) = 0$, un 1-cociclo del complejo de Hochschild $\hom_k(A^{\otimes \bullet}, \mathrm{end}_k(M))$.

**Definición 5.1.4.** Llamaremos *deformación infinitesimal* del módulo $M$ (o del morfismo $\xi_0$) a $\xi_1$.

## 5.2. Obstrucciones

**Observación 5.2.1.** Analicemos la propiedad multiplicativa:

$$0 = \sum_{i+j=n} \xi_i(a)\xi_j(b) - \xi_n(ab) = \Big(\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}\Big) + \Big(\sum_{i=0,j=n}\Big) + \Big(\sum_{i=n,j=0}\Big) - \xi_n(ab)$$

$$= \Big(\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}\Big) + a\xi_n(b) + \xi_n(a)b - \xi_n(ab) = \Big(\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}\Big) + d^1(\xi_n)(a \otimes b)$$

**Definición 5.2.2.** Definamos el primer término de la igualdad como:

$$\delta\xi_n := \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \xi_i(a)\xi_j(b)$$

**Observación 5.2.3.** Notar que en caso de que la propiedad multiplicativa valga $\forall n \in \mathbb{N}$, se tendrá que $d^1(\xi_1) = 0$ y $d^1(\xi_n) = -\delta\xi_n \quad (n \geqslant 2)$

**Proposición 5.2.4.** $d^1(\xi_1) = \delta\xi_2 + d^1(\xi_2) = \ldots = \delta\xi_{n-1} + d^1(\xi_{n-1}) = 0 \Longrightarrow$
$\delta\xi_n \in Z^2(A, end_k(M))$

*Demostración.*

$$d^2(\delta\xi_n)(a,b,c) = a\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \xi_i(b)\xi_j(c) - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \xi_i(ab)\xi_j(c) + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \xi_i(a)\xi_j(bc) - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \xi_i(a)\xi_j(b)c$$

$$= a\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \xi_i(b)\xi_j(c) - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} (\sum_{l+m=i} \xi_l(a)\xi_m(b))\xi_j(c)$$

$$+ \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \xi_i(a)(\sum_{l+m=j} \xi_l(b)\xi_m(c)) - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \xi_i(a)\xi_j(b)c$$

Analicemos primero el segundo renglón: notar que para $l = 0$, $m = i$ se simplifica, dejando sólo

$$-\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} (\sum_{\substack{l+m=i \\ l>0}} \xi_l(a)\xi_m(b))\xi_j(c) = -\sum_{\substack{j,l,m=n \\ j,l,m>0}} \xi_l(a)\xi_m(b)\xi_j(c)$$

Con el tercer renglón pasa lo mismo; para $l = j$, $m = 0$ se simplifica dejando:

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \xi_i(a)(\sum_{\substack{l+m=j \\ m>0}} \xi_l(b)\xi_m(c)) = \sum_{\substack{i,l,m=n \\ i,l,m>0}} \xi_i(a)\xi_l(b)\xi_m(c)$$

Luego, $d^2(\delta\xi_n) = 0$. □

**Observación 5.2.5.** Si se tiene $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ como en la proposición anterior, uno puede construir $\delta\xi_n$. Si es un coborde ($\delta\xi_n = d^2(-\zeta)$), tomando $\xi_n := \zeta$ se tiene una deformación de orden $n$.
De esta manera, $\delta\xi_n$ es la obstrucción a definir una familia de orden $n$ dado que se tiene una de orden $n-1$.

**Corolario 5.2.6.** *Si $H^2(A, end_k(M)) = 0$ cualquier 1-cociclo es integrable.*

### 5.3. Deformaciones Triviales

**Definición 5.3.1.** Un *automorfismo formal* de $M$ es una serie formal de potencias

$$\Phi_t = 1_{M^v} + \sum_1^\infty t^i \phi_i^v$$

donde cada $\phi_i \in \mathrm{end}_k(M)$.

**Definición 5.3.2.** Dos deformaciones $\xi_t$, $\zeta_t$ se dirán equivalentes ($\xi_t \sim \zeta_t$) si existe un automorfismo formal $\Phi_t$ tal que $\Phi_t \zeta_t(a) = \xi_t(a)\Phi_t$, $\forall a \in A$. En otras palabras que los módulos obtenidos deformando sean isomorfos.
Cuando $\zeta_t \sim \xi_0^v$ se dice que $\zeta_t$ es trivial.

**Observación 5.3.3.** Si $\xi_t$ es una deformación formal de $M$ y $\Phi_t$ un automorfismo formal, entonces $\zeta_t(a) := \Phi_t^{-1}\xi_t(a)\Phi_t$ define una deformación formal de $M$, o sea, tiene la propiedad multiplicativa, pues
$\zeta_t(ab) = \Phi_t^{-1}\xi_t(ab)\Phi_t = \Phi_t^{-1}\xi_t(a)\xi_t(b)\Phi_t = \Phi_t^{-1}\xi_t(a)\Phi_t\Phi_t^{-1}\xi_t(b)\Phi_t = \zeta_t(a)\zeta_t(b)$

**Observación 5.3.4.** Dada $\xi_t$ una deformación formal de $M$, ya vimos que
$\xi_1$ es un 1-cociclo.
Más aún, dada $\zeta_t \sim \xi_t$ se tiene que $\zeta_1 - \xi_1$ es un 1-coborde.
Sale del siguiente hecho: $(id - t\phi_1)(\xi_0 + t\xi_1)(id + t\phi_1) \equiv \xi_0 + t(\xi_1 + \xi_0\phi_1 - \phi_1\xi_0) \mod (t^2)$

**Observación 5.3.5.** Dada una familia $\xi_t = \xi_0 + t^n\xi_n + \dots$ se tiene que $\xi_n$ es un 1-cociclo (5.1.2). Si también es un 1-coborde, existe una deformación equivalente de grado $n+1$:
Sea $\Phi_t = id - t^n\psi$ con $\xi_n = d^0(\psi)$, entonces, $\Phi_t^{-1}\xi_t\Phi_t \equiv (id + t^n\psi)(\xi_0 + t^n\xi_n)(id - t^n\psi) \equiv \xi_0 + t^n(\xi_n - (\xi_0\psi - \psi\xi_0)) \equiv \xi_0 + t^n(\xi_n - d^0(\psi)) \equiv \xi_0 \mod (t^n)$
Luego se tiene lo siguiente:

**Proposición 5.3.6.** *Dada $\xi_t$ deformación de $M$, entonces existe $\zeta_t \sim \xi_t$ tal que el primer termino no nulo es no-cohomólogo a cero.*

**Corolario 5.3.7.** $H^1(A, end_k(M)) = 0 \Longrightarrow M$ *es rígido.*

**Observación 5.3.8.** Si bien los grupos cohomológicos para el caso de deformaciones formales de módulos parecen un poco extraños, un resultado ([25] pp.306) afirma que $H^n(A, \mathrm{end}_k(M)) \cong ext^n_{A/k}(M, M)$.

# 6. Morfismos de álgebras de Lie

**Resumen**

En esta sección trataré la teoría de deformaciones formales de morfismos de álgebras Líe. A pesar de que el tratamiento es similar al de álgebras asociativas me fue bastante complicado realizarlo, más aún llegar al teorema de rigidez. Aunque no será tratado explícitamente, notar que de esta sección se desprenden las deformaciones formales de representaciones de álgebras de Lie.

## 6.1. Deformaciones infinitesimales

Sean $A$ y $B$ dos $k$-álgebras de Lie y sea $A \xrightarrow{f_0} B$ un morfismo de álgebras. Notar que puede verse a $B$ como un $A$-bimódulo vía el morfismo $f_0$, definiendo $a \cdot b := [f_0(a), b]$.

**Definición 6.1.1.** Una deformación formal de $f_0$ es una serie de potencias formal, definida por

$$f_t = f_0 + \sum_1^\infty t^i f_i^v$$

con $f_i \in \hom_k(A, B)$ tal que $f_t([-,-]_A^v) = [f_t, f_t]_B^v$ donde los corchetes son, respectivamente, los extendidos de $A$ y de $B$.

**Observación 6.1.2.** Notar que los corchetes de $A$ y de $B$ quedan fijos, o dicho en el contexto de deformaciones, sólo se está deformando el morfismo $f_0$. Si uno desea deformar también $A$ ó $B$, la condición a analizar debe ser $f_t([-,-]_{A,t}) = [f_t, f_t]_{B,t}$.

**Observación 6.1.3.** La propiedad de morfismo de Lie puede expresarse en función de los $f_i$ de la siguiente manera:

$$f_n([a, a']) = \sum_{i+j=n} [f_i(a), f_j(a')]$$

ya que $0 = f_t([a, a']) - [f_t(a), f_t(a')] = \sum_n t^n f_n([a, a']) - [\sum_i t^i f_i(a), \sum_j t^j f_j(a')] = \sum_n t^n f_n([a, a']) - \sum_i \sum_j t^{i+j} [f_i(a), f_j(a')] = \sum_n t^n \sum_{i+j=n} f_n([a, a']) - [f_i(a), f_j(a')]$.

**Observación 6.1.4.** Cuando $n = 0$ queda exactamente que $f_0$ es un morfismo de álgebras de Lie.
Para $n = 1$ se obtiene $f_1([a, a']) = [f_0(a), f_1(a')] + [f_1(a), f_0(a')] = a \cdot f_1(a') - a' \cdot f_1(a)$, o equivalentemente que $d^1(f_1) = 0$, un 1-cociclo del complejo de Chevalley-Eilenberg $\hom_k(\bigwedge^\bullet A, B)$ viendo a $B$ como un $A$-bimódulo vía $f_0$.

**Definición 6.1.5.** Llamaremos *deformación infinitesimal* de $f_0$ a $f_1$, o también *primera derivada* de la familia $f_t$.

## 6.2. Obstrucciones

**Observación 6.2.1.** Analicemos la propiedad de morfismo de Lie:

$$0 = \sum_{i+j=n} [f_i(a), f_j(a')] - f_n([a, a']) = (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}) + (\sum_{i=0, j=n}) + (\sum_{i=n, j=0}) - f_n([a, a'])$$

$$= (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}) + af_n(a') - a'f_n(a) - f_n([a,a']) = (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}) + d^1(f_n)(a \otimes a')$$

**Definición 6.2.2.** Definamos el primer término de la igualdad como:

$$\delta f_n(a \otimes a') := \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [f_i(a), f_j(a')]$$

**Observación 6.2.3.** Notar que en caso de que la propiedad de morfismo de Lie valga $\forall n \in \mathbb{N}$, se tendrá que
$d^1(f_1) = 0$ y $d^1(f_n) = -\delta f_n \quad (n \geqslant 2)$

**Proposición 6.2.4.** $d^1(f_1) = \delta f_2 + d^2(f_2) = \ldots = \delta f_{n-1} + d^2(f_{n-1}) = 0 \Longrightarrow$
$\delta f_n \in Z^2(A, B)$

*Demostración.* Recordar que $(d^2 g)(a,b,c) = ag(b,c) - bg(a,c) + cg(a,b) - g([a,b],c) + g([a,c],b) - g([b,c],a)$.
También notar que gracias a Jacobi se tiene que $a \cdot [b,c] = [a \cdot b, c] + [b, a \cdot c]$.

$$d^2(\delta f_n)(a,b,c) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} a[f_i(b), f_j(c)] - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} b[f_i(a), f_j(c)] + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} c[f_i(a), f_j(b)]$$

$$- \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [f_i([a,b]), f_j(c)] + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [f_i([a,c]), f_j(b)] - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [f_i([b,c]), f_j(a)] =$$

$$= \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [af_i(b), f_j(c)] + [f_i(b), af_j(c)] - [bf_i(a), f_j(c)] - [f_i(a), bf_j(c)] + [cf_i(a), f_j(b)] + [f_i(a), cf_j(b)]$$

$$+ \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} -[f_i([a,b]), f_j(c)] + [f_i([a,c]), f_j(b)] - [f_i([b,c]), f_j(a)] =$$

Por hipótesis, se tiene que $f_i([x,y]) = \sum_{m+l=i} [f_l(x), f_m(y)]$, luego

$$= \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [af_i(b), f_j(c)] + [f_i(b), af_j(c)] - [bf_i(a), f_j(c)] - [f_i(a), bf_j(c)] + [cf_i(a), f_j(b)] + [f_i(a), cf_j(b)]$$

$$+ \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} -[\sum_{m+l=i} [f_l(a), f_m(b)]), f_j(c)] + [\sum_{m+l=i} [f_l(a), f_m(c)], f_j(b)] - [\sum_{m+l=i} [f_l(b), f_m(c)], f_j(a)] =$$

Notar que podemos separar la igualdad anterior en dos casos, el primero cuando $l = 0$ y $m = 0$ y el otro cuando $l, m, j > 0$, dejando:

$$= \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [af_i(b), f_j(c)] + [f_i(b), af_j(c)] - [bf_i(a), f_j(c)] - [f_i(a), bf_j(c)] + [cf_i(a), f_j(b)] + [f_i(a), cf_j(b)]$$

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} -[f_i(a)b, f_j(c)]+[f_i(a)c, f_j(b)]-[f_i(b)c, f_j(a)]-[af_i(b), f_j(c)]+[af_i(c), f_j(b)]-[bf_i(c), f_j(a)]$$

$$+ \sum_{\substack{l+m+j=n\\ l,m,j>0}} -[[f_l(a), f_m(b)], f_j(c)] + [[f_l(a), f_m(c)], f_j(b)] - [[f_l(b), f_m(c)], f_j(a)] =$$

Cambiemos los índices de las sumatorias y usemos la antisimetría del corchete en algunos términos:

$$= \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} [af_i(b), f_j(c)]+[f_i(b), af_j(c)]-[bf_i(a), f_j(c)]-[f_i(a), bf_j(c)]+[cf_i(a), f_j(b)]+[f_i(a), cf_j(b)]$$

$$+[bf_i(a), f_j(c)]-[cf_i(a), f_j(b)]-[f_i(a), cf_j(b)]-[af_i(b), f_j(c)]-[f_i(b), af_j(c)]+[f_i(a), bf_j(c)]$$

$$+ \sum_{\substack{l+m+j=n\\ l,m,j>0}} -[[f_l(a), f_m(b)], f_j(c)] - [[f_l(c), f_m(a)], f_j(b)] - [[f_l(b), f_m(c)], f_j(a)].$$

Ahora, notar que los dos primeros renglones se simplifican, y el tercer término se anula por Jacobi, ya que los índices recorren todas las posibilidades indistintamente.
Finalmente se obtiene $d^2(\delta f_n) = 0$. □

**Observación 6.2.5.** Si se tiene $f_1 \dots f_{n-1}$ como en la proposición anterior, uno puede construir $\delta f_n$. Si es un coborde ($\delta f_n = d^2(g)$), tomando $f_n := -g$ se tiene una deformación de orden $n$.
De esta manera, $\delta f_n$ es la obstrucción a definir una familia de orden $n$ dado que se tiene una de orden $n-1$.

**Corolario 6.2.6.** *Si $H^2(A,B) = 0$ cualquier 1-cociclo es integrable.*

## 6.3. Deformaciones Triviales

**Definición 6.3.1.** Un *automorfismo formal* de $f_t$ es lo siguiente: dada una serie formal sin término independiente: $\sum_1^\infty t^i b_i \in B[[t]]$ definimos

$$b_t := id + ad_{B^v}(\sum_1^\infty t^i b_i) = id_B + t[b_1, -] + t^2[b_2, -] + \dots$$

**Definición 6.3.2.** Dos deformaciones $f_t$, $g_t$ se dirán equivalentes ($f_t \sim g_t$) si existe un automorfismo formal $b_t$ tal que $b_t g_t(a) = f_t(a)$, $\forall a \in A$.
Cuando $g_t \sim f_0^v$ se dice que $g_t$ es *trivial*.

**Observación 6.3.3.** Dada una deformación $f_t$ ya vimos que $f_1$ es un 1-cociclo.
Más aún, dada $g_t \sim f_t$ se tiene que $g_1 - f_1$ es un 1-coborde.
Sale del siguiente hecho: $(id + t[b_1, -])(f_0(a) + tf_1(a)) \equiv f_0(a) + tf_1(a) + t[b_1, f_0(a)] \equiv f_0(a) + t(f_1(a) + [b_1, f_0(a)]) \mod (t^2)$.
Recordar que $\hom(\bigwedge^0 A, B)$ se define como $B$ en la teoría de Chevalley-Eilenberg, luego $f_1(a) - g_1(a) = [f_0(a), b_1] = d^0(b_1)(a) \Longrightarrow g_1 - f_1 = d^0(b_1)$ un 1-coborde.

**Observación 6.3.4.** Dada una familia $f_t = f_0^v + t^n f_n^v + \dots$ se tiene que $f_n$ es un 1-cociclo (6.1.3). Si también es un 1-coborde, existe una deformación equivalente de grado $n+1$: Sea $b_t = id + t^n[b, -]$ donde $d^0(b) = f_n$, entonces, $b_t f_t(a) \equiv (id + t^n[b, -])(f_0(a) + t^n f_n(a)) \equiv f_0(a) + t^n f_n(a) + t^n[b, f_0(a)] \equiv f_0(a) + t^n(f_n(a) - [f_0(a), b]) \equiv f_0(a) + t^n(f_n(a) - d^0(b)(a)) \equiv f_0(a) \mod (t^n)$
Luego se tiene lo siguiente:

**Proposición 6.3.5.** *Dada $f_t$ deformación de $f_0$, existe $g_t \sim f_t$ tal que el primer término no nulo es no-cohomólogo a cero.*

**Corolario 6.3.6.** $H^1(A, B) = 0 \Longrightarrow A \xrightarrow{f_0} B$ *es rígido.*

# 7. Coálgebras Coasociativas

**Resumen**

En esta sección trataré la teoría de deformaciones formales de coálgebras coasociativas. Lo que hice fue básicamente lo mismo que con las otras estructuras: definir una nueva comultiplicación. Si bien mi contacto con las coálgebras fue reciente, me pareció una estructura interesante por deformar. Un trabajo futuro podría ser deformar comódulos, morfismo de coálgebras, coálgebras de co-Lie, morfismos de ellas, representaciones, etc. Para definiciones, teoría homológica de coálgebras y un analisis más profundo sobre este tema referirse a [23]

## 7.1. Deformaciones infinitesimales

Sea $C$ una $k$-coálgebra coasociativa (no necesariamente coconmutativa) con comultiplicación $\triangle_0$.

**Definición 7.1.1.** Una deformación de la coálgebra $C$ es una serie formal de potencias

$$\triangle_t = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \triangle_i^v$$

donde $\triangle_i \in \hom_k(C, C^{\otimes 2})$ y tal que es coasociativa, $(id_{C^v} \otimes \triangle_t)\triangle_t = (\triangle_t \otimes id_{C^v})\triangle_t$

**Observación 7.1.2.** La condición de coasociatividad puede reformularse en términos de los $\triangle_i$ de la siguiente manera:

$$(\sum_j t^j \triangle_j^v \otimes id_{C^v})(\sum_i t^i \triangle_i^v) = (\sum_j t^j id_{C^v} \otimes \triangle_j^v)(\sum_i t^i \triangle_i^v) \iff$$

$$\sum_{i,j} t^{i+j}(\triangle_j^v \otimes id_{C^v})\triangle_i^v = \sum_{i,j} t^{i+j}(id_{C^v} \otimes \triangle_j^v)\triangle_i^v \iff$$

$$\sum_{i+j=n} (\triangle_j \otimes id_C - id_C \otimes \triangle_j)\triangle_i = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $n = 0$ se recupera la coasociatividad de $\triangle_0$
Para $n = 1$ se obtiene $\triangle_1 \in Z^2(C, C)$ 2-cociclo del complejo de Hochschild de la coálgebra $C$ con coeficientes en $C$ visto como bicomódulo.

## 7.2. Obstrucciones

**Observación 7.2.1.** Reescribamos la condición de coasociatividad ($n \geqslant 2$)

$$\sum_{i+j=n} (\triangle_j \otimes id_C - id_C \otimes \triangle_j)\triangle_i =$$

$$(\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}) + (\triangle_0 \otimes id_C - id_C \otimes \triangle_0)\triangle_n + (\triangle_n \otimes id_C - id_C \otimes \triangle_n)\triangle_0 = (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}) - d^2(\triangle_n)$$

**Definición 7.2.2.** Defino $\delta\triangle_n := \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}}(\triangle_j \otimes id_C - id_C \otimes \triangle_j)\triangle_i$

**Observación 7.2.3.** En caso de que $\triangle_t$ sea coasociativa, se tendrá
$d^2(\triangle_1) = 0$ y $\delta\triangle_n = d^2(\triangle_n) \quad (n \geqslant 2)$. Inversamente si se cumple
$d^2(\triangle_1) = 0$ y $\delta\triangle_n = d^2(\triangle_n) \quad (n \geqslant 2)$, $\triangle_t$ es coasociativa.

**Proposición 7.2.4.** $d^2(\triangle_1) = \delta\triangle_2 - d^2(\triangle_2) = \ldots = \delta\triangle_{n-1} - d^2(\triangle_{n-1}) = 0 \Longrightarrow$
$\delta\triangle_n \in Z^3(C, C)$

*Demostración.* Se le puede asignar una estructura de álgebra de Lie graduada diferencial al complejo de Hochschild $\bigoplus_{n\geqslant 0} \hom_k(C, C^{\otimes n+1})[-n]$ con diferencial
$D^{n-1} := d^n$.
Se define un corchete de tal manera que la diferencial sea $d = [-, \triangle_0]$.
$[f, g] := f \circ g - (-1)^{\overline{f}\overline{g}} g \circ f$ con

$$f \circ g := \sum_{i=0}^{\overline{f}} (-1)^{i\overline{g}} (id_C \otimes \ldots id_C \otimes g \otimes id_C \ldots \otimes id_C) f \in \hom_k(C, C^{\otimes \overline{f}+\overline{g}})$$

hay $(\overline{f})$ $id_C$ y la $g$ varia de posición con $i$. En la sección (13) demostraré que es un álgebra de Lie graduada diferencial.
Se tiene,

$$[\triangle_t, \triangle_t]_n = \sum_{i+j=n} [\triangle_i, \triangle_j] = \sum_{i+j=n} \triangle_i \circ \triangle_j + \triangle_j \circ \triangle_i =$$

$$= 2 \sum_{i+j=n} \triangle_i \circ \triangle_j = 2 \sum_{i+j=n} (\triangle_j \otimes id_C - id_C \otimes \triangle_j)\triangle_i = 2(\delta\triangle_n - d^2(\triangle_n))$$

Luego la condición de coasociatividad se traduce en $[\triangle_t, \triangle_t]_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Dado que $\triangle_t$ es un elemento homogéneo de grado uno, se tiene $[[\triangle_t, \triangle_t], \triangle_t] = 0 \Longrightarrow$

$$0 = [[\triangle_t, \triangle_t], \triangle_t]_n = \sum_{i+j=n} [[\triangle_t, \triangle_t]_i, \triangle_j] = \sum_{i+j=n} [2(\delta\triangle_i - d^2(\triangle_i)), \triangle_j] =$$

$$= (\text{hipótesis}) = 2[\delta\triangle_n - d^2(\triangle_n), \triangle_0] = 2d^3(\delta\triangle_n - d^2(\triangle_n)) = 2d^3(\delta F_n)$$

□

**Corolario 7.2.5.** *Si $H^3(C, C) = 0$ cualquier 2-cociclo es integrable.*

*Demostración.* Se empieza con $\triangle_1$ 2-cociclo. Luego, por hipótesis, se tiene que $[\delta\triangle_2] = 0$, entonces $\delta\triangle_2 = d^2(\alpha)$. Defino $\triangle_2 := \alpha$.
Dados, $\triangle_1, \ldots, \triangle_{n-1}$ como en la proposición anterior, por hipótesis se tiene que $\delta\triangle_n = d^2(\beta)$, defino $\triangle_n := \beta$. □

## 7.3. Deformaciones Triviales

**Definición 7.3.1.** Un *automorfismo formal* es una serie de potencias formal
$\Phi_t := id + \sum_1^\infty t^i \varphi_i^v$ con $\varphi_i \in \mathrm{end}_k(C)$.

**Definición 7.3.2.** Diremos que dos familias de deformaciones a un parámetro son equivalentes $\triangle_t \sim \triangle'_t \Longleftrightarrow \exists \Phi_t \mid (\Phi_t \otimes \Phi_t)\triangle_t = \triangle'_t \Phi_t$.
En otras palabras que las estructuras obtenidas sean isomorfas como coálgebras.

**Observación 7.3.3.** Si $\triangle_t = \triangle_0 + t^n \triangle_n^v + \dots$ coasociativa $\Longrightarrow \triangle_n \in Z^2(C, C)$.
Esto es pues $\delta\triangle_n = 0$ luego por la condición de coasociatividad, resulta $d^2(\triangle_n) = 0$.
Si también $\triangle_n$ es un coborde, $\triangle_n = d^1(\psi)$, definiendo $\Phi_t := id - t^n\psi^v$ se tiene que $\triangle_t' := (\Phi_t \otimes \Phi_t)\triangle_t(\Phi_t)^{-1}$ es de grado $n+1$. Esto es pues:

$$(\Phi_t \otimes \Phi_t)\triangle_t(\Phi_t)^{-1} \equiv ((id - t^n\psi) \otimes (id - t^n\psi))(\triangle_0 + t^n\triangle_n)(id + t^n\psi) \equiv$$

$$\equiv (id \otimes id - t^n(id \otimes \psi - \psi \otimes id))(\triangle_0 + t^n(\triangle_0\psi + \triangle_n)) \equiv$$
$$\equiv \triangle_0 - t^n(id \otimes \psi - \psi \otimes id)\triangle_0 + t^n(\triangle_0\psi + \triangle_n) \equiv$$
$$\equiv \triangle_0 - t^n((id \otimes \psi)\triangle_0 - (\psi \otimes id)\triangle_0 + \triangle_0\psi + d^1(\psi)) \equiv \triangle_0 \mod (t^{n+1})$$

Luego resulta lo siguiente:

**Proposición 7.3.4.** *Sea $\triangle_t$ una familia de deformaciones a un parámetro de una coálgebra $C$. Entonces, $\triangle_t$ es equivalente a una familia $\triangle_t'$ donde el primer término no-nulo es un 2-cociclo no cohomólogo a cero.*

**Corolario 7.3.5.** *Si $H^2(C, C) = 0 \Longrightarrow C$ es rígida.*

# 8. Módulos graduados diferenciales

**Resumen**

En esta sección trataré la teoría de deformaciones formales de módulos diferenciales graduados (o sea, complejos). Lo que se hará es deformar el diferencial dejando fijo al módulo. Con esta simple condición se obtiene información suficiente para poder definir obstrucciones, deformaciones triviales y luego, el teorema de rigidez. Esta sección la hice siguiendo [7]. Si bien todavía no se ha explicado qué es una estructura graduada (ver 10), esta sección puede leerse sin muchos inconvenientes.

## 8.1. Deformaciones infinitesimales

Sea $M = \bigoplus_{\mathbb{Z}} M^i$ un $A$-módulo graduado diferencial con diferencial $d_0$ tal que $d_0^2 = 0$ y de grado uno, donde $A$ es una $k$-álgebra graduada con $k$ cuerpo de característica cero. Definimos su grupo cohomológico graduado como $H(M, d) := \ker d/\mathrm{im}\ d$. Para mayor información ver la sección 10 sobre estructuras graduados.

**Definición 8.1.1.** Una *familia de deformaciones a un parámetro* o simplemente una *deformación formal* de la estructura diferencial del módulo graduado $M$ es una serie formal de potencias:

$$d_t = \sum_0^{\infty} t^i d_i^v$$

donde $d_i \in \mathrm{end}_A^1(M)$ y tal que $d_t^2 = 0$.
Luego $d_t$ es un diferencial definido sobre el $A[[t]]$-módulo $M[[t]]$.

**Definición 8.1.2.** Diremos que $d_t = \sum_0^m t^i d_i^v$ es una *deformación aproximada de orden* $m$ si $d_t^2 \equiv 0 \mod t^{m+1}$. En este caso, $d_t$ es un diferencial sobre $M[t]/t^{m+1}$.

**Observación 8.1.3.** Reescribiendo la condición de diferencial se obtiene:

$$d_t^2 = (\sum_i t^i d_i)(\sum_j t^j d_j) = \sum_{i,j} t^{i+j} d_i d_j = \sum_0^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} d_i d_j = 0.$$

Luego $d_t^2 = 0 \iff \sum_{i+j=n} d_i d_j = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Notar que $d_t$ es una deformación aproximada de orden $m \iff \sum_{i+j=n} d_i d_j = 0 \quad \forall n \leqslant m$

**Definición 8.1.4.** $d_1$ se llamará *deformación infinitesimal* de $d_0$.

## 8.2. Obstrucciones

**Notación 8.2.1.** Recordar que $\mathrm{end}_A^{\bullet}(M)$ es un módulo graduado. Veamos que la diferencial de $(M, d_0)$ induce un diferencial sobre $\mathrm{end}_A^{\bullet}(M)$ llamado $\mathtt{ad}d_0$ tal que

$$\mathtt{ad}d_0(f) := [d_0, f] = d_0 f - (-1)^{\overline{d_0 f}} f d_0$$

Sólo debemos corroborar que $\mathtt{ad}d_0$ es un diferencial:

$$\mathtt{ad}d_0(\mathtt{ad}d_0(\varphi)) = [d_0, [d_0, \varphi]] = [d_0, d_0\varphi - (-1)^{\overline{\varphi}}\varphi d_0] =$$

$$= d_0(d_0\varphi - (-1)^{\overline{\varphi}}\varphi d_0) - (-1)^{\overline{\varphi}+1}(d_0\varphi - (-1)^{\overline{\varphi}}\varphi d_0)d_0 =$$

$$= -(-1)^{\overline{\varphi}} d_0\varphi d_0 - (-1)^{\overline{\varphi}+1} d_0\varphi d_0 = -(-1)^{\overline{\varphi}}(d_0\varphi d_0 - d_0\varphi d_0) = 0$$

**Observación 8.2.2.** Notar que si $f$ tiene grado uno, como lo tiene $d_0$, se tiene que $\mathtt{add}_0(f) = d_0 f + f d_0$.

**Definición 8.2.3.** Llamaremos 1-cociclos a los $f \in \mathrm{end}^1_A(M) \mid \mathtt{add}_0(f) = 0$.
Llamaremos 1-cobordes a los endomorfismos de la forma $\mathtt{add}_0(\psi)$ con $\psi \in \mathrm{end}^0_A(M)$.

**Definición 8.2.4.** De la condición de diferencial (8.1.3) definimos:

$$\delta d_n := \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} d_i d_j$$

**Observación 8.2.5.** Notar que como $\sum_{i+j=n} d_i d_j = d_0 d_n + d_n d_0 + \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} d_i d_j$, se tiene:

$$\sum_{i+j=n} d_i d_j = 0 \Longleftrightarrow \delta d_n = -\mathtt{add}_0(d_n)$$

Luego $d_t^2 = 0 \Longleftrightarrow \delta d_n = -\mathtt{add}_0(d_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Notar que todos los $\delta d_n$ son 2-cobordes.

**Observación 8.2.6.** Si se tiene una deformación $d_t$, o sea $d_t^2 = 0$, $d_1 \in \ker(\mathtt{add}_0)$ (un 1-cociclo), más aún si $d_1 = \ldots = d_{m-1} = 0$ entonces $d_m$ es un 1-cociclo, esto es pues $0 = \sum_{i+j=m} d_i d_j = d_0 d_m + d_m d_0 = \mathtt{add}_0(d_m)$

**Proposición 8.2.7.** *$\delta d_1 = \delta d_2 + \mathtt{add}_0(d_2) = \ldots = \delta d_{n-1} + \mathtt{add}_0(d_{n-1}) = 0 \Longrightarrow$ $\delta d_n$ es un 2-cociclo.*

*Demostración.* Empecemos con una pequeña observación:

$$[d_0, d_i d_j] = d_0 d_i d_j - d_i d_j d_0 = d_0 d_i d_j - d_i d_j d_0 + (d_i d_0 d_j - d_i d_0 d_j) =$$

$$= d_0 d_i d_j - d_i d_0 d_j + d_i d_0 d_j - d_i d_j d_0 = (d_0 d_i - d_i d_0) d_j + d_i (d_0 d_j - d_j d_0) = [d_0, d_i] d_j - d_i [d_0, d_j].$$

En otras palabras, $[d_0, -]$ es una derivación.
Luego se tiene:

$$\mathtt{add}_o(\delta d_n) = [d_0, \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} d_i d_j] = \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} [d_0, d_i d_j] = \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} [d_0, d_i] d_j - d_i [d_0, d_j] =$$

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} -(\delta d_i) d_j + d_i (\delta d_j) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} \sum_{\substack{k+l=i \\ k>0,l>0}} -d_k d_l d_j + \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} \sum_{\substack{r+s=j \\ r>0,s>0}} d_i d_r d_s =$$

$$\sum_{\substack{k+l+j=n \\ k>0,l>0,j>0}} -d_k d_l d_j + \sum_{\substack{r+s+i=n \\ r>0,s>0,i>0}} d_i d_r d_s = 0$$

□

**Corolario 8.2.8.** *Si $d_t$ una deformación aproximada de orden $n$ entonces $\delta d_n$ es un 2-cociclo. Más aún, $d_t$ se extiende a una deformación de orden $n+1$ $\Longleftrightarrow$ $\delta d_n$ es un 2-coborde.*

*Demostración.* Que sea una deformación aproximada de orden $n$ significa que $d_1, \ldots, d_n$ son como en la proposición anterior, luego se tiene que $\delta d_{n+1}$ es un 2-cociclo. En caso de ser un 2-coborde, $\delta d_{n+1} = [d_0, f]$ para algún $f \in \mathrm{end}^1_A(M)$. Luego $d_0^v + td_1^v + \ldots + t^n d_n^v + t^{n+1} f^v$ es una deformación aproximada de orden $n+1$ por definición. La vuelta es trivial. □

**Corolario 8.2.9.** *Si $H^2(end_A(M)) = 0$ cualquier 1-cociclo es integrable.*

## 8.3. Deformaciones triviales

**Definición 8.3.1.** Una *familia a un parámetro de automorfismos*, o *automorfismo formal* es $\varphi_t = id + \sum_1^\infty t^i \varphi_i^v$ donde $\varphi_i \in \mathrm{end}^0_A(M)$.

**Definición 8.3.2.** Dos familias de deformaciones a un parámetro $d_t$ y $d'_t$ se dirán *equivalentes* si existe un automorfismo formal $\varphi_t$ tal que $d'_t = \varphi_t^{-1} d_t \varphi_t$, o sea, que las estructuras obtenidas sean isomorfas.
Una deformación se dirá *trivial* si $d_t \sim d_0^v$.
$M$ se dirá *rígido* si cualquier deformación de $d_0$ es trivial.

**Observación 8.3.3.** Supongamos que $d_t \sim d'_t$, entonces existe un automorfismo formal $\varphi_t$ tal que $d'_t = \varphi_t^{-1} d_t \varphi_t$. Veamos qué pasa a nivel de las deformaciones infinitesimales: dado que $\varphi_t^{-1} = 1 - t\varphi_1 + \ldots$, se tiene que $d'_1 = d_1 + \mathtt{ad}d_0(\varphi_1)$, pues,

$$\varphi_t^{-1} d_t \varphi_t \equiv (1 - t\varphi_1)(d_0 + td_1)(1 + t\varphi_1) \equiv (1 - t\varphi_1)(d_0 + td_0\varphi_1 + td_1) \equiv$$

$$\equiv d_0 + td_0\varphi_1 + td_1 - t\varphi_1 d_0 \equiv d_0 + t(d_1 + \mathtt{ad}d_0(\varphi_1)) \mod (t^2)$$

Lo mismo pasa si $d_t = d_0 + t^k d_k + \ldots$ ya que se tiene que cualquier deformación equivalente a $d_t$ tendrá $d'_k = d_k + \mathtt{ad}d_0(\varphi_k)$ para algún $\varphi_k \in \mathrm{end}^0_A(M)$.
Esto implica que el primer término no nulo en una deformación $d_t$ puede reemplazarse por cualquier representante de su clase cohomológica preservando la equivalencia, simplemente tomando $\varphi_t := 1 + t^k \varphi_k^v$.

**Teorema 8.3.4.** *Si $H^1(end_A^\bullet(M)) = 0 \Longrightarrow M$ es rígido*

*Demostración.* Recordar de (8.2.6) que el primer término no-nulo de una deformación $d_t$ es un 1-cociclo. En este caso, dado que todo 1-cociclo es un 1-coborde, se tiene que si $d_t = d_0 + t^k d_k + \ldots \Longrightarrow d_k = \mathtt{ad}d_0(\psi)$ con $\psi \in \mathrm{end}^0_A(M)$. Definamos un automorfismo formal $\psi_t := 1 - t^k\psi$, luego $d_t$ es equivalente a una deformación donde el primer término no-nulo tiene grado $k+1$:

$$(1 + t^k\psi)(d_0 + t^k d_k)(1 - t^k\psi) \equiv (1 + t^k\psi)(d_0 + t^k d_k - t^k d_0\psi) \equiv$$

$$\equiv d_0 + t^k d_k - t^k d_0\psi + t^k\psi d_0 \equiv d_0 + t^k(d_k - \mathtt{ad}d_0(\psi)) \equiv d_0 \mod (t^{k+1})$$

Inductivamente, se tiene que $d_t \sim d_0^v$. □

# 9. Álgebras graduadas diferenciales

**Resumen**

En esta sección trataré la teoría de deformaciones formales de álgebras graduadas diferenciales. Lo que se hará es deformar el diferencial dejando fijo el álgebra. O sea, se extienden los escalares del álgebra tomando un nuevo diferencial que será una serie de potencias de derivaciones. La condición de diferencial dará información para estudiar las obstrucciones, las deformaciones triviales y luego, el teorema de rigidez. Esta sección la hice inspirado en [7]. Si bien todavía no se ha explicado cómo son las estructuras graduadas (ver 10), esta sección puede leerse sin muchos inconvenientes.

## 9.1. Deformaciones infinitesimales

Sea $A = \bigoplus_{\mathbb{Z}} A^i$ una $k$-álgebra graduada diferencial con diferencial $d_0$ tal que $d_0^2 = 0$, tiene grado uno y es una derivación graduada, o sea, $d_0(xy) = d_0(x)y + (-1)^{\overline{x}} x d_0(y)$.
El cuerpo es de característica cero.

**Definición 9.1.1.** Una *familia de deformaciones a un parámetro* o simplemente una *deformación formal* de la estructura diferencial del álgebra graduada $A$ es una serie formal de potencias:

$$d_t = \sum_0^\infty t^i d_i^v$$

donde $d_i \in \mathrm{end}_k^1(A)$ y tal que $d_t^2 = 0$ y derivación graduada.
Luego $d_t$ es un diferencial definido sobre $A[[t]]$.
Notar que la condición de derivación se predica sobre cada $d_i$ ya que

$$d_t(xy) = d_t(x)y + (-1)^{\overline{x}} x d_t(y) \iff \sum t^i d_i(xy) = \sum t^i d_i(x)y + (-1)^{\overline{x}} x d_i(y) \iff$$

$$d_i \in \mathtt{D}_k^1(A)$$

derivaciones de grado uno de $A$.
Luego una deformación formal de $d_0$ será una serie formal $d_t$ donde cada $d_i \in \mathtt{D}_k^1(A)$ y tal que $d_t^2 = 0$.

**Definición 9.1.2.** Diremos que $d_t = \sum_0^m t^i d_i^v$ es una *deformación aproximada de orden* $m$ si $d_t^2 \equiv 0 \mod t^{m+1}$. En este caso, $d_t$ es un diferencial sobre $A[t]/t^{m+1}$.

**Observación 9.1.3.** Reescribiendo la condición de diferencial se obtiene:

$$d_t^2 = (\sum_i t^i d_i^v)(\sum_j t^j d_j^v) = \sum_{i,j} t^{i+j} d_i^v d_j^v = \sum_0^\infty t^n (\sum_{i+j=n} d_i d_j)^v = 0.$$

Luego $d_t^2 = 0 \iff \sum_{i+j=n} d_i d_j = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Notar que $d_t$ es una deformación aproximada de orden $m \iff \sum_{i+j=n} d_i d_j = 0 \quad \forall n \leqslant m$

**Definición 9.1.4.** $d_1 \in \mathtt{D}_k^1$ se llamará *deformación infinitesimal* de $d_0$.

## 9.2. Obstrucciones

**Notación 9.2.1.** Recordar que $\mathtt{D}_k^\bullet(A)$ es un módulo graduado. Se tiene que la diferencial $d_0$ induce un diferencial sobre $\mathtt{D}_k^\bullet(A)$ llamado $\mathtt{ad}d_0$ tal que

$$\mathtt{ad}d_0(f) = [d_0, f] = d_0 f - (-1)^{\overline{d_0 f}} f d_0$$

Veamos que $\mathtt{ad}d_0$ es un diferencial:

$$(\mathtt{ad}d_0)^2(\varphi) = \mathtt{ad}d_0(\mathtt{ad}d_0(\varphi)) = [d_0, [d_0, \varphi]] = [d_0, d_0\varphi - (-1)^{\overline{\varphi}}\varphi d_0] =$$

$$= d_0(d_0\varphi - (-1)^{\overline{\varphi}}\varphi d_0) - (-1)^{\overline{\varphi}+1}(d_0\varphi - (-1)^{\overline{\varphi}}\varphi d_0)d_0 =$$

$$= -(-1)^{\overline{\varphi}} d_0\varphi d_0 - (-1)^{\overline{\varphi}+1} d_0\varphi d_0 = -(-1)^{\overline{\varphi}}(d_0\varphi d_0 - d_0\varphi d_0) = 0$$

El hecho de que $\mathtt{ad}d_0$ esté bien definido sale pues $\mathtt{D}_k(A)$ es una subálgebra graduada de Lie de $\mathtt{gl}_k(A)$, ver (10.7.2). Luego $\mathtt{D}_k(A)$ es cerrado por el corchete, más aún al ser subálgebra graduada, se tiene que $\mathtt{D}_k^i \xrightarrow{\mathtt{ad}d_0} \mathtt{D}_k^{i+1}$ pues $d_0 \in \mathtt{D}_k^1$ y $\mathtt{ad}d_0(\mathtt{D}_k^i) = [d_0, \mathtt{D}_k^i] \subset \mathtt{D}_k^{i+1}$.
Conclusión $(\mathtt{D}_k^\bullet, \mathtt{ad}d_0)$ es un módulo diferencial graduado.

**Observación 9.2.2.** Notar que si $f$ tiene grado uno, como lo tiene $d_0$, se obtiene que $\mathtt{ad}d_0(f) = d_0 f + f d_0$.

**Definición 9.2.3.** Llamaremos 1-cociclos a los $f \in \mathtt{D}_k^1(A) \mid \mathtt{ad}d_0(f) = 0$.
Llamaremos 1-cobordes a la derivaciones de la forma $\mathtt{ad}d_0(\psi)$ con $\psi \in \mathtt{D}_k^0(A)$

**Definición 9.2.4.** De la condición de diferencial definimos

$$\delta d_n := \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0, j>0}} d_i d_j$$

**Observación 9.2.5.** Notar que $\sum_{i+j=n} d_i d_j = d_0 d_n + d_n d_0 + \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} d_i d_j$.
Luego resulta,

$$\sum_{i+j=n} d_i d_j = 0 \Longleftrightarrow \delta d_n = -\mathtt{ad}d_0(d_n)$$

Luego $d_t^2 = 0 \Longleftrightarrow \delta d_n = -\mathtt{ad}d_0(d_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Notar que todos los $\delta d_n$ son 2-cobordes.

**Observación 9.2.6.** Si se tiene una deformación $d_t$, o sea $d_t^2 = 0$, $d_1 \in \ker(\mathtt{ad}d_0)$ (un 1-cociclo). Más aún si $d_1 = \ldots = d_{m-1} = 0$ entonces $d_m$ es un 1-cociclo, esto es pues $0 = \sum_{i+j=m} d_i d_j = d_0 d_m + d_m d_0 = \mathtt{ad}d_0(d_m)$

**Proposición 9.2.7.** *$\delta d_1 = \delta d_2 + \mathtt{ad}d_0(d_2) = \ldots = \delta d_{n-1} + \mathtt{ad}d_0(d_{n-1}) = 0 \Longrightarrow$ $\delta d_n$ es un 2-cociclo.*

*Demostración.* Recordar que $[d_0, -]$ es una derivación, entonces:

$$\mathtt{ad}d_o(\delta d_n) = [d_0, \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} d_i d_j] = \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} [d_0, d_i d_j] = \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,j>0}} \mathtt{ad}d_0(d_i)d_j - d_i\mathtt{ad}d_0(d_j) =$$

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i>0,j>0}} -(\delta d_i)d_j + d_i(\delta d_j) = \sum_{\substack{i+j=n\\ i>0,j>0}} \sum_{\substack{k+l=i\\ k>0,l>0}} -d_k d_l d_j + \sum_{\substack{i+j=n\\ i>0,j>0}} \sum_{\substack{r+s=j\\ r>0,s>0}} d_i d_r d_s =$$

$$\sum_{\substack{k+l+j=n\\ k>0,l>0,j>0}} -d_k d_l d_j + \sum_{\substack{r+s+i=n\\ r>0,s>0,i>0}} d_i d_r d_s = 0$$

□

**Corolario 9.2.8.** *Si $d_t$ una deformación aproximada de orden $n$ entonces $\delta d_n$ es un 2-cociclo. Más aún, $d_t$ se extiende a una deformación de orden $n+1 \iff \delta d_n$ es un 2-coborde.*

*Demostración.* Que sea una deformación aproximada de orden $n$ significa que $d_1, \ldots, d_n$ cumplen la proposición anterior, luego se tiene que $\delta d_{n+1}$ es un 2-cociclo. En caso de ser un 2-coborde, $\delta d_{n+1} = [d_0, f]$ para algún $f \in \mathtt{D}^1_k(A)$. Luego, por construcción, $d_t + t^{n+1} f^v$ es una deformación aproximada de orden $n+1$. La vuelta es trivial. □

**Corolario 9.2.9.** *Si $H^2(\mathtt{D}_k(A)) = 0$ cualquier 1-cociclo es integrable.*

## 9.3. Deformaciones triviales

**Definición 9.3.1.** Un *automorfismo de álgebra formal* es $\varphi_t = id + \sum_1^\infty t^i \varphi_i^v$ donde $\varphi_i \in \mathrm{end}^0_k(A)$ y $\varphi_t(ab) = \varphi_t(a)\varphi_t(b) \quad \forall a, b \in A$.

**Observación 9.3.2.** Veamos que la condición $\varphi_t(ab) = \varphi_t(a)\varphi_t(b)$ implica que $\varphi_1$ es una derivación de grado 0, luego estará bien definido $\mathtt{ad}d_0(\varphi_1) = [d_0, \varphi_1]$.
$\varphi_t(ab) = \varphi_t(a)\varphi_t(b) \iff \varphi_n(ab) = \sum_{i+j=n} \varphi_i(a)\varphi_j(b)$.
Luego para $n = 1$ se tiene que $\varphi_1(ab) = a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b \implies \varphi_1 \in \mathtt{D}^0_k(A)$.
Análogamente si se tiene $\varphi_t = id + t^k \varphi_k^v + \ldots$ resulta $\varphi_k \in \mathtt{D}^0_k(A)$.

**Definición 9.3.3.** Dos familias de deformaciones a un parámetro $d_t$ y $d'_t$ se dirán *equivalentes* si existe un automorfismo formal $\varphi_t$ tal que $d'_t = \varphi_t^{-1} d_t \varphi_t$, o sea, que las estructuras obtenidas sean isomorfas.
Una deformación se dirá *trivial* si $d_t \sim d_0^v$.
$(A, d_0)$ se dirá *rígida* si cualquier deformación de $d_0$ es trivial.

**Observación 9.3.4.** Supongamos que $d_t \sim d'_t$, entonces existe un automorfismo formal $\varphi_t$ tal que $d'_t = \varphi_t^{-1} d_t \varphi_t$. Veamos qué pasa a nivel de las deformaciones infinitesimales:
Dado que $\varphi_t^{-1} = 1 - t\varphi_1^v + \ldots$, se tiene que $d'_1 = d_1 + \mathtt{ad}d_0(\varphi_1)$, pues

$$\varphi_t^{-1} d_t \varphi_t \equiv (1 - t\varphi_1)(d_0 + td_1)(1 + t\varphi_1) \equiv (1 - t\varphi_1)(d_0 + td_0\varphi_1 + td_1) \equiv$$

$$\equiv d_0 + td_0\varphi_1 + td_1 - t\varphi_1 d_0 \equiv d_0 + t(d_1 + \mathtt{ad}d_0(\varphi_1)) \mod (t^2)$$

Por otro lado, dado $d_t = d_0^v + t^k d_k^v + \ldots$ y $\varphi_k \in \mathtt{D}^0_k(A)$ se tiene que $\varphi_t := 1 + t^k \varphi_k^v$ induce una deformación equivalente $d'_t := \varphi_t^{-1} d_t \varphi_t$ tal que $d'_k = d_k + \mathtt{ad}d_0(\varphi_k)$.
Luego el primer término no nulo en una deformación $d_t$ puede reemplazarse por cualquier representante de su clase cohomológica preservando la equivalencia.
En particular si son 1-cobordes pueden ser reemplazados por cero.

**Teorema 9.3.5.** *Si* $H^1(\mathcal{D}_k^\bullet(A)) = 0 \Longrightarrow A$ *es rígida.*

*Demostración.* Recordar de (9.2.6) que el primer término no-nulo de una deformación $d_t$ es un 1-cociclo. En este caso, dado que todo 1-cociclo es un 1-coborde, se tiene que si $d_t = d_0 + t^k d_k + \ldots \Longrightarrow d_k = \mathtt{ad} d_0(\psi)$ con $\psi \in \mathtt{D}_k^0(A)$. Definamos un automorfismo formal $\psi_t := 1 - t^k\psi$, luego $d_t$ es equivalente a una deformación donde el primer término no-nulo tiene grado $k+1$:

$$(1+t^k\psi)(d_0+t^k d_k)(1-t^k\psi) \equiv (1+t^k\psi)(d_0+t^k d_k - t^k d_0\psi) \equiv$$

$$\equiv d_0 + t^k d_k - t^k d_0\psi + t^k\psi d_0 \equiv d_0 + t^k(d_k - \mathtt{ad} d_0(\psi)) \equiv d_0 \mod (t^{k+1})$$

Inductivamente, se tiene que $d_t \sim d_0$. $\square$

# 10. Introducción a las estructuras graduadas

**Resumen**

En esta sección construiremos las herramientas necesarias para desarrollar la teoría de álgebras de Lie graduadas diferenciales, para eso empezaremos definiendo categorías graduadas y estudiaremos algunos casos particulares que nos interesan, como módulos graduados, álgebras graduadas, álgebras de Lie graduadas, etc.
Por último estudiaremos objetos munidos de un diferencial, en particular módulos graduados diferenciales y álgebras de Lie graduadas diferenciales. Siempre trabajaremos con cuerpos de característica cero. Esta sección fue hecha siguiendo [17], utilicé información de [8], [16] y [24]. Prestar especial atención en las secciones (10.10) y (10.13) pues son fundamentales para entender luego las relaciones de equivalencias que utilizaremos en las variedades de Maurer-Cartan.

## 10.1. Categorías graduadas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría con coproductos arbitrarios y $Z$ un monoide (una categoría con un sólo objeto) [conmutativo] con unidad.

**Definición 10.1.1.** Definimos $Grad_Z\mathcal{C}$ como una subcategoría de la categoría de funtores $\mathcal{C}^Z$ tal que los objetos son $X = \coprod_Z X^n$ y las flechas son aquellas con un grado determinado, o sea, $f = \coprod_Z f^n : X \to Y$ es una flecha homogénea de grado $\eta$ si $f^n : X^n \to Y^{\eta+n}$.
De esta manera se tiene definido $\hom^\bullet_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

**Observación 10.1.2.** Notar que si $\forall \eta \in Z$, $\hom^\eta_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (morfismos homogéneos de grado $\eta$) son objetos de $\mathcal{C}$, y resulta $\hom^\bullet_{\mathcal{C}}(X, Y) = \coprod_Z \hom^\eta_{\mathcal{C}}(X, Y)$, se tiene que $\hom^\bullet_{\mathcal{C}}$ es un objeto de la categoría graduada. En algunos casos que estudiaremos, los $\hom^\bullet_{\mathcal{C}}$ graduados serán objetos.

**Observación 10.1.3.** Notar que si $X \xrightarrow{f} Y$ tiene grado $\eta$ y $Y \xrightarrow{g} Z$ tiene grado $\rho$ entonces $X \xrightarrow{g\circ f} Z$ tiene grado $\eta + \rho$ haciendo posible la composición.
Sale del hecho que el producto de $Z$ es asociativo.

**Observación 10.1.4.** Notar que la identidad $X \xrightarrow{id_X} X$ es una flecha de grado $0 \in Z$. Luego la identidad del monoide es necesaria.

**Observación 10.1.5.** Un subobjeto $Y$ de $X$ graduado es un objeto $Y$ tal que existe un monomorfismo de grado 0, $Y \hookrightarrow X$.

**Definición 10.1.6.** Llamaremos elementos homogéneos de grado $\eta$ a los elementos de $\hom_{\mathcal{C}}(1, X^\eta)$ siempre y cuando $\mathcal{C}$ tenga objeto final.

**Observación 10.1.7.** Dados dos objetos graduados $X$ e $Y$ el objeto graduado coproducto es $X \coprod Y := \coprod_Z (X^n \coprod Y^n)$

## 10.2. Espacios vectoriales graduados

Un espacio vectorial graduado de tipo $Z$ es un $k$-espacio vectorial de la forma $V = \bigoplus_Z V^i$, con cada $V^i$ subespacio de $V$. Llamaremos elementos homogéneos de grado $i$ a los $v \in V^i$.
$W$ es un subespacio graduado de $V$ si $W = \bigoplus_Z W \cap V^i$.

Sea $W$ un subespacio graduado de $V$ y sea $V \xrightarrow{\pi} V/W$ la proyección canónica, entonces la familia $\{\pi(V^i)\}$ define una estructura de $k$-espacio vectorial graduado sobre $V/W$.
Diremos que $V \xrightarrow{f} W$ es homogéneo de grado $n$ si $f(V^i) \subset W^{n+i} \quad \forall i \in Z$. Cuando esto pase, se tiene que el núcleo y la imagen son $k$-espacios vectoriales graduados de tipo $Z$.
Definamos $\hom_k^\bullet(V, W) := \bigoplus_Z \hom_k^i(V, W)$ la suma directa de los morfismos de grado $i$. Notar que $\hom_k^i(V, W)$ es un $k$-espacio vectorial, dándole estructura de $k$-espacio vectorial graduado a $\hom_k^\bullet(V, W)$.

## 10.3. Álgebras graduadas

Una $k$-álgebra graduada de tipo $Z$ es un $k$-espacio vectorial graduado de tipo $Z$ con una estructura de álgebra compatible con la graduación, o sea, un morfismo bilineal tal que $A^i A^j \subset A^{i+j} \quad \forall i, j \in Z$.

**Notación 10.3.1.** Si $B$ y $C$ son subespacios de $A$, denotamos por $BC$ al subespacio generado por $\{bc \mid b \in B,\, c \in C\}$

**Definición 10.3.2.** Una $k$-subálgebra graduada de una $A$ es un subespacio $B$ graduado tal que es cerrado por el producto, o sea, $BB \subset B$.
Un ideal graduado $I$ a izquierda de $A$ es un subespacio graduado tal que $AI \subset I$ (ídem a derecha y bilátero).

**Definición 10.3.3.** Un morfismo de álgebras graduadas $A$ y $B$ de tipo $Z$ es $f \in \hom_k^0(A, B)$ tal que $f(ab) = f(a)f(b)$.
Notar que si el grado de $f$ no es cero queda mal definida, pues si $a \in A^i$, $b \in A^j \Longrightarrow ab \in A^{i+j}$ y $f$ tiene grado $\eta$, resulta que $gr(f(ab)) = i+j+\eta$ debe ser igual a $gr(f(a)f(b)) = gr(f(a)) + gr(f(b)) = i + \eta + j + \eta$. Entonces se tiene que $\eta = 2\eta \Longleftrightarrow \eta = 0$.

**Observación 10.3.4.** Sea $A$ un $k$-álgebra graduada y $I$ un ideal bilátero. Sea $A \xrightarrow{\pi} A/I$ la proyección canónica, entonces existe una única estructura de álgebra graduada sobre $A/I$ tal que $\pi$ es morfismo de álgebras graduadas.

**Observación 10.3.5.** Sea $V$ un $k$-espacio vectorial graduado.
Si $f \in \hom_k^i(V, V)$, $g \in \hom_k^j(V, V) \Longrightarrow f \circ g \in \hom_k^{i+j}(V, V)$. Luego si $f, g \in \hom_k^\bullet(V, V) \Longrightarrow f \circ g \in \hom_k^\bullet(V, V)$, con lo cual el espacio vectorial graduado $\hom_k^\bullet(V, V)$ tiene una estructura de álgebra asociativa graduada donde el producto es la composición. La llamamos $\mathrm{end}_k^\bullet(V)$.

## 10.4. Álgebras conmutativas y anticonmutativas graduadas

Para poder definir una estructura de conmutatividad o anticonmutatividad es necesario que cada elemento de $Z$ tenga una paridad, esto se garantiza de la siguiente manera:

**Definición 10.4.1.** Un grupo conmutativo $G$ posee una *paridad* si existe $G \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_2$ morfismo de grupos. Diremos a $\phi^{-1}(0)$ elementos pares y $\phi^{-1}(1)$ impares.
Construyamos un morfismo de $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} k^*$ tal que componiéndolo con $\phi$ nos dé el signo de cada elemento de $G$:
Sea $k$ un cuerpo y sea $k^*$ sus unidades ($k^* = k \setminus \{0\}$) definimos $\mathbb{Z} \to k^* \mid n \to (-1)^n$. El núcleo de este morfismo contiene a $2\mathbb{Z}$ luego se factoriza por $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} k^*$.

**Notación 10.4.2.** Dado $g \in G$, notemos por $(-1)^g := \alpha(\phi(g)) = (-1)^{[\phi(g)]}$.
Luego si $f, g \in G$ impares se tiene $(-1)^{fg} = -1$, de lo contrario es 1.

**Observación 10.4.3.** En los casos más comunes se usa el grupo aditivo $\mathbb{Z}$ con la paridad canónica (la proyección al cociente). En ese caso la función de paridad recién construida es exactamente la usual, $(-1)^n$.

**Definición 10.4.4.** Sea $A$ una $k$-álgebra graduada por un grupo conmutativo con paridad $Z$. $A$ se dice *conmutativa* (resp. *anticonmutativa*) si dados $a \in A^\alpha$, $b \in A^\beta$ se tiene que $ab = (-1)^{\alpha\beta} ba$ (resp. $ab = -(-1)^{\alpha\beta} ba$).

**Observación 10.4.5.** Cuando se está en un contexto no graduado, se recupera la definición de conmutatividad y anticonmutatividad tomando un álgebra no-graduada como homogénea de grado 0 y $\phi(Z) = 0$ (o sea, todos los elementos son pares).

## 10.5. Álgebras de Lie graduadas

**Definición 10.5.1.** Un álgebra de Lie graduada es un $k$-espacio vectorial $E$ graduado de tipo $Z$ munido de un morfismo bilineal $E \times E \to E \mid (a, b) \to [a, b]$ que satisface anticonmutatividad y Jacobi graduado, o sea,

- $[E^i, E^j] \subset E^{i+j} \quad \forall i, j \in Z$
- $a \in E^\alpha$, $b \in E^\beta \Longrightarrow [a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a]$
- $a \in E^\alpha$, $b \in E^\beta$, $c \in E^\gamma \Longrightarrow (-1)^{\alpha\gamma}[[a, b], c] + (-1)^{\beta\alpha}[[b, c], a] + (-1)^{\gamma\beta}[[c, a], b] = 0$

**Observación 10.5.2.** Un álgebra de Lie usual puede pensarse como una graduada en grado 0

**Observación 10.5.3.** El centro de un álgebra de Lie graduada es un ideal graduado, ya que si $Z(E) := \{a \in E \mid [a, x] = 0 \quad \forall x \in E\}$ entonces dado $e \in E$ se tiene que $[e, a] = -(-1)^{ea}[a, e] = 0 \in Z(E)$, luego $[E, Z(E)] \subset Z(E)$.

## 10.6. Álgebras de Lie obtenidas mediante un conmutador

En el caso no-graduado, el conmutador sobre un álgebra asociativa define una estructura de álgebra de Lie. Veamos que ocurre lo mismo en el caso graduado.

**Proposición 10.6.1.** *Sea $A$ una $k$-álgebra asociativa graduada. Luego el espacio vectorial graduado subyacente de $A$ con el corchete graduado definido por $[a, b] := ab - (-1)^{ab} ba$ es un álgebra de Lie graduada.*

*Demostración.* La condición uno, sale trivialmente, pues si $a \in A^\alpha$, $b \in A^\beta \Longrightarrow$
$[a, b] = ab - (-1)^{\alpha\beta} ba \in A^{\alpha+\beta}$ ya que el producto del álgebra es graduado.
La condición dos, se obtiene escribiendo la ecuación
$[a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a] \Longleftrightarrow ab - (-1)^{\alpha\beta} ba = -(-1)^{\alpha\beta}(ba - (-1)^{\beta\alpha} ab) \Longleftrightarrow$
$ab - (-1)^{\alpha\beta} ba = -(-1)^{\alpha\beta} ba + ab \Longleftrightarrow 0 = 0$
(recordar que el grupo de graduación es conmutativo, luego $(-1)^{\alpha\beta}(-1)^{\beta\alpha} = 1$)
Por último la condición tres también se obtiene simplemente escribiéndola,

$(-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c] + (-1)^{\beta\alpha}[[b,c],a] + (-1)^{\gamma\beta}[[c,a],b] =$
$(-1)^{\alpha\gamma}[ab - (-1)^{\alpha\beta}ba, c] + (-1)^{\beta\alpha}[bc - (-1)^{\beta\gamma}cb, a] + (-1)^{\gamma\beta}[ca - (-1)^{\gamma\alpha}ac, b] =$
$(-1)^{\alpha\gamma}[ab,c] - (-1)^{\alpha\gamma}(-1)^{\alpha\beta}[ba,c] +$
$(-1)^{\beta\alpha}[bc,a] - (-1)^{\beta\alpha}(-1)^{\beta\gamma}[cb,a] +$
$(-1)^{\gamma\beta}[ca,b] - (-1)^{\gamma\beta}(-1)^{\gamma\alpha}[ac,b] =$
$(-1)^{\alpha\gamma}[ab,c] - (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)}[ba,c] +$
$(-1)^{\beta\alpha}[bc,a] - (-1)^{\beta(\alpha+\gamma)}[cb,a] +$
$(-1)^{\gamma\beta}[ca,b] - (-1)^{\gamma(\beta+\alpha)}[ac,b] =$
$(-1)^{\alpha\gamma}(abc - (-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}cab) - (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)}(bac - (-1)^{(\beta+\alpha)\gamma}cba) +$
$(-1)^{\beta\alpha}(bca - (-1)^{(\beta+\gamma)\alpha}abc) - (-1)^{\beta(\alpha+\gamma)}(cba - (-1)^{(\gamma+\beta)\alpha}acb) +$
$(-1)^{\gamma\beta}(cab - (-1)^{(\gamma+\alpha)\beta}bca) - (-1)^{\gamma(\beta+\alpha)}(acb - (-1)^{(\alpha+\gamma)\beta}bac) =$
$(-1)^{\alpha\gamma}abc - (-1)^{\gamma\beta}cab - (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)}bac + (-1)^{\beta(\alpha+\gamma)}cba +$
$(-1)^{\beta\alpha}bca - (-1)^{\alpha\gamma}abc - (-1)^{\beta(\alpha+\gamma)}cba + (-1)^{\gamma(\beta+\alpha)}acb +$
$(-1)^{\gamma\beta}cab - (-1)^{\beta\alpha}bca - (-1)^{\gamma(\beta+\alpha)}acb + (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)}bac = 0$ □

**Observación 10.6.2.** Como caso particular sea $V$ un $k$-espacio vectorial graduado, entonces como vimos, $\mathrm{end}_k^\bullet(V)$ tiene estructura de álgebra asociativa, y se le asigna mediante el conmutador, una estructura de álgebra de Lie graduada $\mathtt{gl}_k^\bullet(V) = \bigoplus_Z \mathtt{gl}_k^i(V)$.
Notar que si $f, g$ tienen grado impar, $[f,g] = f \circ g + g \circ f$.
Notar también que $\mathtt{gl}_k^0(V) = \mathrm{hom}_k^0(V,V)$ los morfismos de grado cero con el conmutador, es isomorfo a $\bigoplus_Z \mathtt{gl}_k(V^i)$, donde $\mathtt{gl}_k(V^i) = \mathrm{hom}_k(V^i, V^i)$ munido del conmutador usual.
Esto es pues $f \in \mathtt{gl}_k^0(V) \iff f = \oplus_Z f^i : \bigoplus_Z V^i \longrightarrow \bigoplus_Z V^i \iff \oplus_Z f^i \in \bigoplus_Z \mathtt{gl}_k(V^i)$.
También $\mathtt{gl}_k^0(V) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_Z \mathtt{gl}_k(V^i)$ con $\Phi(f) = \oplus_Z f^i$ es un isomorfismo lineal y
$\Phi([a,b]) = \oplus[a,b]^n = \oplus ab - ba = \oplus a^n b^n - b^n a^n = [\oplus a^n, \oplus b^n] = \oplus[a^n, b^n] = [\Phi(a), \Phi(b)]$

**Proposición 10.6.3.** *Sea $A$ una $k$-álgebra graduada cuyo producto satisface:*
$a(bc) - (ab)c = (-1)^{\beta\gamma}(a(cb) - (ac)b)$. *Entonces el espacio vectorial graduado subyacente de $A$ junto al conmutador $[a,b] = ab - (-1)^{\alpha\beta}ba$ es un álgebra de Lie graduada.*

*Demostración.* Nuevamente la condición uno y dos de álgebra de Lie graduada son triviales. Demostremos la condición tres:
Reescribamos la hipótesis: $a(bc) - (ab)c = (-1)^{\beta\gamma}(a(cb) - (ac)b) \iff$
$a(bc) - (ab)c = (-1)^{\beta\gamma}a(cb) - (-1)^{\beta\gamma}(ac)b \iff -(ab)c + (-1)^{\beta\gamma}(ac)b = (-1)^{\beta\gamma}a(cb) - a(bc)$.
Multipliquemos ambos miembros por $-(-1)^{\alpha\gamma}$:
$(-1)^{\alpha\gamma}(ab)c - (-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}(ac)b = -(-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}a(cb) + (-1)^{\alpha\gamma}a(bc) \iff$
$(-1)^{\alpha\gamma}(ab)c - (-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}(ac)b = (-1)^{\alpha\gamma}a[b,c]$
Intercambiando los roles de $a, b, c$ resultan las siguientes tres ecuaciones:

$$(-1)^{\alpha\gamma}(ab)c - (-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}(ac)b = (-1)^{\alpha\gamma}a[b,c]$$

$$(-1)^{\beta\alpha}(bc)a - (-1)^{(\beta+\gamma)\alpha}(ba)c = (-1)^{\beta\alpha}b[c,a]$$

$$(-1)^{\gamma\beta}(ca)b - (-1)^{(\gamma+\alpha)\beta}(cb)a = (-1)^{\gamma\beta}c[a,b]$$

Sumemos las tres ecuaciones, pero antes notar que el primer termino del primer renglón (lo llamaré 1-1) y el segundo del segundo (2-2) se juntan formando:

$$(-1)^{\alpha\gamma}(ab)c - (-1)^{(\beta+\gamma)\alpha}(ba)c = (-1)^{\alpha\gamma}(ab - (-1)^{\alpha\beta}ba)c = (-1)^{\alpha\gamma}[a,b]c$$

Análogamente se juntan los términos (2-1) con (3-2) y el (1-2) con el (3-1). Luego se obtiene

$$(-1)^{\gamma\alpha}[a,b]c + (-1)^{\alpha\beta}[b,c]a + (-1)^{\beta\gamma}[c,a]b = (-1)^{\alpha\gamma}a[b,c] + (-1)^{\beta\alpha}b[c,a] + (-1)^{\gamma\beta}c[a,b]$$

Ahora el primer termino con el sexto se juntan para formar:

$$(-1)^{\gamma\alpha}[a,b]c - (-1)^{\gamma\beta}c[a,b] = (-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c]$$

teniendo en cuenta que $(-1)^{\alpha\gamma}(-1)^{\gamma\beta} = (-1)^{\gamma\alpha+\beta\gamma}$ y $(-1)^{\alpha\gamma}(-1)^{\gamma\alpha} = 1$.
De la misma manera se agrupan los términos segundo y cuarto, y el tercero y el quinto dejando lo siguiente:

$$(-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c] + (-1)^{\beta\alpha}[[b,c],a] + (-1)^{\gamma\beta}[[c,a],b] = 0$$

□

**Observación 10.6.4.** Esta proposición tiene importancia en la teoría de deformaciones porque algunas de las álgebras que aparecen poseen esta estructura.

## 10.7. Álgebras de Lie graduadas y Derivaciones

**Definición 10.7.1.** Sea $A$ una $k$-álgebra graduada. $D \in \hom_k^n(A,A)$ es una *derivación* de grado $n$ si

$$D(ab) = (Da)b + (-1)^{\alpha n}a(Db) \quad \forall a \in A^\alpha,\ b \in A$$

Entonces $\mathtt{D}_k^n(A) \subset \hom_k^n(A,A)$ y se define $\mathtt{D}_k^\bullet(A) := \bigoplus_Z \mathtt{D}_k^n(A)$ que es un subespacio graduado de $\hom_k^\bullet(A,A)$, o equivalentemente de $\mathtt{gl}_k^\bullet(A)$

**Proposición 10.7.2.** *$\mathtt{D}_k^\bullet(A)$ es una subálgebra de Lie graduada de $\mathtt{gl}_k^\bullet(A)$.*

*Demostración.* Sólo debe verse que el producto es cerrado en $\mathtt{D}_k(A)$ y preserva la graduación. Sea $D \in \mathtt{D}_k^i(A)$, $D' \in \mathtt{D}_k^j(A)$, veamos que $[D,D'] \in \mathtt{D}_k^{i+j}(A)$:
$[D,D'](ab) = (DD' - (-1)^{ij}D'D)(ab) = D(D'(ab)) - (-1)^{ij}D'(D(ab)) =$
$D(D'(a)b + (-1)^{\alpha j}aD'(b)) - (-1)^{ij}D'(D(a)b + (-1)^{i\alpha}aD(b)) =$
$D(D'(a)b) + (-1)^{\alpha j}D(aD'(b)) - (-1)^{ij}D'(D(a)b) - (-1)^{i\alpha+ij}D'(aD(b)) =$
$D(D'(a))b + (-1)^{i(j+\alpha)}D'(a)D(b) +$
$(-1)^{j\alpha}(D(a)D'(b) + (-1)^{i\alpha}aD(D'(b))) +$
$-(-1)^{ij}(D'(D(a))b + (-1)^{j(\alpha+i)}D(a)D'(b)) +$
$-(-1)^{\alpha i+ij}(D'(a)D(b) + (-1)^{j\alpha}aD'(D(b))) =$
$D(D'(a))b + (-1)^{i(j+\alpha)}D'(a)D(b) +$
$(-1)^{j\alpha}D(a)D'(b) + (-1)^{(j+i)\alpha}aD(D'(b)))$
$-(-1)^{ij}D'(D(a))b - (-1)^{j\alpha}D(a)D'(b) +$
$-(-1)^{i\alpha+ij}D'(a)D(b) - (-1)^{i\alpha+ij+j\alpha}aD'(D(b))$.
Juntemos lo términos 1 y 5, 4 y 8, 2 y 7, 3 y 6:
$D(D'(a))b - (-1)^{ij}D'(D(a))b = (D(D'(a)) - (-1)^{ij}D'(D(a)))b = [D,D'](a)b$.
$(-1)^{(j+i)\alpha}aD(D'(b))) - (-1)^{\alpha(j+i)+ji}aD'(D(b)) = (-1)^{\alpha(j+i)}a[D,D'](b)$.
$(-1)^{i(j+\alpha)}D'(a)D(b) - (-1)^{i\alpha+ij}D'(a)D(b) = 0$.
$(-1)^{j\alpha}D(a)D'(b) - (-1)^{j\alpha}D(a)D'(b) = 0$.
$\Longrightarrow [D,D'](ab) = [D,D'](a)b + (-1)^{\alpha(j+i)}a[D,D'](b)$ es una derivación de grado $i+j$. □

**Definición 10.7.3.** Sea $E$ un álgebra de Lie graduada. Sea $a \in E$.
Denotamos por $ad_E a : E \to E$ al morfismo lineal $x \to [a, x]$.
La aplicación $a \to ad_E a$ se llama la *adjunción*.

**Proposición 10.7.4.** *Si $a \in E^\alpha \implies ad_E a \in \mathtt{D}_k^\alpha(E)$. Más aún $E \xrightarrow{ad_E} \mathtt{D}_k^\bullet(E)$ es un morfismo de álgebras de Lie graduadas y la imagen es un ideal graduado de $\mathtt{D}_k^\bullet(E)$.*

*Demostración.* $ad_E a$ es una derivación de grado $\alpha$ debido a Jacobi:
$ad_E a([b, c]) = [ad_E a(b), c] + (-1)^{\alpha\beta}[b, ad_E a(c)] \iff$
$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\alpha\beta}[b, [a, c]] \iff$
$-(-1)^{\alpha(\beta+\gamma)}[[b, c], a] = [[a, b], c] + (-1)^{\alpha\beta}(-1)^{\beta(\alpha+\gamma)}(-1)^{\gamma\alpha}[[c, a], b] \iff$
$-(-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma}[[b, c], a] = [[a, b], c] + (-1)^{\gamma\beta+\alpha\gamma}[[c, a], b] \iff$
$0 = (-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma}[[b, c], a] + [[a, b], c] + (-1)^{\gamma\beta+\alpha\gamma}[[c, a], b] \iff$
$0 = (-1)^{\alpha\beta}[[b, c], a] + (-1)^{\alpha\gamma}[[a, b], c] + (-1)^{\gamma\beta}[[c, a], b]$
De la misma cuenta sale que es un morfismo de álgebras de Lie graduadas:
$ad_E([a, b])(c) = [ad_E a, ad_E b](c) \iff$
$[[a, b], c] = ad_E a(ad_E b(c)) - (-1)^{\alpha\beta} ad_E b(ad_E a(c)) \iff$
$[[a, b], c] = [a, [b, c]] - (-1)^{\alpha\beta}[b, [a, c]]$
Reordenando los términos obtenemos $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\alpha\beta}[b, [a, c]]$ que es equivalente a Jacobi por la cuenta anterior.
Por último, si $a \in E^\alpha$, $D \in \mathtt{D}^n(E)$ entonces es fácil ver que $[D, ad_E a] = ad_E Da$ o sea, que la imagen del morfismo adjunción es un ideal graduado de $\mathtt{D}(E)$:
$[D, ad_E a](c) = D(ad_E a(c)) - (-1)^{n\alpha} ad_E a(D(c)) = D([a, c]) - (-1)^{n\alpha}[a, D(c)] =$
($D$ es una derivación)$= [Da, c] = ad_E(Da)(c)$. □

**Observación 10.7.5.** El núcleo de la aplicación adjunción es el centro del álgebra de Lie $E$ ya que $\ker(ad_E) = \{a \in E \mid [a, x] = 0 \quad \forall x \in E\} =: Z(E)$

**Definición 10.7.6.** La imagen de la adjunción es un álgebra de Lie graduada y se llama *derivaciones internas*. Se denota por $\mathtt{D}_i$. Notar que es isomorfo al cociente del álgebra por su centro.
Por otro lado, el cociente $\mathtt{D}(E)/\mathtt{D}_i(E)$ se llama *derivaciones externas* de $E$. También es un álgebra de Lie graduada.

## 10.8. Complejos definidos por derivaciones de álgebras graduadas

Sea $A$ un álgebra graduada de tipo $Z$ y sea $D$ una derivación homogénea de grado $\alpha$ tal que $D \circ D = 0$. Entonces $(A, D)$ es un complejo graduado en $Z$ y podemos calcular su cohomología.
Sea $Z(A, D)$ el núcleo de $D$ y sea $B(A, D)$ su imagen. Ambos son subespacios vectoriales graduados de $A$, llamados los $D$-*cociclos* y los $D$-*cobordes* respectivamente. Luego el espacio cociente $H(A, D) := Z(A, D)/B(A, D)$ adquiere estructura graduada y se llama *el grupo cohomológico de $A$ con respecto a $D$*.

**Observación 10.8.1.** El hecho de que $D$ sea una derivación implica que $Z(A, D)$ es una subálgebra de $A$ y $B(A, D)$ un ideal de $Z(A, D)$.
$a, b \in Z(A, D) \implies D(ab) = aD(b) + (-1)^{\alpha\beta} D(a)b = 0 \implies ab \in Z(A, D)$.
Luego el núcleo de la derivación es una subálgebra graduada de $A$.

$D(b) \in B(A,D)$, $a \in Z(A,D) \Longrightarrow aD(b) = D(ab) - (-1)^{\alpha\beta}D(a)b = D(ab) \in B(A,D)$.
Luego la imagen de la derivación es un ideal graduado del núcleo. Es graduado porque $gr_Z(aD(b)) = \alpha + (n+\beta) = n + (\alpha+\beta) = gr_Z(D(ab))$.

**Corolario 10.8.2.** *Si $D$ es una derivación homogénea tal que $D \circ D = 0$ de un álgebra graduada $A$ entonces el espacio $H(A,D)$ también tiene estructura de álgebra graduada. Si $A$ es conmutativa, anticonmutativa, asociativa, o de Lie también lo será $H(A,D)$.*

**Observación 10.8.3.** Sea $E$ un álgebra de Lie graduada y sea $a \in E^\alpha$ de grado impar tal que $[a,a] = 0$. Entonces aplicando la adjunción se tiene que $0 = ad_E([a,a]) = [ad_Ea, ad_Ea] = ad_Ea \circ ad_Ea + ad_Ea \circ ad_Ea = 2(ad_Ea \circ ad_Ea) \Longrightarrow ad_Ea \circ ad_Ea = 0$.
Con lo cual se puede formar el grupo cohomológico $H(E, ad_Ea)$ que nuevamente es un álgebra de Lie graduada. Este espacio tiene relevancia en la teoría de deformaciones.

## 10.9. Producto semidirecto

**Proposición 10.9.1.** *Si $E$ y $F$ son álgebras de Lie graduadas del mismo tipo $Z$ y se tiene un morfismo de álgebras de Lie graduadas $F \to \mathcal{D}(E) \mid f \to D_f$ entonces se le puede asignar al espacio vectorial graduado $E \oplus F = \bigoplus_Z E^n \oplus F^n$ una estructura de álgebra de Lie graduada tal que $E$ sea un ideal y $F$ una subálgebra mediante el siguiente producto:*

$$[(a,f),(b,g)] := ([a,b] + D_fb - (-1)^{\alpha\beta}D_ga, [f,g]) \quad \mid a \in E^\alpha,\ b \in E^\beta,\ f \in F^\alpha,\ g \in F^\beta$$

*Demostración.* Veamos primero que se tiene realmente un álgebra de Lie graduada. Para esto corroboremos que el producto es graduada, antisimétrico y cumple Jacobi.
Recordar que los morfismos de álgebras graduadas tienen grado cero, con lo cual se tiene que $[a,b] + D_fb - (-1)^{\alpha\beta}D_ga$ es homogéneo de grado $\alpha+\beta$ y $[f,g]$ también. Luego el producto es graduado.
La antisimetría también sale de la fórmula,
$[(a,f),(b,g)] = ([a,b]+D_fb-(-1)^{\alpha\beta}D_ga, [f,g]) = -(-1)^{\alpha\beta}([b,a]+D_ga-(-1)^{\beta\alpha}D_fb, [g,f]) = -(-1)^{\alpha\beta}[(b,g),(a,f)]$.
Por último veamos Jacobi:
$[[(a,f),(b,g)],(c,h)] = [([a,b] + D_fb - (-1)^{\alpha\beta}D_ga, [f,g]),(c,h)] =$
$([[a,b] + D_fb - (-1)^{\alpha\beta}D_ga, c] + D_{[f,g]}c +$
$-(-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}D_h([a,b] + D_fb - (-1)^{\alpha\beta}D_ga), [[f,g],h]) =$
$([[a,b],c] + [D_fb,c] - (-1)^{\alpha\beta}[D_ga,c] + D_{[f,g]}c +$
$-(-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}D_h([a,b]) - (-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}D_h(D_fb) + (-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}D_h(D_ga), [[f,g],h])$.
Planteando la condición de Jacobi, $(-1)^{xz}[[x,y],z] + (-1)^{yx}[[y,z],x] + (-1)^{zy}[[z,x],y] = 0$ y reescribiendo cada término con su signo correspondiente queda:
$(-1)^{\alpha\gamma}([[a,b],c] + [D_fb,c] - (-1)^{\alpha\beta}[D_ga,c] + D_{[f,g]}c +$
$-(-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}D_h([a,b]) - (-1)^{(\alpha+\beta)\gamma}D_h(D_fb) + (-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}D_h(D_ga), [[f,g],h]) +$
$(-1)^{\beta\alpha}([[b,c],a] + [D_gc,a] - (-1)^{\beta\gamma}[D_hb,a] + D_{[g,h]}a +$
$-(-1)^{(\beta+\gamma)\alpha}D_f([b,c]) - (-1)^{(\beta+\gamma)\alpha}D_f(D_gc) + (-1)^{\beta\gamma+\beta\alpha+\gamma\alpha}D_f(D_hb), [[g,h],f]) +$
$(-1)^{\gamma\beta}([[c,a],b] + [D_ha,b] - (-1)^{\gamma\alpha}[D_fc,b] + D_{[h,f]}b +$
$-(-1)^{(\gamma+\alpha)\beta}D_g([c,a]) - (-1)^{(\gamma+\alpha)\beta}D_g(D_ha) + (-1)^{\gamma\alpha+\gamma\beta+\alpha\beta}D_g(D_fc), [[h,f],g])$
distribuyamos los signos exteriores:
$((-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c] + (-1)^{\alpha\gamma}[D_fb,c] - (-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma}[D_ga,c] + (-1)^{\alpha\gamma}D_{[f,g]}c +$

$-(-1)^{\beta\gamma}D_h([a,b])-(-1)^{\beta\gamma}D_h(D_fb)+(-1)^{\alpha\beta+\beta\gamma}D_h(D_ga),(-1)^{\alpha\gamma}[[f,g],h])+$
$((-1)^{\beta\alpha}[[b,c],a]+(-1)^{\beta\alpha}[D_gc,a]-(-1)^{\beta\gamma+\beta\alpha}[D_hb,a]+(-1)^{\beta\alpha}D_{[g,h]}a+$
$-(-1)^{\gamma\alpha}D_f([b,c])-(-1)^{\gamma\alpha}D_f(D_gc)+(-1)^{\beta\gamma+\gamma\alpha}D_f(D_hb),(-1)^{\beta\alpha}[[g,h],f])+$
$((-1)^{\gamma\beta}[[c,a],b]+(-1)^{\gamma\beta}[D_ha,b]-(-1)^{\gamma\alpha+\gamma\beta}[D_fc,b]+(-1)^{\gamma\beta}D_{[h,f]}b+$
$-(-1)^{\alpha\beta}D_g([c,a])-(-1)^{\alpha\beta}D_g(D_ha)+(-1)^{\gamma\alpha+\alpha\beta}D_g(D_fc),(-1)^{\gamma\beta}[[h,f],g])$
agrupemos todo en un solo término:
$((-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c]+(-1)^{\alpha\gamma}[D_fb,c]-(-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma}[D_ga,c]+(-1)^{\alpha\gamma}D_{[f,g]}c+$
$-(-1)^{\beta\gamma}D_h([a,b])-(-1)^{\beta\gamma}D_h(D_fb)+(-1)^{\alpha\beta+\beta\gamma}D_h(D_ga)+$
$(-1)^{\beta\alpha}[[b,c],a]+(-1)^{\beta\alpha}[D_gc,a]-(-1)^{\beta\gamma+\beta\alpha}[D_hb,a]+(-1)^{\beta\alpha}D_{[g,h]}a+$
$-(-1)^{\gamma\alpha}D_f([b,c])-(-1)^{\gamma\alpha}D_f(D_gc)+(-1)^{\beta\gamma+\gamma\alpha}D_f(D_hb)+$
$(-1)^{\gamma\beta}[[c,a],b]+(-1)^{\gamma\beta}[D_ha,b]-(-1)^{\gamma\alpha+\gamma\beta}[D_fc,b]+(-1)^{\gamma\beta}D_{[h,f]}b+$
$-(-1)^{\alpha\beta}D_g([c,a])-(-1)^{\alpha\beta}D_g(D_ha)+(-1)^{\gamma\alpha+\alpha\beta}D_g(D_fc),$
$(-1)^{\alpha\gamma}[[f,g],h]+(-1)^{\beta\alpha}[[g,h],f]+(-1)^{\gamma\beta}[[h,f],g])$
Notar que el séptimo renglón (la segunda coordenada del elemento) es la condición de Jacobi en $F$ y también el primer término de los renglones uno, tres y seis son Jacobi en $E$. Luego ambas expresiones se simplifican, dejando:
$((-1)^{\alpha\gamma}[D_fb,c]-(-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma}[D_ga,c]+(-1)^{\alpha\gamma}D_{[f,g]}c+$
$-(-1)^{\beta\gamma}D_h([a,b])-(-1)^{\beta\gamma}D_h(D_fb)+(-1)^{\alpha\beta+\beta\gamma}D_h(D_ga)+$
$(-1)^{\beta\alpha}[D_gc,a]-(-1)^{\beta\gamma+\beta\alpha}[D_hb,a]+(-1)^{\beta\alpha}D_{[g,h]}a+$
$-(-1)^{\gamma\alpha}D_f([b,c])-(-1)^{\gamma\alpha}D_f(D_gc)+(-1)^{\beta\gamma+\gamma\alpha}D_f(D_hb)+$
$(-1)^{\gamma\beta}[D_ha,b]-(-1)^{\gamma\alpha+\gamma\beta}[D_fc,b]+(-1)^{\gamma\beta}D_{[h,f]}b+$
$-(-1)^{\alpha\beta}D_g([c,a])-(-1)^{\alpha\beta}D_g(D_ha)+(-1)^{\gamma\alpha+\alpha\beta}D_g(D_fc),0)$
Como $D_f$ es derivación:
$(-1)^{\alpha\gamma}[D_fb,c]-(-1)^{\gamma\alpha}D_f([b,c])-(-1)^{\gamma\alpha+\gamma\beta}[D_fc,b]=$
$(-1)^{\alpha\gamma}[D_fb,c]-(-1)^{\gamma\alpha}D_f([b,c])+(-1)^{\gamma\alpha+\gamma\beta+(\alpha+\gamma)\beta}[b,D_fc]=$
$(-1)^{\gamma\alpha}([D_fb,c]-D_f([b,c])+(-1)^{\beta\alpha}[b,D_fc])=0.$
Como $D_g$ es derivación:
$-(-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma}[D_ga,c]+(-1)^{\beta\alpha}[D_gc,a]-(-1)^{\alpha\beta}D_g([c,a])=$
$(-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma+(\beta+\alpha)\gamma}[c,D_ga]+(-1)^{\beta\alpha}[D_gc,a]-(-1)^{\alpha\beta}D_g([c,a])=$
$(-1)^{\alpha\beta}((-1)^{\beta\gamma}[c,D_ga]+[D_gc,a]-D_g([c,a]))=0.$
Como $D_h$ es derivación:
$-(-1)^{\beta\gamma}D_h([a,b])-(-1)^{\beta\gamma+\beta\alpha}[D_hb,a]+(-1)^{\gamma\beta}[D_ha,b]=$
$-(-1)^{\beta\gamma}D_h([a,b])+(-1)^{\beta\gamma+\beta\alpha+\beta\alpha+\alpha\gamma}[a,D_hb]+(-1)^{\gamma\beta}[D_ha,b]=$
$-(-1)^{\beta\gamma}(D_h([a,b])+(-1)^{\alpha\gamma}[a,D_hb]+[D_ha,b])=0$
Luego después de esto, va quedando:
$((-1)^{\alpha\gamma}D_{[f,g]}c-(-1)^{\beta\gamma}D_h(D_fb)+(-1)^{\alpha\beta+\beta\gamma}D_h(D_ga)+$
$+(-1)^{\beta\alpha}D_{[g,h]}a-(-1)^{\gamma\alpha}D_f(D_gc)+(-1)^{\beta\gamma+\gamma\alpha}D_f(D_hb)+$
$+(-1)^{\gamma\beta}D_{[h,f]}b-(-1)^{\alpha\beta}D_g(D_ha)+(-1)^{\gamma\alpha+\alpha\beta}D_g(D_fc),0)$
Por último recordar que se tenía un morfismo de álgebras de Lie, donde la estructura de álgebra de Lie de $\mathtt{D}(E)$ es la del conmutador graduado, luego:
$(-1)^{\alpha\gamma}D_{[f,g]}c-(-1)^{\gamma\alpha}D_f(D_gc)+(-1)^{\gamma\alpha+\alpha\beta}D_g(D_fc)=$
$-(-1)^{\alpha\gamma}(-D_{[f,g]}+D_f(D_g)-(-1)^{\alpha\beta}D_g(D_f))(c)=0.$
$(-1)^{\alpha\beta+\beta\gamma}D_h(D_ga)+(-1)^{\beta\alpha}D_{[g,h]}a-(-1)^{\alpha\beta}D_g(D_ha)=$
$-(-1)^{\alpha\beta}(-(-1)^{\beta\gamma}D_h(D_g)-D_{[g,h]}+D_g(D_h))(a)=0.$
$-(-1)^{\beta\gamma}D_h(D_fb)+(-1)^{\beta\gamma+\gamma\alpha}D_f(D_hb)+(-1)^{\gamma\beta}D_{[h,f]}b=$

$-(-1)^{\gamma\beta}(D_h(D_f)-(-1)^{\gamma\alpha}D_f(D_h)-D_{[h,f]})(b)=0.$
Conclusión: el producto definido le da a $E\oplus F$ una estructura de álgebra de Lie graduada.
El hecho de que $F$ sea una subálgebra y $E$ un ideal es inmediato del producto.
La inclusión de $F$ en $E\oplus F$ manda $f\to(0,f)$. Como $[(0,f),(0,g)]=(0,[f,g])$ el producto es cerrado haciendo de $F$ una subálgebra.
Por otra parte $[(a,0),(b,g)]=([a,b]-(-1)^{\alpha\beta}D_g b,0)\in E$, o sea, $E$ es un ideal. □

**Definición 10.9.2.** El álgebra de Lie graduada recién construida se llama *el producto semidirecto de $E$ por $F$* con respecto a la representación $F\to\mathtt{D}(E)$

**Ejemplo 10.9.3.** Sea $E$ un álgebra de Lie graduada y sea $D$ una derivación de grado impar $\alpha$ tal que $D\circ D=0$. Entonces el $k$-subespacio de $\mathtt{D}(E)$ de dimensión uno generado por $D$, o sea, $kD$ es una $k$-subálgebra graduada, ya que

$$[D,D]=D\circ D+D\circ D=2(D\circ D)=0\in kD$$

Luego podemos construir el producto semidirecto $E\oplus kD$ con respecto a la inclusión $kD\subset\mathtt{D}(E)$.
Notar que los elementos de grado $\alpha$ son de la forma $x+D$ y el corchete para elementos $y\in E^\beta$ queda, $[x+D,y]=[x,y]+D(y)$.

## 10.10. El grupo general lineal de un espacio vectorial graduado

**Definición 10.10.1.** Sea $V$ un $k$-espacio vectorial graduado. Definimos $GL(V)$ *el grupo general lineal* de $V$ como $\mathrm{aut}_k^0(V)$.

**Observación 10.10.2.** Notar que $GL(V)=\mathrm{aut}_k^0(V)\cong\bigoplus_Z\mathrm{aut}_k(V^n)=\bigoplus_Z GL(V^n)$.
Sale del hecho que todo morfismo $f\in GL(V)$ es de la forma $f=\oplus_Z f^n$, con $f^n\in GL(V^n)$.
Por otro lado si $G$ es un grupo, todo morfismo $G\xrightarrow{\rho}GL(V)$ queda unívocamente determinado por $G\xrightarrow{\rho^n}GL(V^n)$ (es debido a la propiedad universal de la suma directa), o sea, $\rho=\oplus_Z\rho^n$

**Observación 10.10.3.** Supongamos que $V=\bigoplus_Z V^n$ con $\dim_k V^n<\infty$.
Sea $G$ un grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathtt{g}$
Diremos que $G\xrightarrow{\rho=\oplus\rho^n}\mathrm{aut}_k^0(V)$ es una *representación* de $G$ en $V$ si $G\xrightarrow{\rho^n}\mathrm{aut}_k(V^n)$ es un morfismo de grupos de Lie $\forall n\in Z$.
Para cada $n\in Z$ se tiene $\mathtt{g}\xrightarrow{d\rho^n}\mathtt{gl}(V^n)$ el diferencial de la representación $\rho^n$. Luego queda determinado un único morfismo $\mathtt{g}\xrightarrow{d\rho}\mathtt{gl}_k^0(V)\cong\oplus_Z\mathtt{gl}_k(V^n)$, que lo llamaremos el *diferencial* de $G\xrightarrow{\rho}\mathrm{aut}_k^0(V)$.

**Observación 10.10.4.** Un caso más restrictivo del anterior es cuando la representación cae en $\mathrm{aut}_{k-Lie}^0(E)\subset\mathrm{aut}_k^0(E)$ donde $E$ es una $k$-álgebra de Lie graduada y supongamos que $\mathtt{g}$, el álgebra de Lie del grupo es $E^0$.
En este caso, (ver [24] p.117) se tiene que la representación $G\xrightarrow{\rho}\mathrm{aut}_{k-Lie}^0(E)$ tiene como diferencial $E^0\xrightarrow{d\rho}\mathtt{D}_k^0(E)$.
En otras palabras, $\rho(g)[x,y]=[\rho(g)x,\rho(g)y]$ y $d\rho(a)[x,y]=[d\rho(a)x,y]+[x,d\rho(a)y]$.
Luego notar que el cono $M:=\{x\in E^1\mid[x,x]=0\}$ es invariante por la acción $\rho(g)$, $g\in G$.

Supongamos ahora el caso particular donde $\rho = Ad : G \longrightarrow \mathrm{aut}_{k-Lie}(E)$, luego su diferencial es $E^0 \xrightarrow{ad_{E^0}} \mathtt{D}_k^0(E)$. Más aún, si $G = \mathrm{aut}_k(V)$ con $V$ un $k$-espacio vectorial de dimensión finita, se tiene que $E^0 = \mathrm{end}_k(V)$ y que $G$ actúa por conjugación ya que
$Ad(B)(C) = BCB^{-1}$ ([24] p.114).
Por otro lado, recordar también que $e^{ad_{E^0}a} = Ad(e^a) \in \mathrm{aut}_{k-Lie}(E)$ ([24] p.114 (5)), luego, $e^{ad_{E^0}a}(x) = Ad(e^a)(x) = e^a x e^{-a}$, en otras palabras, la exponencial de la adjunción $E^0 \xrightarrow{e^{ad_E}} \mathrm{aut}_{k-Lie}(E)$ actúa por conjugación y como vimos recién preserva el cono $M$.
Para terminar esta observación, si $G \subset \mathrm{aut}_k(V)$ se tiene que $E^0 \subset \mathrm{end}_k(V)$ por la relación que hay entre subgrupos cerrados simplemente conexos y subálgebras de Lie, con lo cual, el análisis previo sigue vigente, o sea, la exponencial de la adjunción actúa por conjugación.
Por simplicidad notaré a $e^{ad_{E^0}a}$ como $e^a$.

**Observación 10.10.5.** La siguiente observación la hago a modo ilustrativo: existe un teorema (Poincaré-Birkoff-Witt) que afirma que toda $k$-álgebra de Lie $E^0$ tiene una representación fiel sobre un $k$-espacio vectorial $V$, o sea, $E^0 \hookrightarrow \mathtt{gl}_k(V)$. Más aún, si $E^0$ es de dimensión finita (que será nuestro caso), también lo es $V$ (teorema de Ado para característica cero, Iwasawa característica $p > 0$). Con lo cual los grupos de Lie con los que estaremos trabajando serán todos subgrupos cerrados simplemente conexos de $GL_k(V)$, o sea, básicamente, cambios de base.

## 10.11. Módulos diferenciales

**Definición 10.11.1.** Sea $A$ un anillo con unidad, se dirá $(M, d)$ un *$A$-módulo a izquierda diferencial* si $M$ es un $A$-módulo a izquierda y $d$ es un endomorfismo de $M$ tal que $d^2 = 0$.

**Observación 10.11.2.** Más adelante usaremos álgebras diferenciales, en ese caso, al diferencial se le pide a parte que sea una derivación.

**Definición 10.11.3.** Un morfismo $(M, d) \xrightarrow{f} (N, e)$ de $A$-módulos diferenciales es un morfismo de $A$-módulos tal que $ef = fd$

**Observación 10.11.4.** Notar que un submódulo diferencial de $(M, d)$ será $(N, d|_N)$ donde $N \subset M$ es un submódulo y el diferencial es la restricción del de $M$.
De esta manera se tiene el cociente $(M/N, \overline{d})$ donde el diferencial es el inducido al cociente.

**Observación 10.11.5.** Pueden definirse las sucesiones de módulos diferenciales como sucesiones de módulos donde cada módulo es diferencial y cada morfismo también.

**Observación 10.11.6.** Los $A$-módulos diferenciales forman una categoría. Dado que cualquier $A$-módulo junto al diferencial nulo es un módulo diferencial, la categoría de $A$-módulos es una subcategoría plena y fiel de la categoría de $A$-módulos diferenciales.
Notar que esta construcción es posible realizarla en cualquier categoría abeliana.

**Definición 10.11.7.** Sea $(M, d)$ un $A$-módulo diferencial.
Definimos $Z(M) := \ker(d)$, $B(M) := \mathrm{im}(d)$. Los llamaremos *ciclos* y *bordes* respectivamente.
Dado que $B(M) \subset Z(M)$ se puede definir el *$A$-módulo derivado* $H(M) := Z(M)/B(M)$.
Notar que todo morfismo $(M, d) \xrightarrow{f} (N, e)$ manda $Z(M)$ en $Z(N)$ y $B(M)$ en $B(N)$ luego se define el morfismo de $A$-módulos $H(M) \xrightarrow{[f]} H(N)$.

**Observación 10.11.8.** Se tiene un funtor de a la categoría de $A$-módulos diferenciales en la de $A$-módulos $(M, d) \to H(M)$

**Observación 10.11.9.** Sea $(M, d)$ un $A$-módulo diferencial a izquierda y sea L un $A$-módulo a derecha. Podemos considerar $(M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L, d \otimes id_L)$.
Se tiene un morfismo canónico $H(M) \otimes L \to H(M \otimes L)$ definido como sigue: $[z] \otimes l \to [z \otimes l]$.
Veamos bien definido, $z - z' = dx$ con $dz' = 0$, entonces $[z' \otimes l] = [z + dx \otimes l] = [z \otimes l] + [dx \otimes l] = [z \otimes l]$.
Luego se tiene el morfismo mencionado. Cuando $L$ es un $A$-módulo playo, este morfismo será biyectivo.

**Definición 10.11.10.** Sea $(M, d)$ y $(N, e)$ dos $A$-módulos diferenciales y dos morfismos $(M, d) \xrightarrow{f,g} (N, e)$. Se dirá que $f$ es *homotópico* a $g$ $(f \sim g)$ si existe una aplicación $A$-lineal tal que $g - f = hd + eh$.
Notar que si $x$ es un ciclo de $M$, se tiene que $g(x) - f(x)$ es un borde de $N$, luego los morfismos inducidos $H(M) \to H(N)$ coinciden.

**Observación 10.11.11.** La relación de homotopía sobre morfismos es una relación de equivalencia.

**Definición 10.11.12.** Diremos que dos módulos diferenciales $M$ y $N$ son *homotópicos* si existen morfismos $f$ y $g$ tal que $fg \sim id_N$ y $gf \sim id_M$. En ese caso $H(M) \cong H(N)$.
En particular diremos que un módulo es *homotópico a cero* si $id_M \sim 0$, en ese caso $H(M) = 0$, o sea, todo ciclo es un borde.

**Definición 10.11.13.** Dos $A$-módulos diferenciales se dirán cuasi-isomorfos si existe un morfismo que induce un isomorfismo en los derivados.

## 10.12. Álgebras de Lie graduadas diferenciales

**Definición 10.12.1.** Un *álgebra de Lie graduada diferencial* es un par $(E, d)$ donde $E$ es un álgebra de Lie graduada sobre un $k$-espacio vectorial graduado y $d$ es una derivación de grado $\overline{d}$ tal que $d^2 = 0$.

**Observación 10.12.2.** Dada que $d$ es un endomorfismo de un álgebra de Lie graduada se tiene que $d(E^i) \subset E^{i+\overline{d}}$ y al ser derivación se tiene que $d[a, b] = [da, b] + (-1)^{\overline{a}\overline{d}}[a, db]$

**Observación 10.12.3.** En nuestro caso usaremos derivaciones de grado uno.

**Notación 10.12.4.** Llamaremos *DGLA* a la categoría de $k$-álgebras de Lie graduadas diferenciales de tipo $\mathbb{Z}$. Donde el diferencial tiene grado uno. Usaremos $k$ de característica cero.

**Observación 10.12.5.** Recordar que $Z(E, d) = \ker(d)$ es una subálgebra de Lie graduada de $E$ y $B(E, d) = \operatorname{im}(d)$ es un ideal de $Z(E, d)$. El cociente hereda la estructura de álgebra de Lie graduada. (ver 10.8.1). Luego $H(E, d)$ es una *DGLA* con diferencial nulo.

**Definición 10.12.6.** Una *DGLA* se dirá *formal* si es cuasi-isomorfa como *DGLA* a su cohomología.

## 10.13. Álgebras de Lie nilpotentes

**Definición 10.13.1.** Una $k$-álgebra de Lie $E$ de dimensión finita se dice nilpotente si para cada $a \in E$, $ad_E a \in \text{end}_k(E)$ es nilpotente. o sea, para cada $a \in E$ existe un número finito de productos tal que $[a, [a, [a, [\ldots, [a, -]]] = 0$.

**Observación 10.13.2.** Existe un funtor *exp* de la categoría de álgebras de Lie nilpotentes en la categoría de grupos:
Para cada álgebra de Lie nilpotente existe una biyección $N \xrightarrow{e} exp(N) =: \{e^a \mid a \in N\}$ tal que:

- Si $[a, b] = 0 \Longrightarrow e^a e^b = e^{a+b}$. En general $e^a e^b = e^{a*b}$ donde $a * b \in N$ es un producto definido por la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff, haciendo de $(N, *)$ un grupo.
- Para cada $k$-espacio vectorial $V$ y cada morfismo de álgebras de Lie $N \xrightarrow{\rho} \text{end}_k(V)$ tal que $\rho(N)$ es una subálgebra nilpotente, existe un morfismo de grupos $exp(N) \xrightarrow{exp(\rho)} \text{aut}_k(V) \mid exp(\rho)(e^a) = e^{\rho(a)} =: \sum_0^\infty \frac{\rho(a)^n}{n!}$

**Lema 10.13.3.** *$V$ un $k$-espacio vectorial y $N \xrightarrow{\rho} end_k(V)$ una representación de un álgebra de Lie nilpotente $N$. Sea $V \times V \xrightarrow{\phi} W$ una función bilineal simétrica, $q(v) := \phi(v, v)$ su función cuadrática asociada y $M$ el cono $q^{-1}(0) = \{v \in V \mid \phi(v, v) = 0\}$.
Si $\phi(\rho(a)v, v) = 0 \quad \forall v \in M$ entonces $M$ es invariante por $e^{\rho(a)} \quad \forall a \in N$.*

*Demostración.* Para cada $v \in V$ se define la función polinomial $k \xrightarrow{F_v} W$ como:

$$F_v(t) := q(e^{\rho(ta)}(v))$$

donde $a \in N$ fijo. Veamos que $F_v$ es una función constante, para esto recordar que $\frac{\partial}{\partial t}\phi(x(t), y(t)) = \phi(\frac{\partial x(t)}{\partial t}, y(t)) + \phi(x(t), \frac{\partial y(t)}{\partial t})$,
también que $\frac{\partial}{\partial t} e^{\rho(ta)}(v) = \frac{\partial}{\partial t}(v + t\rho(a)(v) + \frac{t^2}{2}\rho(a)^2(v) + \ldots) = \rho(a)(v) + \frac{t}{2}\rho^2(a)(v) + t^3 \ldots$
Para todo $t, s \in k$, si $u = e^{\rho(sa)}(v)$ se tiene que $F_v(s + t) = F_u(t)$ pues
$F_v(s + t) = qe^{\rho(ta+sa)}(v) = qe^{\rho(ta)}e^{\rho(sa)}(v) = qe^{\rho(ta)}(u) = F_u(t)$.
Por otro lado $\frac{\partial}{\partial t}(F_v)(t) = \frac{\partial}{\partial t}(qe^{\rho(ta)}(v)) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi(e^{\rho(ta)}(v), e^{\rho(ta)}(v))(t) =$
$\phi(\rho(a)(v) + t \ldots, e^{\rho(ta)}(v)) + \phi(e^{\rho(ta)}(v), \rho(a)(v) + t \ldots) =$(es simétrica)$=$
$= 2\phi(\rho(a)(v) + t \ldots, e^{\rho(ta)}(v)) \Longrightarrow$ en $t = 0$, resulta $2\phi(\rho(a)(v), v) =$(hipótesis)$= 0$.
Luego se tiene que $\frac{\partial F_v}{\partial t}(s) = \frac{\partial F_u}{\partial t}(0) = 0$ con lo cual $F_v$ es constante $\forall t \in k$, entonces para $t = 0$ y $t = 1$ se tiene que $q(v) = q(e^{\rho(a)}v)$, o sea, que el cono $M$ es invariante por $e^{\rho(a)}$ con $a \in N$. $\square$

**Corolario 10.13.4.** *Sea $E$ una* DGLA *con $E^0$ nilpotente. Entonces el cono
$M = \{a \in E^1 \mid [a, a] = 0\}$ es estable bajo la exponencial de la adjunción ($e^{ad_E a}$ con $a \in E^0$).*

*Demostración.* Recordar que el corchete en grado impar es simétrico.
Por Jacobi se tiene que $2[v, ad_E a(v)] = 2[v, [a, v]] = -2[v, [v, a]] = [a, [v, v]]$. Luego si $v \in M$, se tiene que $[v, ad_E a(v)] = 0$ cumpliendo la hipótesis del lema previo. $\square$

**Observación 10.13.5.** $E^0$ con el corchete inducido de $E$ es un álgebra de Lie no-graduada pero puede pensarse como graduada en grado cero. Así resulta una subálgebra graduada de $E$ y $\mathrm{end}_k(E^0) \subset \mathrm{end}_k^0(E) \cong \bigoplus_Z \mathrm{end}_k(E^n)$.
Ahora, considerando la adjunción de $E^0$ uno puede extender su imagen a todo $E$ de la siguiente manera: $E^0 \xrightarrow{ad_{E^0}} \mathrm{end}_k(E^0) \subset \mathrm{end}_k^0(E)$, resultando el morfismo $E^0 \xrightarrow{ad_E} \mathrm{end}_k^0(E)$. Notar que como el corchete de $E^0$ es el mismo que el de $E$, $ad_{E^0} = ad_E|_{E^0}$,
aplicando la exponencial ($E^0$ nilpotente) se tiene que

$$E^0 \cong exp(E^0) \xrightarrow{exp(ad_E)} \mathrm{aut}_k^0(E) =: GL(E)$$

Más concretamente, a cada $a \in E^0$ se le asocia el automorfismo de grado cero

$$E \xrightarrow{e^{ad_E a}} E \mid e^{ad_E a}(x) = \sum_0^\infty \frac{(ad_E a)^n}{n!}(x) = x + [a, x] + \frac{1}{2}[a, [a, x]] + \dots$$

Por simplicidad notaré a $e^{ad_E a}$ como $e^a$.

**Observación 10.13.6.** La importancia de las *DGLA* con $E^0$ nilpotente es la siguiente: supongamos dada $E$ una *DGLA* con $E^0$ de dimensión finita. Para cada $(A, m_A)$ anillo de Artin local con cuerpo residual $k$, se construye $E \otimes m_A$ una nueva *DGLA* con $(E \otimes m_A)^0 = E^0 \otimes m_A$ nilpotente. Luego la *DGLA* original se va estudiando en cada anillo de Artin y de alguna manera uno se va a ir aproximando a la *DGLA* original. Esto lo veremos en la sección 12. Si se quiere un ejemplo concreto de esto, ver la sección 11.4.

# 11. Enfoque clásico a la teoría de deformaciones

**Resumen**

Esta sección es la más importante dentro de este trabajo. Se hizo siguiendo [17]. Aquí se estudiarán las deformaciones en general utilizando el enfoque clásico de *DGLA*. Cuando uno quiere deformar, por ejemplo, un álgebra asociativa, un álgebra de Lie, un morfismo, una representación, un módulos, un complejo, una coálgebra, etc., se lo puede pensar como un elemento de una variedad algebraica dentro de un espacio vectorial (esto es si estamos trabajando con dimensión finita, pues las constantes estructurales definen el elemento en cuestión). Veremos que todas sus posibles deformaciones (locales) serán aquellos elementos dentro de un entorno que cumplan lo que se llama la ecuación de Maurer-Cartan. Si bien parecerá descolgada de las deformaciones formales de las secciones anteriores, no lo es. De hecho todas las condiciones que estuvimos extrayendo para deformar formalmente, son todas casos particulares de la ecuación de Maurer-Cartan. Lo veremos en mi sección 11.4. Por último, la teoría aquí descrita es utilizada de manera más general, no sólo para deformar estructuras algebraicas o morfismos, sino también, variedades analíticas o variedades complejas (Kodaira-Spencer, ver [16]). Después de esto, todo se reduce a encontrar una *DGLA* que modele el problema en cuestión.

## 11.1. La ecuación de deformación

Sea $(E, d)$ una *DGLA* sobre un cuerpo de característica cero con $d$ una derivación de grado $\alpha$ impar tal que $d^2 = 0$.

**Definición 11.1.1.** La ecuación

$$da + \frac{1}{2}[a, a] = 0, \quad a \in E^\alpha$$

se llama *la ecuación de deformación*, o de *Maurer-Cartan.*
Sea $M_0 := \{a \in E^\alpha \mid da + \frac{1}{2}[a, a] = 0\}$ el conjunto de sus soluciones.

**Observación 11.1.2.** Reescribamos la ecuación de deformación:
Sea $R := d + E^\alpha \subset E \oplus kd$ (ver 10.9.3), o sea,
R es la variedad lineal en $E \oplus kd$ paralela a $E^\alpha$ que pasa por $d$.
Sea $M := \{x \in R \mid [x, x] = 0\}$.
Notar que si $x = d + a \in R$ se tiene que

$$[x, x] = [d + a, d + a] = [(a, d), (a, d)] = ([a, a] + da + da, [d, d]) = 2da + [a, a]$$

Luego $x \in M \iff a \in M_0$, con lo cual la biyección $E^\alpha \xrightarrow{\bullet + d} R$ manda $M_0$ en $M$.
En vez de estudiar el espacio $M_0$ es conveniente estudiar $M$.
Notar que $M$ es una variedad algebraica definida por ecuaciones cuadráticas: son los ceros de una función cuadrática asociada a una bilineal simétrica. Más aún, si $\dim_k(E^\alpha) = n$ se tiene que $M$ es la intersección de $n$ formas cuadráticas asociadas a $n$ formas bilineales simétricas. En otras palabras, es la intersección de $n$ cuádricas.

**Definición 11.1.3.** Dado $x = d + a \in M$, definimos $d_x := d + ad_E a$ como el *diferencial asociado a $x$* (10.7.3).

**Observación 11.1.4.** Notar que $d_x = ad_{E\oplus kd}x|_E = [x, -]$ ya que

$$ad_{E\oplus kd}x|_E(e) = [(a, d), (e, 0)] = [a, e] + de = (ad_E a + d)(e) = d_x(e)$$

También que $d_x^2 = 0$ ya que

$$d_x^2(e) = (ad_E a + d)(ad_E a + d)(e) = [a, [a, e]] + [a, de] + d[a, e] + d^2(e) =$$

$$= [a, [a, e]] + [a, de] + [da, e] - [a, de] = [a, [a, e]] + [da, e] =$$

$$= (\text{Jacobi}) = \frac{1}{2}[[a, a], e] + [da, e] = [\frac{1}{2}[a, a] + da, e] = 0$$

**Corolario 11.1.5.** *A cada $x \in M$ se le puede asociar un complejo $(E, d_x)$ y el grupo cohomológico $H(E, d_x)$ que es un $k$-espacio vectorial graduado (10.8.2 y 10.8.3).*

**Observación 11.1.6.** El caso más simple y muy importante es cuando $d = 0$. En este caso, $M = M_0$ y $d_x = ad_E x$.

**Observación 11.1.7.** Para un estudio local de $M$ fijamos un punto $m = d + a \in M$ y veamos cuándo $m + u \in M$:

$$[m + u, m + u] = 2[m, u] + [u, u] = 2[d + a, u] + [u, u] =$$

$$= 2[a, u] + 2du + [u, u] = 2(d + ad_E a)(u) + [u, u] = 2d_m(u) + [u, u]$$

Luego $m + u \in M \iff d_m(u) + \frac{1}{2}[u, u] = 0$.

**Definición 11.1.8.** Dado $m \in M$, las soluciones de $d_m(u) + \frac{1}{2}[u, u] = 0$ con $u \in E^\alpha$ se llamarán *deformaciones relativas* a $m$ o *deformaciones locales* de $m$.

## 11.2. El lenguaje de deformaciones

Sea $E$ una $DGLA$ con diferencial de grado uno y con cada $E^i$ de dimensión finita. Se define $R = d + E^1$ y $M = \{x \in R \mid [x, x] = 0\}$. El grupo de Lie simplemente conexo $G$ cuyo álgebra de Lie es $E^0$ actúa en $R$ y en $M$. Ambos espacios son $G$-invariantes (10.10.4). Notar que $M$ es un conjunto algebraico (11.1.2).

Dado que el cuerpo $k$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a $R$ se le da la topología usual de espacio vectorial de dimensión finita y a $M$ la topología inducida.

Dos elementos $x, y \in M$ se dirán *equivalentes* si pertenecen a la misma orbita por $G$.

En los ejemplos siguiente, cada elemento de $M$ representa cierta estructura algebraica y dos se dirán equivalentes si las estructuras son isomorfas.

Si $m \in M$ y $m \in \mathcal{U} \subset M$ es un abierto, cada punto de $x \in \mathcal{U}$ se considerará como una deformación local de $m$.

La deformación se dirá *trivial* si $x$ es equivalente a $m \quad \forall x \in \mathcal{U}$ algún entorno de $m$.

Un elemento $m$ se dirá *rígido* si cualquier deformación (local) es trivial, en otras palabras si $G \cdot m$ es un abierto de $M$.

Una *familia de deformaciones* de $m$ significará un subconjunto arcoconexo $F \subset M$ que contiene a $m$.

Una familia se dirá *localmente completa* en $m$ si $G \cdot F$ es un entorno de $m$.

Si $F$ es una familia de deformaciones que a su vez es una variedad algebraica, analítica o diferenciable, se dirá que $F \subset M$ es una *familia de deformaciones algebraica, analítica o diferenciable.*

## 11.3. Problemas relacionados a la ecuación de deformación

Nombremos un par de ejemplos a modo informativo en donde se ve claramente la importancia de la ecuación de deformación. Si bien no fue evidente, ya hemos utilizado ejemplos en dónde aparece. En la sección (13) los trataremos más de cerca definiendo todas las *DGLA* necesarias. Esta sección es simplemente informativa y orientativa.

**Ejemplo 11.3.1.** A cada $\mathbb{C}$-espacio vectorial $V$ se le puede asociar un álgebra de Lie graduada (en principio con diferencial nulo) $E = \bigoplus_{\mathbb{Z}} \hom(V^{\otimes n+1}, V)$. El corchete en $E$ es tal que las formas bilineales $\mu \in E^1$ definen una multiplicación asociativa en $V \iff [\mu, \mu] = 0$.
Luego el conjunto $M := \{\mu \in E^1 \mid [\mu, \mu] = 0\}$ es exactamente el conjunto de todas las multiplicaciones asociativas en $V$.
Si $\mu \in M$ y $A = (V, \mu)$ es el álgebra asociativa correspondiente, el grupo cohomológico $H^n(E, d_\mu)$ es idéntico al grupo cohomológico definido por Hochschild $H^{n+1}(A, A)$.
A nivel de los complejos, $E$ será el complejo de Hochschild corrido en uno, luego, si bien no son iguales, podría decirse que son homotópicos.
Más aún, si la dimensión del espacio vectorial es finita, $E$ admite una estructura de *DGLA* con grupo estructural $GL(V)$. Se tiene que $\mu_1$ y $\mu_2$ están en la misma orbita $\iff$ las álgebras asociativas correspondientes son isomorfas.

**Ejemplo 11.3.2.** En el caso de las álgebras conmutativas, donde el producto a parte de ser asociativo se le pide conmutatividad, las cohomologías que aparecen son las de Harrison [6].

**Ejemplo 11.3.3.** Una situación similar existe para las álgebras de Lie, en este caso dado un espacio vectorial $V$ se construye $E = \bigoplus_{\mathbb{Z}} \hom_k(\bigwedge^{n+1} V, V)$ con un corchete tal que: $\mu \in E^1$ satisface Jacobi $\iff [\mu, \mu] = 0$.
Notar que a nivel de los complejos, $E$ y el de Chevalley-Eilenberg difieren en un *shift*, luego, si bien no son iguales, podría decirse que son homotópicos.
Si $[\mu, \mu] = 0$ la correspondiente álgebra de Lie $A = (V, \mu)$ tiene como grupo cohomológico $H(E, d_\mu)$ que es exactamente igual al definido por Chevalley-Eilenberg (corrido en uno).
Nuevamente si $\dim_k V < \infty$ $E$ admite una estructura de *DGLA* con grupo estructural $GL(V)$ y satisface que $\mu_1$ y $\mu_2$ están en la misma orbita $\iff$ las correspondientes álgebras de Lie son isomorfas.

**Ejemplo 11.3.4.** La ecuación de deformaciones también aparece en el estudio de morfismos de álgebras. Sea $A$ y $B$ dos álgebras (asociativas o de Lie). Luego existe un álgebra de Lie graduada tal que $E^1$ es el conjunto de todas las funciones lineales entre $A$ y $B$. Más aún, existe una derivación (externa) $d$ tal que un elemento $f \in E^1$ es un morfismo de álgebras de $A$ en $B \iff df + \frac{1}{2}[f, f] = 0$.
Más aún, tomando $x = d + f$, $H^n(E, d_x)$ es idéntico al grupo cohomológico $H^n(A, B)$ donde $B$ es considerado como un $A$-módulo vía $f$.
Si ambas $k$-álgebras son de dimensión finita ($k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$) a $E$ se le da una estructura de *DGLA* tal que su grupo estructural es los automorfismos internos de $B$ y dos morfismos de álgebras están en la misma orbita $\iff$ difieren en un automorfismo interno de $B$.

## 11.4. Relación con las deformaciones formales

**Observación 11.4.1.** Trabajaremos siempre con $E$ una *DGLA* de tipo $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $E = \bigoplus_{\mathbb{Z}} E^i$, tal que $\dim_k(E^i) < \infty$.
Dado que $M \subset E^1$ es un conjunto definido por los ceros de una función cuadrática, se tiene que $M$ es un cerrado dentro de $E^1$. Más aún, como $E^1$ es un espacio vectorial de dimensión finita, sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se tiene que $E^1$ es un espacio de Banach con la topología usual. Luego cualquier sucesión de Cauchy de elementos de $M$, convergerá en $M$.

**Observación 11.4.2.** A $E$ se le pueden extender sus escalares $E \underset{k}{\otimes} k((t)) = \bigoplus_{\mathbb{Z}} E^i \underset{k}{\otimes} k((t))$ haciendo que el corchete y la diferencial sean $k^v$-lineales. Esto da lugar a una nueva *DGLA*. Si se tiene $m_0 \in M \iff [m_0, m_0] = 0$, uno se puede preguntar, qué condiciones debe cumplir una serie formal $m_t = \sum_0^\infty t^i m_i^v \in R^v$ con $m_i \in R$ para que $m_t \in M^v \subset R^v$.
En otras palabras:

$$0 = [m_t, m_t] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} [m_i^v, m_j^v] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (\sum_{i+j=n} [m_i, m_j])^v \iff$$

$$\sum_{i+j=n} [m_i, m_j] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Notar que si en vez de tensorizar por $k((t))$ uno tensoriza por el anillo local de Artin $k[t]/(t^n)$ $(n > 2)$ se obtiene lo que habíamos llamado deformaciones formales de orden $n$. En este caso, para que $m_t \in M[t]/(t^n)$ basta que cumpla $\sum_{i+j=r}[m_i, m_j] = 0 \quad (r < n)$.

**Definición 11.4.3.** $m_t$ se llamará *deformación formal* de $m_0$.

**Definición 11.4.4.** $m_1$ se llamará *deformación infinitesimal* de $m_0$.

**Observación 11.4.5.** Notar que los $m_i$ son elementos de $R$, así como en los ejemplos que hemos estudiado en las primeras secciones, éstos eran funciones lineales o bilineales sin ninguna propiedad extra. También cuando veamos las *DGLA* (13) de cada deformación formal de las primeras secciones, se podrá corroborar que las condiciones de deformación, de obstrucción, de deformaciones triviales, las proposiciones, los teoremas de rigidez, etc, son todos casos particulares de los que aquí trataremos.

**Observación 11.4.6.** Reescribamos la condición de pertenencia a $M[[t]]$:

$$0 = \sum_{i+j=n} [m_i, m_j] = (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [m_i, m_j]) + [m_0, m_n] + [m_n, m_0] =$$

$$(\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [m_i, m_j]) + 2[m_0, m_n] = (\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [m_i, m_j]) + 2d_{m_0}(m_n)$$

Luego si definimos $\delta m_n := \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [m_i, m_j]$ como la obstrucción $n$, se tiene la proposición estándar:

**Proposición 11.4.7.** *Dada* $m_t \in M[t]/(t^n) \Longrightarrow d_{m_0}(\delta m_n) = 0$.

*Demostración.* Notar que la hipótesis, $m_t \in M[t]/(t^n)$ es equivalente a decir $d_{m_0}(m_1) = \delta m_2 + 2d_{m_0}(m_2) = \ldots = \delta m_{n-1} + 2d_{m_0}(m_{n-1}) = 0$ (11.4.2) que es exactamente la que aparece en todos los ejemplos que hemos dado de deformaciones formales. Recordar que el Jacobi graduado para elementos de orden uno, es

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

con lo cual, se tiene que $[x,[y,z]] = -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] = [[z,x],y] + [[x,y],z]$. Como la antisimetría para elementos de orden uno es $[x,y] = [y,x]$, se tiene entonces

$$[x,[y,z]] = [[x,z],y] + [[x,y],z]$$

Recordar también la antisimetría para $f \in E^1$ y $g \in E^2$ es $[f,g] = -[g,f]$. Entonces:

$$d_{m_0}(\delta m_n) = [m_0, \delta m_n] = [m_0, \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [m_i, m_j]] = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [m_0, [m_i, m_j]] =$$

$$= \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [[m_0, m_i], m_j] + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [[m_0, m_j], m_i] = 2 \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [[m_0, m_i], m_j] =$$

$$= (\text{hipótesis}) = 2 \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} [-\frac{1}{2}\delta m_i, m_j] = -\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \sum_{\substack{l+k=i \\ l,k>0}} [[m_k, m_l], m_j] =$$

$$= -\sum_{\substack{l+k+j=n \\ l,k,j>0}} [[m_k, m_l], m_j] = (\text{Jacobi}) = 0$$

□

**Observación 11.4.8.** Con lo cual $\delta m_n$ es la obstrucción a extender $m_t \in M[t]/(t^n)$ a $m_t \in M[t]/(t^{n+1})$, ya que en el caso de que $\delta m_n$ sea un coborde, o sea, $\delta m_n = d_{m_0}(x)$, definiendo $m_n := -\frac{1}{2}x$ se tiene que $\sum_0^n t^i m_i \in M[t]/(t^{n+1})$. Veámoslo: por hipótesis se tiene que $\sum_{i+j=r}[m_i, m_j] = 0 \quad (r < n)$, falta ver que también vale para $r = n$:

$$\sum_{i+j=n} [m_i, m_j] = \delta m_n + 2d_{m_0}(m_n) = d_{m_0}(x) + 2d_{m_0}(-\frac{1}{2}x) = 0$$

Luego se tiene:

$$[m_t, m_t] \equiv \sum_{r=0}^{n} t^r \sum_{i+j=r} [m_i, m_j] \equiv 0 \mod t^{n+1}$$

**Corolario 11.4.9.** *Si $H^2(E, d_{m_0}) = 0$ cualquier $m_1$ será integrable (formalmente).*

*Demostración.* Dado $m_1$ construyo $\delta m_2$ que es un coborde, luego defino $m_2 := -\frac{1}{2}x$ donde $x$ es tal que $\delta m_2 = d_{m_0}(x)$. Inductivamente construyo $m_t$. □

**Observación 11.4.10.** Con respecto a las deformaciones formales triviales y automorfismos formales, el tratamiento es similar:

**Definición 11.4.11.** Dos deformaciones formales se dirán equivalentes $m_t \sim m'_t$ si existe una serie formal de la forma $e^{x_t} := id_E + \sum_1^\infty t^i e^{x_i}$ con $x_i \in E^0$, tal que $e^{x_t} m_t = m'_t$.

**Observación 11.4.12.** Notar que si $m'_t \sim m_t$ entonces sus deformaciones infinitesimales difieren en un coborde, o sea,

$$e^{x_t} m_t \equiv (id + te^{x_1})(m_0 + tm_1) \equiv m_0 + tm_1 + t[x_1, m_0] \equiv$$

$$\equiv m_0 + t(m_1 - d_{m_0}(x_1)) \mod t^2$$

Luego $m_1 - m'_1 = d_{m_0}(x_1)$

**Observación 11.4.13.** Recordar que si $m_t = m_0^v + t^n m_n^v + \dots$ es una deformación formal de $m_0$ entonces $m_n$ es un cociclo, esto es pues $0 = \sum_{i+j=n}[m_i, m_j] = 2d_{m_0}(m_n)$.
Más aún, si también es un coborde, $\delta m_n = d_{m_0}(x)$ se tiene que $m_t$ es equivalente a una deformación que empieza en grado $n+1$. Se define $e^{x_t} := id + t^n e^x \Longrightarrow$

$$e^{x_t} m_t \equiv (id + t^n e^x)(m_0 + t^n m_n) \equiv$$
$$\equiv m_0 + t^n m_n - t^n [m_0, x] \equiv m_0 \mod t^{n+1}$$

**Corolario 11.4.14.** *Toda deformación formal* $m_t = m_0 + t^n m_n^v + \dots$ *es equivalente a una donde su primer término no-nulo es un cociclo no cohomólogo a cero.*

**Corolario 11.4.15.** *Si* $H^1(E, d_{m_0}) = 0 \Longrightarrow m_0$ *es formalmente rígido.*

*Demostración.* Dado $m_0$, se toma cualquier deformación formal $m_0 + tm_1 + \dots$
Luego por hipótesis $m_1$ es un coborde.
Existe una deformación equivalente que empieza en grado dos. Inductivamente, se tiene que la deformación elegida es trivial, o sea, equivalente a $m_0$. $\square$

**Observación 11.4.16.** Lo que está pasando básicamente es que uno se está construyendo a partir de $m$ una familia formal $m_t = m^v + \sum_1^\infty t^i m_i^v$. Lo interesante es que sobre $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$, se tienen, tal vez, deformaciones concretas. Esto es debido a que la serie $m_t$ posee un radio de convergencia ([1] pp.39) que dependerá de los $m_i$ y como la serie puede pensarse como una sucesión en $M$, su límite estará en $M$ (11.4.1). Luego, basta definir $u := \sum_1^\infty s^i m_i$ con $s \in k$ en el radio de convergencia para que $m + u \in M$.
Notar que si los $m_i$ están acotados, el radio de convergencia siempre es positivo asegurando deformaciones concretas en algún entorno de $m$.

## 11.5. Grupos de Lie actuando en conjuntos algebraicos

Nombremos algunos hechos sobre conjuntos algebraicos dentro de $k^n$ con $k = \mathbb{C}$ o $k = \mathbb{R}$.
Sea $M$ un conjunto algebraico irreducible en $k^n$ y sea $S \subset M$ el conjunto de puntos no-singulares de $M$.
Se tiene que $S$ es un abierto Zariski de $M$. Si $x \in S$ existe un entorno $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} \cap M$ es una subvariedad compleja de $\mathcal{U}$. En otras palabras, $S$ es una variedad compleja.
También si $x \in S$ su espacio tangente $T_x S$ (considerando a $S$ como subvariedad analítica de $k^n$) es igual al espacio tangente Zariski de $x$ en $M$ considerada como una subvariedad algebraica de $k^n$, en particular la dimensión de $S$ como variedad analítica es igual a la

dimensión de $M$ como variedad algebraica.
En el caso particular que $k = \mathbb{C}$ se tiene que si $\mathcal{U}$ es un abierto Zariski de $M$, entonces $\mathcal{U}$ es conexo (con la topología usual de $\mathbb{C}^n$). En el caso de $k = \mathbb{R}$ sólo se puede decir que $\mathcal{U}$ posee un número finito de componentes.

**Proposición 11.5.1.** *Sea $M$ un conjunto algebraico en $k^n$ y $G$ un grupo de Lie de dimensión $n$ tal que $M$ es estable por $G$. Si existe un $x \in M$ tal que su orbita $G\cdot x$ es abierto (con la topología inducida de $k^n$) entonces $G \cdot x$ es un abierto Zariski de $M$ (en el caso $k = \mathbb{R}$, $G \cdot x$ es una componente de un abierto Zariski).*

*Demostración.* Podemos asumir que $G$ es conexo, luego cada componente irreducible de $M$ queda estable por $G$. Con lo cual podemos asumir que $M$ es irreducible. Sea $t = \dim M$ como variedad algebraica y sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie asociada a $G$. Para cada $x \in k^n$ el conjunto $G \cdot x$ es una subvariedad analítica de $k^n$ donde el espacio tangente $T_x k^n$ viene dado por $G_x := \{T(x) \mid T \in \mathfrak{g}\}$. Si $x \in M$ se tiene que $\dim G_x \leqslant t$.
Sea $U := \{x \in M \mid \dim G_x = t\}$ luego $U$ es un abierto Zariski de $M$, más aún es no vacío pues contiene a $x$ y también se tiene que $U \subset S$ el conjunto de puntos no-singulares de $M$.
Si $x \in U$ su orbita en un abierto de $U$, luego las orbitas por $G$ parten a $U$ en abiertos disjuntos.
Si $k = \mathbb{C}$, $U$ es conexo con lo cual hay sólo una orbita de $G$.
Si $k = \mathbb{R}$, $U$ posee finitas componentes, luego $G \cdot x$ es una componente conexa de $U$. □

**Observación 11.5.2.** Notar que $M$ posee un número finito de abiertos Zariski disjuntos.

## 11.6. Teorema de Rigidez

**Notación 11.6.1.** Sea $(E, d)$ una *DGLA*. Dado $m \in M$ considero $d_m$ su diferencial asociado. Sea $Z(m) := \ker(d_m)$, $B(m) := \operatorname{im}(d_m)$ y considero $H(m)$ como subespacio dentro de $Z(m)$ tal que $H(m) \cong Z(m)/B(m) = H(E, d_m)$. En principio son $k$-espacios vectoriales graduados, y por consiguiente se tiene $Z(m) \cong B(m) \oplus H(m)$. También considero el complemento (graduado) de $Z(m)$ en $E$ y lo llamo $C(m)$.

**Observación 11.6.2.** Notar que como $C(m)^n = E^n \cap C(m)$ y $B^{n+1}(m) = E^{n+1} \cap B(m)$, se tiene un isomorfismo $C(m)^n \longrightarrow B(m)^{n+1}$. Sale del hecho que se tiene la siguiente sucesión exacta corta: $0 \longrightarrow Z^n(m) \longrightarrow E^n \xrightarrow{(d_m)^n} B^{n+1}(m) \longrightarrow 0$. Luego $C^n(m) = E^n/Z^n(m) \cong B^{n+1}(m)$. En otras palabras, se tiene que $C(m) \cong B(m)[1]$.
Por último, para concretar un poco más el lenguaje, si $a \in C^0(m)$, $a$ no es un 0-cociclo pero sí un 1-coborde.

**Definición 11.6.3.** Con la notación previa, la descomposición $E = B(m) \oplus H(m) \oplus C(m)$ se llama la *descomposición de Hodge* de $E$ con respecto a $m$. Si bien no es única (lo es salvo isomorfismos), nos quedamos con la construida previamente.

**Notación 11.6.4.** Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo de característica cero de dimensión finita munido de la topología usual. Notaremos por $\mathcal{U}_{x \in V}$ como un entorno de $x \in V$.

**Lema 11.6.5.** *Sea $m \in M$ y $E = B(m) \oplus H(m) \oplus C(m)$ la descomposición de Hodge entonces existe una función analítica $C^0 \times H^1 \times C^1 \xrightarrow{F} R \mid (a,h,u) \longrightarrow e^a(m+h+u)$ que asigna difeomórficamente $\mathcal{U}_{0\in C^0} \times \mathcal{U}_{0\in H^1} \times \mathcal{U}_{0\in C^1}$ en $\mathcal{U}_{m\in R}$*

*Demostración.* Es suficiente probar que el diferencial de $F$ en el origen $(0,0,0)$ es un isomorfismo lineal entre $C^0 \times H^1 \times C^1$ y $E^1$ (Teorema la Función Inversa).
$dF_{(0,0,0)}(a,h,u) = [a,m] + h + u = -[m,a] + h + u =$(11.1.4)$= -d_m(a) + h + u =$ $(-d_m \oplus H^1 \oplus C^1)(a,h,u)$. Como las tres componentes son isomorfismos (11.6.2), se tiene que $dF_{(0,0,0)}$ es un isomorfismo. □

**Teorema 11.6.6.** *Sea $m \in M$ tal que $H^1(E,d_m) = 0$. Entonces $m$ es rígido. De hecho existe un entorno $\mathcal{U}_{m\in M}$ tal que todo $x \in \mathcal{U}_{m\in M}$ es de la forma $x = e^a m$ con $a \in \mathcal{U}_{0\in C^0}$.*

*Demostración.* Considero los entornos del lema previo, $\mathcal{U}_{m\in R}, \mathcal{U}_{0\in C^0}, \mathcal{U}_{0\in C^1}$ $(H^1 = 0)$, luego todo $x \in \mathcal{U}_{m\in R}$ es de la forma $x = e^a(m+u)$ con $a \in \mathcal{U}_{0\in C^0}$, $u \in \mathcal{U}_{0\in C^1}$. Más aún, $x = e^a(m+u) \in M \Longleftrightarrow m+u \in M$, esto es pues, por un lado, si $m+u \in M$, como $M$ es invariante por la acción del grupo, se tiene que $x \in M$. Análogamente, si $x \in M$ se tiene que $e^{-a}x \in M$, luego $m+u \in M$.
Notar que $m+0 = m \in M$.
Sea $C^1 \xrightarrow{P} E^2$ la función polinomial definida por $u \longrightarrow [m+u, m+u]$.
Como vimos en (11.1.7) $u \in M \Longleftrightarrow P(u) = 0$, pues $P(u) = d_m(u) + \frac{1}{2}[u,u]$.
Luego se tiene $dP_0 = d_m$ inyectiva pues $C^1 \xrightarrow{dP_0} E^2$. Recordar que $E^1 = Z^1 \oplus C^1$.
Luego existe un entorno $\mathcal{U}' \subset C^1$ tal que $P$ restringida allí es inyectiva (Teorema de la Función Inversa). Luego si $u \in \mathcal{U}'$ se tiene que $m+u \in M \Longleftrightarrow u = 0$ esto es pues $m+0 = m \in M$ y $P$ es inyectiva en $\mathcal{U}'$.
Solo resta acomodar los entornos para concluir la demostración: sea $\mathcal{V} := \mathcal{U}_{0\in C^1} \cap \mathcal{U}'$, y sea el entorno de $m \in M$, $\mathcal{S} := \{e^a(m+u) \mid a \in \mathcal{U}_{0\in C^0}, u \in \mathcal{V}\} \cap M$. Luego todo $x \in \mathcal{S}$ es de la forma $x = e^a m$ con $a \in \mathcal{U}_{0\in C^0}$ □

**Corolario 11.6.7.** *Sea $m \in M$ tal que $H^1(E,d_m) = 0$. Entonces $G \cdot m$ es un abierto Zariski de $M$ (si el cuerpo es $\mathbb{R}$, $G \cdot m$ es una componente conexa de un abierto Zariski).*

*Demostración.* Del teorema anterior se deduce que $G \cdot m$ es un abierto y de la proposición (11.5.1) si $k = \mathbb{C}$ que ese abierto es Zariski o si $k = \mathbb{R}$ una componente de un Zariski. □

**Corolario 11.6.8.** *El abierto Zariski $\{m \in M \mid H^1(E,d_m) = 0\}$ es la unión de un número finito de orbitas de $G$, en otras palabras: hay finitos elementos rígidos (salvo equivalencia).*

*Demostración.* Veamos que el conjunto es un abierto Zariski, el resto se deduce del corolario anterior.
Sean $Z_{r,n} := \{m \in M \mid \dim Z^n(m) \leqslant r\}$ y $B_{r,n} := \{m \in M \mid \dim B^n(m) \geqslant r\}$ que son abiertos Zariski de $M$. Sea $U_n := \{m \in M \mid H^n(E,d_m) = 0\} \Longrightarrow U_n = \bigcup_{r\in\mathbb{Z}} Z_{r,n} \cap B_{r,n}$, o sea, la unión de abiertos Zariski, entonces es abierto Zariski. En particular $U_1$ lo es. □

## 11.7. Familias Kuranishi

*La siguiente sección estudia el caso en que $H^1$ no sea cero. Encontraremos un subconjunto $\mathcal{K} \subset H^1$ localmente completo, o sea, que parametriza todas las deformaciones locales de $m$ salvo equivalencias. Claramente cuando $H^1 = 0$, se tiene que $\mathcal{K} = 0$ y por consiguiente $m$ será rígido como fue probado en la sección previa.*

**Notación 11.7.1.** Sea $m \in M$ y $E = B(m) \oplus H(m) \oplus C(m)$ la descomposición de Hodge con respecto a $m$. Sea $M' := \{x \in R \mid \pi_B([x,x]) = 0\}$. Notar que $M \subset M'$.

**Lema 11.7.2.** *Existe un morfismo analítico $\mathcal{U}_{0\in Z^1} \xrightarrow{\phi} C^1$ tal que $M' \cap \mathcal{U}_{m\in R} = \{m + z + \phi(z) \mid z \in \mathcal{U}_{0\in Z^1}\}$. En otras palabras que todo $m \in M$ tiene un entorno en $M'$ parametrizado por 1-cociclos.*

*Demostración.* Sea $Z^1 \times C^1 \xrightarrow{F} B^2$ tal que $F(z,u) := d_m(u) + \frac{1}{2}\pi_B([z+u, z+u])$. Notar que $F(0,0) = 0$ y $dF_{(0,0)}(0,u) = d_m(u)$, o sea, que $dF_{(0,0)}(0,-) : C^1 \longrightarrow B^2$ es un isomorfismo. Entonces se tiene que Por el Teorema de la Función Implícita, la ecuación $F(z,u) = 0$ puede resolverse para un entorno de $(0,0)$, o sea, existe una función analítica $\mathcal{U}_{0\in Z^1} \xrightarrow{\phi} \mathcal{U}_{0\in C^1}$ tal que $(z,u) \in \mathcal{U}_{0\in Z^1} \times \mathcal{U}_{0\in C^1}$ satisface $F(z,u) = 0 \iff \phi(z) = u$.
Notar que $m + z + u \in M' \iff F(z,u) = 0$ ya que

$$\pi_B([m+z+u, m+z+u]) = (11.1.7) = \pi_B(d_m(z+u) + \frac{1}{2}[z+u, z+u]) =$$

$$= \pi_B(d_m(z)) + \pi_B(d_m(u)) + \frac{1}{2}\pi_B([z+u, z+u]) =$$

$$= d_m(z) + d_m(u) + \frac{1}{2}\pi_B([z+u, z+u]) =$$

$$= d_m(u) + \frac{1}{2}\pi_B([z+u, z+u]) = F(z,u)$$

El último paso se debió a que $\pi_B|_{B(m)} = id$ y $d_m(Z(m)) = 0$
En conclusión $m + z + u \in M' \iff F(z,u) = 0 \iff u = \phi(z)$,
Con lo cual $M' \cap \mathcal{U}_{m\in R} = \{m + z + \phi(z) \mid z \in \mathcal{U}_{0\in Z^1}\}$ para algún entorno $\mathcal{U}_{m\in R}$. □

**Observación 11.7.3.** En el próximo lema elegiremos un entorno $\mathcal{U}_{m\in R}$ conveniente. Notar que la ecuación $[x,x] = 0$ es equivalente a $\pi_B([x,x]) = \pi_H([x,x]) = \pi_C([x,x]) = 0$. Mostraremos que existe un entorno tal que si se satisface $\pi_B([x,x]) = \pi_H([x,x]) = 0 \Longrightarrow [x,x] = 0$. En otras palabras, que donde $\pi_H([x,x]) = 0$, $M'$ y $M$ son iguales localmente, haciendo que la caracterización anterior se imponga para $M$. Un caso particular es cuando $H^2(E, d_m) = 0$ pues $\pi_H([x,x]) = 0 \quad \forall x \in E^1$.

**Lema 11.7.4.** *Existe un entorno $\mathcal{U}_{m\in R}$ tal que si $x$ está allí y $\pi_B([x,x]) = \pi_H([x,x]) = 0 \Longrightarrow [x,x] = 0$.*

*Demostración.* Supongo $x = m + a \in R$ con $\pi_B([x,x]) = \pi_H([x,x]) = 0$, entonces por Jacobi, se tiene que

$$0 = [x,[x,x]] = [m+a, \pi_C([x,x])] = [m, \pi_C([x,x])] + [a, \pi_C([x,x])] =$$

$$= d_m(\pi_C([x,x])) + ad_E a(\pi_C([x,x])) = (d_m + ad_E a)(\pi_C([x,x]))$$

Notar que para cada $a \in E^1$ se tiene que $d_m + ad_E a : C^n \longrightarrow E^{n+1}$ es lineal. También que para $a = 0$ se tiene que es inyectiva ya que su dominio es $C(m)$. Luego existe un entorno del cero en $E^1$, $\mathcal{U}_{0\in E^1}$, tal que para cada $a$ allí, $d_m + ad_E a$ es inyectiva. En particular en $C^2(m)$. Con lo cual $(d_m + ad_E a)(\pi_C([x,x])) = 0$ implica $\pi_C([x,x]) = 0$.
El entorno $\mathcal{U}_{m\in R} := m + \mathcal{U}_{0\in E^1}$ satisface el lema. □

**Corolario 11.7.5.** *Dado $m \in M$. Si $H^2(E, d_m) = 0$ entonces $M'$ es localmente igual a $M$. Se tiene que existe un entorno de $m$ parametrizado por $\mathcal{U}_{0\in Z^1}$. Más aún, lo parametrizado por $H^1 \cap \mathcal{U}_{0\in Z^1}$ contiene un representante de cada clase de equivalencia.*
*(Recordar que $x \sim y \iff \exists a \in C^0 \mid x = e^a y$).*

*Demostración.* Como $H^2(E, d_m) = 0$ el lema (11.7.4) afirma que hay un entorno $\mathcal{U}$ de $m \in R$ donde $M \cap \mathcal{U} = M' \cap \mathcal{U}$. Del lema (11.7.2) existe otro entorno $\mathcal{V}$ de $m \in R$ tal que $M \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{m + z + \phi(z) \mid z \in \mathcal{U}_{0\in Z^1}\}$, o sea, que está parametrizado por $\mathcal{U}_{0\in Z^1}$. Luego por el lema (11.6.5), se tiene que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ es difeomorfo a un producto de entornos $\mathcal{U}_{0\in C^0} \times \mathcal{U}_{0\in H^1} \times \mathcal{U}_{0\in C^1}$.
En este caso, resulta $\{m + h + \phi(h) \mid h \in H^1 \cap \mathcal{U}_{0\in Z^1}\} \cong \{0\} \times \mathcal{U}_{0\in H^1} \times \mathcal{U}_{0\in C^1}$ ya que para $h \in H^1 \cap \mathcal{U}_{0\in Z^1}$ se tiene que $m + h + \phi(h) = e^0(m + h + \phi(h))$. Luego para cada $h \in H^1 \cap \mathcal{U}_{0\in Z^1}$ se obtiene un representante distinto de cada clase de equivalencia. □

**Observación 11.7.6.** Si $H^2(E, d_m)$ no es cero, el conjunto algebraico $M$ puede tener una singularidad en $m$. La estructura en un entorno de $m$ esta descrita por los ceros de una función analítica $\mathcal{V} \xrightarrow{\Omega|_{\mathcal{V}}} H^2$ con $\mathcal{V} \subset H^1$.

**Definición 11.7.7.** La función $\mathcal{U}_{0\in Z^1} \xrightarrow{\Omega} H^2$ se llama la *función de obstrucción*. Esta se define utilizando $\mathcal{U}_{0\in Z^1} \xrightarrow{\phi} C^1$ del lema (11.7.2). Sea $\mathcal{U}_{0\in Z^1} \xrightarrow{\Omega} H^2$ tal que
$\Omega(z) := \pi_H([z + \phi(z), z + \phi(z)])$.
El conjunto $\mathcal{K} := \{m + h + \phi(h) \mid h \in H^1 \cap \mathcal{U}_{0\in Z^1},\ \Omega(h) = 0\}$ se llama *la familia Kuranishi* de deformaciones de $m$.

**Observación 11.7.8.** El siguiente teorema demostrará que $\mathcal{K}$ es localmente completo en $m$. En otras palabras; existe un entorno del 0 en $H^1$ tal que cualquier elemento allí no-obstruido representa una deformación local de $m$. Recíprocamente cualquier deformación local de $m$ está representada por un elemento no-obstruido de ese entorno.

**Teorema 11.7.9.** *Sea $m \in M$ y $E = B(m) \oplus H(m) \oplus C(m)$ la descomposición de Hodge con respecto a $m$.*
*(a) Existen funciones analíticas $\mathcal{U}_{0\in Z^1} \xrightarrow{\phi} C^1$ y $\mathcal{U}_{0\in Z^1} \xrightarrow{\Omega} H^2$ con $\phi(0) = \Omega(0) = 0$ y un entorno $\mathcal{U}_{m\in M}$ tal que $\mathcal{U}_{m\in M} = \{m + z + \phi(z) \mid z \in \mathcal{U}_{0\in Z^1},\ \Omega(z) = 0\}$*
*(b) $\mathcal{K}$ es localmente completo, o sea, existen dos entornos $\mathcal{U}_{0\in C^0}$ y $\mathcal{V}_{m\in M}$ tal que $\mathcal{U}_{0\in C^0} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}_{m\in M}$ con $(a,k) \longrightarrow e^a k$ es un homeomorfismo analítico.*

*Demostración.* Empecemos arreglando los entornos. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos entornos en $R$ de $m$ que satisfacen el lema (11.7.4), o sea allí $M$ y $M'$ coinciden. Del lema (11.7.2) obtenemos la función analítica $\mathcal{U}_{0\in Z^1} \xrightarrow{\phi} C^1$ donde $\mathcal{U} \cap M = \{m + z + \phi(z) \mid z \in \mathcal{U}_{0\in Z^1}\}$.
Tomo un entorno en $H^1$ del cero, $\mathcal{U}_{0\in H^1} := H^1 \cap \mathcal{U}_{0\in Z^1}$, luego del lema (11.6.5) se tiene

que existen dos entornos (a parte de dos ya construidos) donde la función
$\mathcal{U}_{0\in C^0} \times \mathcal{U}_{0\in H^1} \times \mathcal{U}_{0\in C^1} \xrightarrow{F} \mathcal{V} \mid (a,h,u) \longrightarrow e^a(m+h+u)$ es un homeomorfismo analítico.
Por último considero $\Omega$ la función de obstrucción.
Veamos la primera parte del teorema: como $M$ y $M'$ coinciden en $\mathcal{U}$ se tiene que
$x \in \mathcal{U} \cap M \iff \pi_B([x,x]) = \pi_H([x,x]) = 0$.
Pero $\pi_B([x,x]) = 0 \iff x = m + z + \phi(z)$ para algún $z \in \mathcal{U}_{0\in Z^1}$.
Luego:

$$0 = \pi_H([x,x]) \iff 0 = \pi_H([m+z+\phi(z), m+z+\phi(z)]) =$$
$$= \pi_H(2d_m(z+\phi(z)) + [z+\phi(z), z+\phi(z)]) =$$
$$= \pi_H(2d_m(z+\phi(z))) + \pi_H([z+\phi(z), z+\phi(z)]) =$$
$$= \pi_H([z+\phi(z), z+\phi(z)]) = \Omega(z)$$

Defino $\mathcal{U}_{m\in M} := \mathcal{U} \cap M$ concluyendo la primera parte del teorema.
Para la segunda parte, notar que

$$F(a,h,u) = e^a(m+h+u) \in M \iff F(0,h,u) = e^0(m+h+u) = m+h+u \in M$$

Dado que $M$ y $M'$ coinciden en $\mathcal{V}$, se tiene con el mismo razonamiento anterior:

$$m+h+u \in M \cap \mathcal{V} \iff u = \phi(h),\, \Omega(h) = 0 \iff m+h+u \in \mathcal{K}$$

Recordar que $h \in \mathcal{U}_{0\in H^1} \subset \mathcal{U}_{0\in Z^1}$ donde $\phi$ y $\Omega$ están bien definidas.
Conclusión, dado $k \in \mathcal{K}$ es de la forma $m+h+u$ con $u = \phi(h)$ y $\Omega(h) = 0$, luego dado $a \in \mathcal{U}_{0\in C^0}$ se tiene que

$$e^a k \in \mathcal{V} \cap M \iff e^a(m+h+u) \in \mathcal{V} \cap M \iff$$
$$F(a,h,u) \in M \iff F(0,h,u) \in M \iff m+h+u \in \mathcal{V} \cap M \iff k \in \mathcal{K}$$

$\square$

**Observación 11.7.10.** Notar que la elección de la familia Kuranishi no es canónica, depende de la elección de la descomposición de Hodge y del entorno $\mathcal{U}_{0\in Z^1}$.

# 12. Enfoque actual a la teoría de deformaciones

**Resumen**

Empecemos con la teoría de funtores de Artin. A cada problema de deformación se le asocia un funtor de Artin que gobierna, al menos bajo un cuerpo de característica cero, el problema. Cuando este funtor sea prorepresentable o cuando tenga una cápsula *(hull)* se dirá que el problema de deformación está resuelto. Schlessinger desarrolló esta teoría en su tesis de doctorado siguiendo los lineamentos de Grothendieck. En la actualidad la resolución de problemas de deformación se factoriza por las $DGLA$ (en realidad por una estructura mucho más flexible y general llamada $L_\infty$-álgebras).
Nos concentraremos en presentar los funtores de Artin y los funtores de Artin asociados a cada $DGLA$ así como la teoría de obstrucciones que de ella se desprende. En lo siguiente sólo se nombrarán resultados mas que demostraciones. Se siguió el artículo [16].

## 12.1. Funtores de anillos de Artin

**Notación 12.1.1.** Denotaremos por $\overline{Art}$ la categoría de anillos locales Noetherianos completos con cuerpo residual $k$.
$Art \subset \overline{Art}$ a la subcategoría plena de anillos Artinianos.
Dado $S \in \overline{Art}$ llamaremos $Art_S$ a la categoría de $S$-álgebras Artinianas con cuerpo residual $k$ y a $\overline{Art_S}$ la categoría de $S$-álgebras locales Noetherianas completas con cuerpo residual $k$.

**Definición 12.1.2.** Un *funtor de anillos de Artin* es un funtor covariante $Art_S \xrightarrow{F} \mathcal{S}et$ con $S \in \overline{Art}$ tal que $F(k) = *$

**Observación 12.1.3.** Dado $R \in \overline{Art}$ se tiene el funtor $Art \xrightarrow{h_R} \mathcal{S}et$ tal que $h_R(A) = \hom_{S-alg}(R, A)$ el conjunto de morfismos de $S$-álgebras.

**Definición 12.1.4.** Un funtor $Art_S \xrightarrow{F} \mathcal{S}et$ se dice *prorepresentable* si es isomorfo a $h_R$ para algún $R \in \overline{Art}$, o sea si es representable por un objeto fuera de la categoría.

**Notación 12.1.5.** Llamaremos $Fun_S := \mathcal{S}et^{Art_S}$ a la categoría de los funtores de anillos de Artin. Por Yoneda tenemos que el funtor $\overline{Art}_S^{op} \longrightarrow Fun_S \mid R \longrightarrow h_R$ es plenamente fiel y se tiene una biyección natural entre $Nat(F, h_R) \cong F(R)$ con $R \in Art_S$

**Observación 12.1.6.** Dado que en $Art_S$ existen los pullback, se tiene

$$\begin{tikzcd} B \underset{A}{\times} C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

Luego aplicando $F \in Fun_S$ se tiene un morfismo $F(B \underset{A}{\times} C) \xrightarrow{\eta} F(B) \underset{F(A)}{\times} F(C)$

**Definición 12.1.7.** El funtor $F$ se dice *homogéneo* si $\eta$ es una biyección cada vez que $B \twoheadrightarrow A$ es sobreyectiva. Notar que si $F$ es prorepresentable se tiene que $F$ es homogéneo ya que el diagrama es un pullback y el hom conmuta con límites finitos.

**Observación 12.1.8.** Recordar que por Yoneda, todo pullback en la categoría *Art* es un pullback en la categoría de funtores, y viceversa si los funtores son todos representables/prorepresentable.

**Ejemplos 12.1.9.** Veamos algunos ejemplos de funtores homogéneos

- El funtor trivial $F(A) := *$ es homogéneo pues $F(B) \underset{F(A)}{\times} F(C) = *$ luego $\eta$ es una biyección.

- Sea $M$ un $S$-módulo playo, definimos $Art_S \xrightarrow{\hat{M}} Set$ como $\hat{M}(A) := M \underset{S}{\otimes} m_A$ donde $m_A$ es el ideal maximal de $A$. $\hat{M}$ resulta homogéneo pues $M \underset{S}{\otimes} m_B \underset{M \underset{S}{\otimes} m_A}{\otimes} M \underset{S}{\otimes} m_C \cong M \underset{S}{\otimes} (m_B \underset{m_A}{\otimes} m_C)$ ya que $M \otimes -$ es exacto.

- Sea $L^0$ un álgebra de Lie. Definimos el funtor $Art_k \xrightarrow{exp(L^0)} \mathcal{G}r$ como $exp(L^0)(A) := exp(L^0 \underset{k}{\otimes} m_A)$ la exponencial del álgebra de Lie nilpotente $L^0 \otimes m_A$

**Definición 12.1.10.** Un funtor $F$ se dice *funtor de deformación* si $\eta$ es sobreyectiva cada vez que $B \longrightarrow A$ es sobreyectiva y $\eta$ es un isomorfismo cada vez que $A = k$. La noción de funtor de deformación es más débil que la de funtor homogéneo.

**Notación 12.1.11.** Sea $k[\epsilon] := k[t]/t^2$ con la estructura trivial de $S$-álgebra dada por $S \xrightarrow{\pi} k \hookrightarrow k[\epsilon]$. Notar que $\dim_k(k[\epsilon]) = 2$

**Proposición 12.1.12.** *Sea $F$ un funtor de deformación. El conjunto $t_F := F(k[\epsilon]) \cong Nat(F, k[\epsilon])$ tiene una estructura natural de $k$-espacio vectorial. Más aún si $F \xrightarrow{\phi} G$ es un morfismo de funtores de deformación (o sea, una transformación natural) se tiene que $\phi = \phi_{k[\epsilon]} : t_F \longrightarrow t_G$ es lineal.*

**Definición 12.1.13.** $F \xrightarrow{\phi} G$ se llama

- *no-ramificado* si $t_F \xrightarrow{\phi} t_G$ es inyectivo, o sea monomorfismo como transformación $k$-lineal.

- *suave* si cada vez $B \twoheadrightarrow A \in Art_S$ es epimorfismo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d] & F(B) \arrow[r, "\phi_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & G(B) \arrow[d] \\ A & F(A) \arrow[r, "\phi_A"] & G(A) \end{tikzcd}$$

  la flecha inducida por el pullback $F(B) \longrightarrow F(A) \underset{G(A)}{\times} G(B)$ es sobreyectiva.

- *etal* si es no-ramificada y suave.

**Observación 12.1.14.** Si $F \xrightarrow{\phi} G$ es suave entonces $F(A) \xrightarrow{\phi_A} G(A)$ es sobreyectiva para todo $A \in Art_S$. Sale del hecho que $A \longrightarrow k$ es sobreyectiva, luego por ser funtores de Artin, $F(k) = G(k) = *$, se tiene que $F(A) \longrightarrow F(k) \underset{G(k)}{\times} G(A) \cong * \underset{*}{\times} G(A) \cong G(A)$ es sobreyectivo.

**Observación 12.1.15.** Si $F \xrightarrow{\phi} G$, $H \xrightarrow{\psi} G$ dos morfismos de funtores de deformación. Si $\phi$ es suave y $H$ prorepresentable entonces existe un morfismo $\tau$ tal que:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\phi"] & G \\ & H \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ul, dashed, "\exists\tau"] \end{tikzcd}$$

A modo didáctico uno podría pensar que es análogo a lo que pasa con los módulos proyectivos y los epimorfismos.

**Definición 12.1.16.** Un funtor $F$ se dice *suave* si $F \longrightarrow *$ es suave, en otras palabras, para todo morfismo sobreyectivo de $S$-álgebras $B \longrightarrow A$, $F(B) \longrightarrow F(A)$ es sobreyectivo.

**Lema 12.1.17.** *Un funtor $h_R$ con $R \in \overline{Art}_S$ es suave $\Longleftrightarrow R = S[[x_1, \ldots, x_n]]$*

**Lema 12.1.18.** *Sea $F \xrightarrow{\phi} G$ no-ramificada con $G$ homogéneo $\Longrightarrow F(A) \xrightarrow{\phi_A} G(A)$ es inyectiva $\forall A \in Art_S$.*

**Corolario 12.1.19.** *Sea $F \xrightarrow{\phi} G$ etal con $G$ homogéneo entonces $\phi$ es un isomorfismo.*

**Observación 12.1.20.** Definimos $\sim$ la relación de equivalencia en la categoría de funtores de deformación generada por los morfismos etales. Luego se obtiene que $h_R \sim h_T \Longleftrightarrow R \cong T$ como $S$-álgebras.

## 12.2. Teoría de Obstrucciones

**Definición 12.2.1.** Por una *extensión pequeña* nos referiremos a una sucesión exacta corta:

$$e : 0 \longrightarrow M \longrightarrow B \xrightarrow{\phi} A \longrightarrow 0$$

donde $\phi \in Art_S$ y $M$ es un ideal de $B$ anulado por $m_B$ su ideal maximal. En particular, $M$ es un espacio vectorial sobre $B/m_B \cong k$.

**Definición 12.2.2.** Sea $F$ un funtor de anillos de Artin, una *teoría de obstrucción* $(V, v)$ para $F$ es un $k$-espacio vectorial $V$ llamado *el espacio de obstrucción* y para toda extensión pequeña en $Art_S$

$$e : 0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

una *transformación de obstrucción* $F(A) \xrightarrow{v_e} V \underset{k}{\otimes} M$ que satisface las siguientes propiedades:

- Si $\xi \in F(A)$ puede extenderse a $\xi \in F(B)$ entonces $v_e(\xi) = 0$
- Para todo morfismo de extensiones pequeñas $e_1 \xrightarrow{\alpha} e_2$, o sea,

$$\begin{tikzcd} e_1 : & 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_M"'] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_B"'] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_A"'] & 0 \\ e_2 : & 0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

se tiene $v_{e_2}F(\alpha_A) = (V \otimes \alpha_M)v_{e_1}$, en diagramas:

$$\begin{array}{ccc} F(A_1) & \xrightarrow{v_{e_1}} & V \underset{k}{\otimes} M_1 \\ {\scriptstyle F(\alpha_A)}\downarrow & \equiv & \downarrow{\scriptstyle V\otimes\alpha_M} \\ F(A_2) & \xrightarrow[v_{e_2}]{} & V \underset{k}{\otimes} M_2 \end{array}$$

dicho de otro modo, si consideramos a los funtores de deformación con dominio en la categoría de extensiones pequeñas, o sea,
$F(e) := F(A)$ y $(V \underset{k}{\otimes} -)(e) := V \underset{k}{\otimes} M$, se tiene $F \xrightarrow{v} V \underset{k}{\otimes} -$, una transformación natural.

**Observación 12.2.3.** Notar que si $F$ es suave, o sea, $F(B) \longrightarrow F(A)$ es sobreyectivo cada vez que $B \longrightarrow A$ es sobreyectivo, se tiene que todas las transformaciones de obstrucción son nulas, ya que la condición uno se satisface siempre, pues al ser $F(B) \longrightarrow F(A)$ sobreyectivo, dado $\xi \in F(A)$ existe $\xi' \in F(B)$ que va a parar a $\xi$.

**Definición 12.2.4.** Una teoría de obstrucción $(V, v)$ de $F$ se dice *completa* si vale el recíproco de la condición uno, o sea, si $v_e(\xi) = 0 \Longleftrightarrow$ la extensión existe.

**Observación 12.2.5.** Si $F$ admite una teoría de obstrucciones completa, esta no es única pues siempre se puede agrandar el espacio vectorial de $(V, v)$ consiguiendo otra teoría de obstrucción. Con lo cual será de interés encontrar una teoría de obstrucción *minimal*.

**Definición 12.2.6.** Un morfismo de teorías de obstrucción $(V, v) \longrightarrow (W, w)$ para $F$ es una transformación lineal $V \xrightarrow{\theta} W$ tal que $w = \theta v$. O sea, que para toda extensión pequeña $e$ el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "v_e"] \arrow[dr, "w_e"'] & V \underset{k}{\otimes} M \arrow[d, "\theta\otimes M"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\ & W \underset{k}{\otimes} M \end{tikzcd}$$

Una teoría de obstrucción $(O_F, ob)$ se dirá *universal* si es el objeto cero, o sea, para cualquier otra teoría de obstrucción $(V, v)$ existe un único morfismo $(O_F, ob) \longrightarrow (V, v)$.

**Observación 12.2.7.** Si existe una teoría de obstrucción universal claramente es única: si $(O_F, ob)$ y $(O'_F, ob')$ son dos teorías de obstrucción universales, existirán cuatro morfismos únicos, las dos identidades y $(O_F, ob) \xrightarrow{f} (O'_F, ob')$ y $(O'_F, ob') \xrightarrow{g} (O_F, ob)$. Pero $fg$ y $gf$ son otros dos que las identidades. Luego por unicidad de morfismos deben ser las identidades haciendo que las teorías sean isomorfas.

**Teorema 12.2.8.** *Sea $F$ un funtor de deformación entonces tiene una teoría de obstrucción universal $(O_F, ob)$. Más aún es completa y todo elemento del $k$-espacio vectorial $O_F$ es de la forma $ob_e(\xi)$ para alguna extensión principal $e : 0 \longrightarrow k \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ y algún $\xi \in F(A)$*

**Observación 12.2.9.** Si $F$ no es un funtor de deformación en general no posee una teoría de obstrucción completa.

**Definición 12.2.10.** Sea $F \xrightarrow{\phi} G$ un morfismo de funtores de deformación y $(V,v)$, $(W,w)$ sus respectivas teorías de obstrucciones. Diremos que el morfismo $(V,v) \xrightarrow{\tau} (W,w)$ es *compatible con* $\phi$ si $w\phi = \tau v$. En otras palabras, que el siguiente diagrama conmute para toda extensión pequeña $e$:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "v_e"] \arrow[d, "\phi_A"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & V \underset{k}{\otimes} M \arrow[d, "\tau \otimes M"] \\ G(A) \arrow[r, "w_e"] & W \underset{k}{\otimes} M \end{tikzcd}$$

**Proposición 12.2.11.** *Sea $F \xrightarrow{\phi} G$ un morfismo de funtores de deformación y $(V,v) \xrightarrow{\tau} (W,w)$ un morfismo compatible. Si $(V,v)$ es completa, $V \xrightarrow{\tau} W$ inyectiva y $t_F \xrightarrow{\phi} t_G$ suryectiva entonces $\phi$ es suave.*

**Observación 12.2.12.** La composición $w\phi = \tau v$ tal que a cada extensión pequeña le asigna $w_e\phi_A$ da lugar a una teoría de obstrucción $(W, w\phi)$ para $F$, con lo cual existe un único morfismo $O_F \longrightarrow W$. En particular esto pasa para la obstrucción universal de $G$, o sea, $(O_G, ob_G\phi)$ es una teoría de obstrucción para $F$ haciendo que exista un único morfismo $O_F \xrightarrow{o(\phi)} O_G$. Luego todo morfismo $F \xrightarrow{\phi} G$ induce dos transformaciones lineales, una entre los tangentes $t_F \xrightarrow{\phi} t_G$ y otra entre los espacios de obstrucción $O_F \xrightarrow{o(\phi)} O_G$.

**Proposición 12.2.13.** *$F \xrightarrow{\phi} G$ es suave $\iff t_F \xrightarrow{\phi_{k[\epsilon]}} t_G$ es suryectiva y $O_F \xrightarrow{o(\phi)} O_G$ es inyectiva. En particular, $F$ es suave $\iff O_F = 0$.*

**Lema 12.2.14.** *$F \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} H$ morfismos de funtores de deformación. Se tiene que:*

- *Si $\phi$, $\psi$ suaves $\implies \psi\phi$ también.*
- *Si $\psi\phi$, $\psi$ suaves $\implies \psi$ también.*
- *Si $\psi\phi$ suave y $t_F \longrightarrow t_G$ sobreyectiva $\implies O_F \xrightarrow{o(\phi)} O_G$ es un isomorfismo.*
- *Si $\phi$ suave $\implies O_F \xrightarrow{o(\phi)} O_G$ es un isomorfismo.*

## 12.3. Funtores de grupos sobre anillos de Artin

**Definición 12.3.1.** Consideremos la siguiente situación; $Art_S \xrightarrow{F} \mathcal{S}et$ un funtor de deformación, $Art_S \xrightarrow{G} \mathcal{G}r$ un funtor de grupos sobre anillos de Artin suave (se tiene que si la característica del cuerpo es cero, que es nuestro caso, la suavidad es automática). Diremos que $G$ *actúa* en $F$ si se tiene una acción natural de $G$ en $F$, o sea, dado $B \in Art_S$ existe una acción $G(B) \times F(B) \xrightarrow{*_B} F(B)$ y tal que el siguiente diagrama en $\mathcal{S}et$ conmuta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "x"'] & G(B) \times F(B) \arrow[r, "*_B"] \arrow[d, "G(x)\times F(x)"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & F(B) \arrow[d, "F(x)"] \\ A & G(A) \times F(A) \arrow[r, "*_A"'] & F(A) \end{tikzcd}$$

En particular se tiene una acción del grupo $t_G$ en el $k$-espacio vectorial $t_F$. Denotemos por $t_G \xrightarrow{\nu} t_F$ al morfismo multiplicar por cero, o sea, $g \longrightarrow g*0$. Notar que no necesariamente la acción en el cero actúa de forma trivial.

**Lema 12.3.2.** *El morfismo $\nu$ es lineal y la acción de $t_G$ en $t_F$ es por traslación, o sea, $g * f = \nu(g) + f =: g * 0 + f$*

**Lema 12.3.3.** *El funtor cociente $D = F/G$ es un funtor de deformación. También se tiene que coker $\nu = t_D$, la proyección $F \xrightarrow{\pi} D$ es suave ($\Longrightarrow O_F \cong O_D$) y para toda $(V, v)$ teoría de obstrucción de $F$, el funtor $G$ actúa trivialmente sobre los morfismos $v_e$, o sea, que $v_e(a) = v_e(g * a)$ (para toda $e$ extensión pequeña), en diagrama sería:*

$$\begin{tikzcd} G(A) \times F(A) \arrow[r, "*_A"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & F(A) \arrow[d, "v_e"] \\ F(A) \arrow[r, "v_e"'] & V \underset{k}{\otimes} M \end{tikzcd}$$

## 12.4. Funtores de deformación asociados a una $DGLA$

**Observación 12.4.1.** Sea $E = \oplus E^i$ una $DGLA$ sobre un cuerpo $k$ de característica cero. Podemos asignarle tres funtores:

- El funtor de acción $Art_k \xrightarrow{G_E} \mathcal{G}r$ tal que $G_E(A) := exp(E^0 \underset{k}{\otimes} m_A)$. Este funtor es homogéneo y suave. Notar que $E^0 \underset{k}{\otimes} m_A$ es un álgebra de Lie nilpotente, luego se le puede asignar una estructura de grupo.
- El funtor de Maurer-Cartan $Art_k \xrightarrow{MC_E} \mathcal{S}et$ tal que $MC_E(A) := \{a \in E^1 \otimes m_A \mid da + \frac{1}{2}[a, a] = 0\}$. Este funtor es homogéneo. Si $E$ es abeliana $MC_E$ es suave.
- Dado que $E \otimes m_A$ es una $DGLA$ con $(E \otimes m_A)^0$ nilpotente se tiene que existe una acción del funtor $G_E$ sobre $MC_E$. Llamamos a $Def_E := MC_E/G_E$ el *funtor de deformación* asociada a $E$. En general $Def_E$ no es homogéneo, pero sí es un funtor de deformación.

Todo morfismo de $DGLA$, $E \xrightarrow{\alpha} L$, induce morfismos de funtores $G_E \longrightarrow G_L$, $MC_E \longrightarrow MC_L$. Estos morfismos son compatibles con la acción y por lo tanto inducen un morfismo entre los funtores de deformación $Def_E \longrightarrow Def_L$.

**Observación 12.4.2.** Nombremos los tangentes y las teorías de obstrucción de los funtores recién construidos:

- $G_E$ es suave, luego $O_{G_E} = 0$ y su tangente es $t_{G_E} = L^0 \otimes k[\epsilon]$.
- El tangente de $MC_E$ es $t_{MC_E} = \{a \in L^1 \otimes k[\epsilon] \mid da + \frac{1}{2}[a, a] = 0\} = Z^1(E) \otimes k[\epsilon]$. $(H^2(E), v)$ es una teoría de obstrucción completa para $MC_E$, donde $v$ se define de la siguiente manera: sea $e : 0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ una extensión pequeña, para $x \in MC_E(A) \subset L^1 \otimes m_A$ consideramos algún levantamiento de $x$ a $\hat{x} \in L^1 \otimes m_B$, luego definimos $h := d\hat{x} + \frac{1}{2}[\hat{x}, \hat{x}]$. Sea $v_e(x) := [h] \in H^2(E) \otimes M$. Se tiene que $v$

está bien definida; no depende del levantamiento de $x$.
Dada $E \xrightarrow{\phi} L$ morfismo de $DGLA$ la función lineal $H^2(E) \xrightarrow{H^2(\phi)} H^2(L)$ induce un morfismo sobre los espacios de obstrucción compatible con $MC_E \xrightarrow{\phi} MC_L$.
Notar que cuando la extensión pequeña $e$ es $0 \longrightarrow k \xrightarrow{t^2} k[t]/t^3 \longrightarrow k[\epsilon] \longrightarrow 0$ se tiene que $Z^1(E) \otimes k[\epsilon] = t_{MC_E} \xrightarrow{v_e} H^2(E)$ es $x \otimes \epsilon \xrightarrow{v_e} \frac{1}{2}[x, x] \in H^2(E)$.

- El espacio tangente de $Def_E$ es $t_{Def_E} = H^1(E)$.
  Una teoría de obstrucción completa para $Def_E$ es, aprovechando que $MC_E \xrightarrow{\pi} Def_E$ es suave, $(H^2(E), o)$, donde $o_e(x) = v_e(x')$ con $x \in Def_E(A)$ y $x' \in MC_E(A)$ un levantamiento de $x$.
  En particular, para la extensión $e: \quad 0 \longrightarrow k \xrightarrow{t^2} k[t]/t^3 \longrightarrow k[\epsilon] \longrightarrow 0$ se tiene que $o_e(x) = \frac{1}{2}[x, x]$

**Observación 12.4.3.** Si $H^2(E) = 0$ o $[E^1, E^1] \subset B^2(E)$ o $[Z^1(E), Z^1(E)] = 0$ se tiene que $MC_E$ es suave. Por otro lado si $MC_E$ es suave, entonces $[Z^1(E), Z^1(E)] \subset B^2(E)$.

**Observación 12.4.4.** Si $E$ es formal, $MC_E$ es suave $\Longleftrightarrow [Z^1(E), Z^1(E)] \subset B^2(E)$.

**Teorema 12.4.5.** *Sea $E \xrightarrow{\phi} L$ un morfismo de* DGLA *y sea $H^i(E) \xrightarrow{H^i(\phi)} H^i(L)$ el morfismo inducido en la cohomología. Entonces, si $H^1(\phi)$ es biyectivo y $H^2(\phi)$ es inyectivo, $Def_E \longrightarrow Def_L$ es etal. Más aún, si $H^0(\phi)$ es sobreyectivo, $Def_E \longrightarrow Def_L$ es un isomorfismo.*

**Corolario 12.4.6.** *Sea $E \xrightarrow{\phi} L$ un cuasi-isomorfismo de* DGLA *entonces el morfismo inducido $Def_E \longrightarrow Def_L$ es un isomorfismo.*

**Observación 12.4.7.** Si $E$ es formal, $Def_E$ es suave $\Longleftrightarrow H^1(E) \times H^1(E) \xrightarrow{[,]} H^2(E)$ es cero.

**Observación 12.4.8.** Si $H^0(E) = 0$ entonces $Def_E$ es homogéneo.

# 13. Ejemplos de *DGLA*

Empecemos primero demostrando que la *DGLA* introducida en la sección de coálgebras es realmente una *DGLA*.
Para esto utilizaremos un resultado de [5]§5.

**Definición 13.0.9.** Un *sistema pre-Lie* $(V^m, \circ_i)$ es una sucesión $V^{-1}, V^0, \dots, V^m$ de $A$-módulos y morfismos de $A$-módulos $\circ_i : V^m \otimes V^n \longrightarrow V^{m+n}$ con $i \leqslant m$ tales que:

$$(f^m \circ_i g^n) \circ_j h^p = \begin{cases} (f^m \circ_j h^p) \circ_{i+p} g^n & \text{si } 0 \leqslant j < i \\ f^m \circ_i (g^n \circ_{j-i} h^p) & \text{si } i \leqslant j \leqslant n+1 \end{cases}$$

donde $f^m \in V^m$, $g^n \in V^n$ y $h^p \in V^p$.
Definiendo $f^m \circ g^n := \sum_{i=0}^m (-1)^{ni} f^m \circ_i g^n$ y $f^m \circ g^n = 0$ si $m < 0$, se tiene que $[f^m, g^n] := f \circ g - (-1)^{nm} g \circ f$ da una estructura de álgebra de Lie graduada en $\bigoplus V^i$.

**Ejemplo 13.0.10.** Sea $V^m := \hom_k(C, C^{\otimes m+1})$ y $f^m \circ_i g^n := (id \otimes \dots \otimes id \otimes g \otimes id \dots id) f$.
Veamos que es un sistema pre-Lie:
(denotaré con un subíndice la posición de cada coordenada).
Sea $f \in V^m$, $g \in V^n$, $h \in V^p \Longrightarrow$
Empecemos con $0 \leqslant j < i$:

$$(f \circ_i g) \circ_j h = (id_0 \otimes \dots \otimes id_{j-1} \otimes h \otimes id_{j+1} \dots \otimes id_{n+m})(id_0 \otimes \dots \otimes id_{i-1} \otimes g \otimes id_{i+1} \dots \otimes id_m) f =$$
$$= (id_0 \otimes \dots \otimes id_{j-1} \otimes h \otimes id_{j+1} \otimes \dots \otimes id_{i-1} \otimes g \otimes id_{i+1} \otimes \dots \otimes id_m) f =$$
$$= (id_0 \otimes \dots \otimes id_{i+p-1} \otimes g \otimes id_{i+p+1} \dots \otimes id_{m+p})(id_0 \otimes \dots \otimes id_{j-1} \otimes h \otimes id_{j+1} \dots \otimes id_m) f =$$
$$= (f^m \circ_j h^p) \circ_{i+p} g^n$$

Veamos ahora el caso $i \leqslant j \leqslant n+1$:

$$(f \circ_i g) \circ_j h = (id_0 \otimes \dots \otimes id_{j-1} \otimes h \otimes id_{j+1} \dots \otimes id_{n+m})(id_0 \otimes \dots \otimes id_{i-1} \otimes g \otimes id_{i+1} \dots \otimes id_m) f =$$
$$= (id_0 \otimes \dots \otimes id_{i-1} \otimes (id_0 \otimes \dots \otimes id_{j-i-1} \otimes h \otimes id_{j-i+1} \dots \otimes id_n) g \otimes id_{i+1} \dots \otimes id_m) f =$$
$$= f^m \circ_i (g^n \circ_{j-i} h^p)$$

Luego se tiene que si $C$ es una coálgebra coasociativa, $E := \bigoplus_{n \geqslant 0} \hom_k(C, C^{\otimes n+1})[-n]$, con el corchete $[f, g] := f \circ g - (-1)^{\overline{f}\overline{g}} g \circ f$ donde

$$f \circ g := \sum_{i=0}^{\overline{f}} (-1)^{i\overline{g}} (id \otimes \dots id \otimes g \otimes id \dots \otimes id) f \in \hom_k(C, C^{\otimes \overline{f} + \overline{g}})$$

es una *DGLA* con diferencial de (co)-Hochschild $d$ corrido en uno. Con el corchete recién construido resulta que $d = [-, \triangle]$.
Si a $C$ se lo ve como un espacio vectorial, se tiene que $f \in \hom_k(C, C^{\otimes 2})$ (o sea, de grado uno) cumple $[f, f] = 0 \Longleftrightarrow f$ define una comultiplicación coasociativa para $C$, pues $[f, f] = 0 \Longleftrightarrow f \circ f + f \circ f = 0 \Longleftrightarrow f \circ f = 0 \Longleftrightarrow (id_C \otimes f) f = (f \otimes id_C) f$.
(Recordar que la característica de $k$ es cero).
Más aún, dada una comultiplicación $\triangle$, todas las $f \in \hom_k(C, C^{\otimes 2}) \mid [f, \triangle] + \frac{1}{2}[f, f] = 0$ representan las estructuras de coálgebras coasociativas que pueden obtenerse mediante deformaciones de $\triangle$. Recordar que $df + \frac{1}{2}[f, f] = 0$ equivale a decir que $\triangle + f$ es una estructura de coálgebra coasociativa en $C$ (11.1.7).

**Ejemplo 13.0.11.** Para el caso asociativo se utiliza la *DGLA* construida a partir del complejo de Hochschild. La demostración de que es realmente una *DGLA* es análoga a la anterior y se encuentra en la literatura, más precisamente en [5].
$E := \bigoplus_{n\geqslant 0} \hom_k(A^{\otimes n+1}, A)[-n]$, con diferencial de Hochschild (corrido en uno) y el corchete: $[f,g] := f \circ g - (-1)^{\overline{f}\overline{g}} g \circ f$ donde

$$(f\circ g)(a_0\otimes\ldots\otimes a_{\overline{f}+\overline{g}}) := \sum_{i=0}^{\overline{f}} (-1)^{i\overline{g}} f(a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\otimes g(a_i\otimes\ldots\otimes a_{i+\overline{g}})\otimes a_{i+\overline{g}+1}\otimes\ldots\otimes a_{\overline{f}+\overline{g}})$$

Este corchete se llama el corchete de Gerstenhaber.
Nuevamente, dada $f$ de grado uno tal que $[f,f]=0$ resulta que $f$ es una multiplicación asociativa para $A$, pues $[f,f]=0 \iff f\circ f = 0 \iff f(id_A\otimes f) = f(f\otimes id_A)$. Más aún dado $f$ de grado uno tal que cumpla la ecuación de Maurer-Cartan, se tiene que $f$ es una deformación del producto original de $A$.
Vale la pena nombrar que si se tiene un álgebra asociativa y conmutativa, en la practica se utiliza mucho deformarla olvidando la conmutatividad, dando lugar a importantes resultados en la física teórica, más precisamente en la teoría de unificación, teoría de cuerdas, de campos, etc. (ver trabajos de Kontsevich o, en general, trabajos que traten sobre *Deformation Quantization*).
Dado que $E^0 = \mathrm{end}_k(A)$ se tiene que dos estructuras de álgebra asociativa son equivalentes si existe un automorfismo sobre el espacio vectorial subyacente tal que las estructuras coinciden. Dicho de otra manera, que halla un cambio de base tal que las multiplicaciones sean iguales.

**Ejemplo 13.0.12.** Para el caso de deformaciones de morfismos de álgebras o de estructuras de módulos si bien la *DGLA* es parecida, tuve que inventarla porque no la encontré en la literatura. Se toma $E := \bigoplus_{n\geqslant 0} \hom_k(A^{\otimes n}, B)[-n]$ el complejo de Hochschild con el diferencial usual viendo a $B$ como $A$-bimódulo (recordar que en nuestro caso se tiene un morfismo de $k$-álgebras $A \xrightarrow{\phi} B$ dándole la estructura a $B$) y el corchete definido por el producto *cup*:

$$f^m \smile g^n(a_1\otimes\ldots\otimes a_m\otimes b_1\otimes\ldots\otimes b_n) := f^m(a_1\otimes\ldots\otimes a_m)g^n(b_1\otimes\ldots\otimes b_n)$$

Luego $E$ resulta una $k$-álgebra asociativa graduada de tipo $\mathbb{Z}$ compatible con la diferencial, $d(f^m \smile g^n) = df^m \smile g^n + (-1)^m f^m \smile dg^n$. Se la da a $E$ la estructura de $k$-álgebra asociativa graduada diferencial (ver [5]§7) con el diferencial $d$. Tomando el conmutador se tiene una *DGLA*.
Para el caso de módulos en vez de tomar $B$ se toma $\mathrm{end}_k(M)$.
Notar que los elementos de grado uno son morfismos $k$-lineales entre las $k$-álgebras.
También notar que $E^0$, el álgebra de Lie cuyo grupo actúa en $E^1$ (y en el espacio de las soluciones de Maurer-Cartan) es $(B,[-,-])$. En el caso de módulos, el grupo en cuestión es $\mathrm{aut}_k(M)$. En el caso general de una $k$-álgebra asociativa $B$ (de dimensión finita) el grupo son las unidades de $B$ actuando por conjugación $b^{-1}\psi b \in E^1$, (ver 4).
Dado que el morfismo de álgebras $\phi$ le da estructura de bimódulo a $B$ se tiene que el diferencial correcto para la *DGLA* $E$ es $\hat{d} := d - [\phi, -]$. Con este diferencial resulta que los $f \in E^1$ que cumplan Maurer-Cartan serán aquellos morfismos $k$-lineales que son morfismos

de $k$-álgebras:

$$0=(\hat{d}f+\frac{1}{2}[f,f])(a\otimes b)=(df-[\phi,f]+f\smile f)(a\otimes b)=$$

$$=a\cdot f(b)-f(ab)+f(a)\cdot b-[\phi,f](a\otimes b)+f(a)f(b)=$$

$$=\phi(a)f(b)-f(ab)+f(a)\phi(b)-[\phi,f](a\otimes b)+f(a)f(b)=$$

$$=-f(ab)+([\phi,f]-[\phi,f])(a\otimes b)+f(a)f(b)=-f(ab)+f(a)f(b)$$

Luego $A\xrightarrow{f}B$ es morfismo de álgebras.
Más aún, dado un morfismo de álgebras $\psi$, por ejemplo puede ser el mismo $\phi$, se tiene que sus deformaciones locales $\psi+f$ serán aquellas que cumplan Maurer-Cartan para $d_\psi:=\hat{d}+ad_E\psi=\hat{d}+[\psi,-]$:
Por un lado

$$(d_\psi f+\frac{1}{2}[f,f])(a\otimes b)=0\Longleftrightarrow(\hat{d}f+[\psi,f])(a\otimes b)+f(a)f(b)=0\Longleftrightarrow$$

$$(df-[\phi,f]+[\psi,f])(a\otimes b)+f(a)f(b)=0\Longleftrightarrow-f(ab)+[\psi,f](a\otimes b)+f(a)f(b)=0.$$

Por otro

$$\hat{d}(\psi+f)+\frac{1}{2}[\psi+f,\psi+f]=-(\psi+f)(ab)+(\psi+f)(a)(\psi+f)(b)=$$

$$=-\psi(ab)-f(ab)+(\psi(a)+f(a))(\psi(b)+f(b))=$$

$$=-\psi(ab)-f(ab)+\psi(a)\psi(b)+f(a)\psi(b)+f(a)\psi(b)+f(a)f(b)=$$

$$=-f(ab)+f(a)\psi(b)+f(a)\psi(b)+f(a)f(b).$$

En otras palabras, $f$ cumple Maurer-Cartan para $d_\psi\Longleftrightarrow f+\psi$ lo cumplen para $\hat{d}$, o sea, $\Longleftrightarrow f+\psi$ es un morfismo de álgebra.

**Ejemplo 13.0.13.** Para el caso de deformaciones de álgebras de Lie la $DGLA$ utilizada es bastante conocida y se encuentra en la literatura, [18]. $E:=\bigoplus_{n\geqslant 0}\hom_k(\bigwedge^{n+1}L,L)[-n]$.
El diferencial es el de Chevalley-Eilenberg corrido en uno y el corchete llamado
de Nijenhuis: $[f,g]:=f\wedge g-(-1)^{\overline{f}\overline{g}}g\wedge f$ donde

$$(f\wedge g)(a_0\wedge\ldots\wedge a_{\overline{f}+\overline{g}}):=\sum_\eta sgn(\eta)f(g(a_{\eta(0)}\wedge\ldots\wedge a_{\eta(\overline{g})})\wedge a_{\eta(\overline{g}+1)}\wedge\ldots\wedge a_{\eta(\overline{f}+\overline{g})})$$

la suma se toma sobre todas las permutaciones $\eta$ tales que
$\eta(0)<\ldots<\eta(\overline{g})$ y $\eta(\overline{g}+1)<\ldots<\eta(\overline{f}+\overline{g})$
Con esta estructura se tiene un álgebra de Lie diferencial graduada.
Notar que $E^0=\mathrm{end}_k(L)$ luego el grupo que actúa ($\dim_k L<\infty$) es $\mathrm{aut}_k(L)$, o sea, dos estructuras serán equivalentes si existe un cambio de base del espacio vectorial subyacente a $L$ tal que las estructuras de Lie sean isomorfas.
Al igual que con las álgebras asociativas, se tiene que $f\in E^1\mid[f,f]=0\Longleftrightarrow f$ define una estructura de álgebra de Lie en $L$. Más aún si $\mu$ es una estructura de Lie se tiene que $d=[-,\mu]$ y por consiguiente sus deformaciones locales $\mu+f$ serán aquellas que cumplan $0=[f,\mu]+\frac{1}{2}[f,f]=[\mu+f,\mu+f]$, o sea, $f\in E^1\mid\mu+f$ estructura de Lie.

**Ejemplo 13.0.14.** Nombremos aquí un ejemplo que no fue tratado explícitamente pero es fácilmente deducible del de morfismos de álgebras de Lie tomando como $B = \mathtt{gl}_k(V)$: cuando uno tiene una representación $V$ de un álgebra de Lie $L$, se tiene un morfismo de $k$-álgebras de Lie $L \xrightarrow{\rho} \mathtt{gl}_k(V)$.
La *DGLA* que gobierna las deformaciones de $\rho$ es $E := \bigoplus_{n\geqslant 0} \hom_k(\bigwedge^n L, \mathtt{gl}_k(V))[-n]$ el complejo de Chevalley-Eilenberg. El corchete lo defino inspirado en el de Nijenhuis:

$$[f^m, g^n](a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n+m}) := \sum_{\substack{\eta \\ \eta_1 < \ldots < \eta_m \\ \eta_{m+1} < \ldots < \eta_{m+n}}} sgn(\eta)[f(a_{\eta_1} \wedge \ldots \wedge a_{\eta_m}), g(a_{\eta_{m+1}} \wedge \ldots \wedge a_{\eta_{m+n}})]$$

Notar por ejemplo que si $f, g \in E^1 \Longrightarrow [f,g](a,b) = [f(a), g(b)] - [f(b), g(a)]$.
También $\frac{1}{2}[f,f](a,b) = \frac{1}{2}([f(a), f(b)] - [f(b), f(a)]) = [f(a), f(b)]$.
Utilizando $d$ el diferencial del complejo, defino $\hat{d} := d - [\rho, -]$ convirtiendo a $E$ en una *DGLA*. Haciendo una cuenta larga[4] se obtiene que este corchete se lleva bien con el diferencial $d$ creando así la estructura deseada.
Los morfismos lineales que cumplan Maurer-Cartan serán aquellos que sean morfismos de Lie entre $L$ y $\mathtt{gl}_k(V)$, pues

$$0 = (\hat{d}f + \frac{1}{2}[f,f])(a,b) = ([\rho(a), f(b)] - [\rho(b), f(a)] - f([a,b]))$$

$$-([f(a), \rho(b)] - [f(b), \rho(a)]) + [f(a), f(b)] = [\rho(a), f(b)] - [\rho(b), f(a)] - f([a,b])$$

$$+[\rho(b), f(a)] - [\rho(a), f(b)] + [f(a), f(b)] = -f([a,b]) + [f(a), f(b)]$$

Más aún, dado un morfismo de Lie $\psi$, sus deformaciones locales serán aquellos
$f \in E^1 \mid d_\psi f + \frac{1}{2}[f,f] = 0$ donde $d_\psi = \hat{d} + [\psi, -]$. Recordar que $f$ cumple Maurer-Cartan para $d_\psi \Longleftrightarrow \psi + f$ lo cumplen para $\hat{d}$. En otras palabras, $f$ es una deformación local de $\psi \Longleftrightarrow \psi + f$ de un morfismo de Lie.
Notar que si $\psi = \rho \Longrightarrow d_\rho = \hat{d} + [\rho, -] = d - [\rho, -] + [\rho, -] = d$.
Supongamos ahora que el álgebra $L$ es abeliana, o sea, que su corchete es nulo. Entonces se tendrá que $df(a,b) = a \cdot f(b) - b \cdot f(a) - f([a,b]) = [\rho(a), f(b)] - [\rho(b), f(a)] = [\rho, f](a,b)$.
Luego la condición de Maurer-Cartan para deformaciones locales de $\rho$ se traduce en
$d_\rho f + \frac{1}{2}[f,f] = df + \frac{1}{2}[f,f] = [\rho, f] + \frac{1}{2}[f,f] = 0$.
En otra palabras,

$$0 = [\rho, f] + \frac{1}{2}[f,f](a,b) = [\rho(a), f(b)] - [\rho(b), f(a)] + [f(a), f(b)]$$

Observemos la siguiente aplicación:
Claramente $f = \rho$ cumple la ecuación de Maurer-Cartan pues es morfismo de Lie, en particular se tiene $\frac{1}{2}[\rho, \rho] = 0$.
Calculemos su imagen $\{\frac{1}{2}[\rho,\rho](x,y) \mid x, y \in L\} = \{[\rho(x), \rho(y)] \mid x, y \in L\} =$
$\{XY = YX \mid X, Y \in \mathrm{im}(\rho) \subset M_n(k)\}$ pues $[\rho, \rho] \equiv 0$.
O sea, para cualquier par de matrices de la imagen de $\rho$, éstas conmutan.
En particular si $L$ tiene dimensión finita, $n$, el conjunto reciente es el conjunto de $n$ matrices conmutantes dos a dos; basta definir a $\rho$ es una base.

[4]No la he controlado ni corregido.

Deformemos localmente $\rho$ con alguna $f$, o sea $[\rho, f] + \frac{1}{2}[f, f] = 0$.
Recordar $df + \frac{1}{2}[f, f] = 0 \iff [\rho + f, \rho + f] = 0$.
Luego la imagen es

$$\{\frac{1}{2}[\rho + f, \rho + f](x, y) \mid x, y \in L\} = \{[\rho(x) + f(x), \rho(y) + f(y)] \mid x, y \in L\} =$$

$$= \{(X + \epsilon)(Y + \delta) = (Y + \delta)(X + \epsilon) \mid X, Y \in \mathrm{im}(\rho) \subset M_n(k), \epsilon, \delta \in \mathrm{im}(f) \subset M_n(k)\}$$

Luego si $f$ es una deformación de $\rho$ las matrices de su imagen son pequeñas perturbaciones a las matrices de $\rho$ tal que sigan permutando y viceversa pues el último conjunto afirma que $[\rho + f, \rho + f] \equiv 0$.
En conclusión el espacio de moduli para $\rho$ es

$$M_0 = \{f \in E^1 \mid (X + \epsilon)(Y + \delta) = (Y + \delta)(X + \epsilon),\ X, Y \in \mathrm{im}(\rho),\ \epsilon, \delta \in \mathrm{im}(f)\}$$

Al igual que el espacio de moduli para las representaciones del álgebra abeliana $L$ de dimensión $n$ es:

$$M_0 = \{\psi \in E^1 \mid XY = YX,\ X, Y \in \mathrm{im}(\psi)\}$$

Por último supongamos que $\rho$ es rígida y que $\dim_k(\mathrm{im}(\rho)) = r > 1$, luego existen $r$ matrices $X_1, \ldots, X_r$ que la generan y conmutan dos a dos. Ya vimos que si $\epsilon_i \in M_n(k)$ perturban las $X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ existe $f \in E^1$ una deformación de $\rho$ tal que $\mathrm{im}(f) =< \epsilon_i >_1^r$.
Pero ahora, al ser $\rho$ rígida, se tiene que $\rho + f \sim \rho$ y por consiguiente
$\exists C \in GL_n(k) \mid C^{-1}(X_i + \epsilon_i)C = X_i$.

**Ejemplo 13.0.15.** En el ejemplo de deformaciones de módulos graduados diferenciales al igual que de álgebras graduadas diferenciales, las $DGLA$ que aparecen están bastante claras. Veamos el caso de módulos, en el próximo ejemplo veremos el de álgebras:
Sea $A$ una $k$-álgebra graduada y $(M, d)$ un $A$-módulo graduado. Cuando hablamos de deformar un módulo diferencial, nos referimos a deformar el diferencial dejando fija la estructura de módulo. Si bien parece arbitrario qué se elige en cada caso de deformación, es la forma en que la literatura lo ha tratado.
Sea $E := (\mathrm{end}_A^\bullet(M), [-,-], \mathtt{ad}d) = (\mathtt{gl}_A^\bullet(M), \mathtt{ad}d)$.
Todo $f \in E^1 \mid [f, f] = 0$ será un diferencial admisible en $M$ pues
$[f, f] = 0 \iff ff + ff = 0 \iff f^2 = 0$.
Dado el diferencial $d$ de $M$, las deformaciones locales serán $d + f \iff f$ cumple Maurer-Cartan para el diferencial $\mathtt{ad}d$, esto es pues $[d, f] + \frac{1}{2}[f, f] = [d + f, d + f]$.
Luego $d + f$ es un diferencial para $M \iff f$ cumple Maurer-Cartan para $\mathtt{ad}d$.
Notar que dos diferenciales se dirán equivalentes si existe $\phi \in \mathrm{aut}_k^0(M) \mid d' = \phi^{-1}d\phi$.
Por último, observemos lo siguiente: el caso de módulos graduados diferenciales puede extenderse fácilmente a las deformaciones de haces (de módulos diferenciales graduados) sobre un espacio topológico $X$. De hecho todos los ejemplos tratados son generalizados como haces.
Tomemos una variedad diferenciable $X$. Luego se tiene definido, por ejemplo, el haz de complejos de De Rham. Luego las nociones de rigidez y trivialidad siguen siendo válidas pero localmente. Por ejemplo, un diferencial $d$ se dirá localmente rígido en $x \in X$ si existe un entorno $\mathcal{U}$ de $x$ tal que $d|_{\mathcal{U}}$ es rígido. También se tiene la noción de localmente trivial, $d$ se dirá localmente trivial en $x$ si existe un entorno $\mathcal{U}$ tal que $d|_{\mathcal{U}}$ es trivial. En el caso de

deformaciones formales se puede decir un poco más, pues si $d = \sum_0^\infty t^i d_i^v$ es localmente trivial se tiene que existe un endomorfismo $\varphi_{\mathcal{U}}$ de grado cero tal que

$$d_1 = \mathtt{ad}d|_{\mathcal{U}}(\varphi_{\mathcal{U}}) = [d|_{\mathcal{U}}, \varphi_{\mathcal{U}}]$$

Notar que no necesariamente existe un $\varphi$ sobre todo $X$ tal que $d_1 = [d, \varphi]$. En otras palabras, si bien un diferencial puede ser localmente rígido o localmente trivial $\forall x \in X$ no significa que sea globalmente rígido o globalmente trivial.

**Ejemplo 13.0.16.** En el caso de $A$ un álgebra graduada diferencial, la *DGLA* utilizada es $E := (\mathtt{D}_k^\bullet(A), \mathtt{ad}d)$.
Se tiene, nuevamente, que los $f \in E^1 \mid [f,f] = 0$ serán todas las diferenciales posibles para $A$ (recordar que son derivaciones).
También dos diferenciales se dirán equivalentes si pertenecen a la misma orbita por $G$ (el grupo cuyo álgebra de Lie es $\mathtt{D}_k^0(A)$) donde $G = \mathrm{aut}_{k-alg}^0(A) \subset \mathrm{aut}_k^0(A)$.

**Ejemplo 13.0.17.** Nombremos una *DGLA* que gobierna el problema de deformar las estructuras de variedad compleja [16]. Esta es la teoría de Kodaira-Spencer en el contexto *DGLA*: sea $T_M$ el espacio tangente holomorfo de una variedad compleja $M$.
Sea $KS(M) := \bigoplus \Gamma(M, \mathcal{A}^{0,p}(T_M))[-p]$ munido del diferencial de *Dolbeault*. Si $z_1, \ldots, z_n$ son coordenadas holomorfas locales, se tiene $[\phi, d\bar{z}_I, \psi, d\bar{z}_J] = [\phi, \psi] d\bar{z}_I \wedge d\bar{z}_J$ donde $\phi, \psi \in \mathcal{A}^{0,0}(T_M)$ y $I, J \in \bigwedge^* \{1, \ldots, n\}$.

**Ejemplo 13.0.18.** Sea $S \xrightarrow{f} T$ un morfismo de $k$-álgebras asociativas. Definamos dos funtores de deformación (infinitesimal) para problemas en principio distintos (veremos que hay una transformación natural entre ambos):
El primer funtor $Def_1$ es el asociado a $E$, la *DGLA* que introduje para el problema de deformar el morfismo $f$ (dejando las álgebras $S$ y $T$ fijas).
El segundo funtor $Art \xrightarrow{Def_2} \mathcal{S}et$ será el correspondiente al problema de deformar $f$ y $T$ dejando fija al álgebra $S$. Recordar que $Art$ es la categoría de anillos de Artin con cuerpo residual $k$ (12.1.1).
Veamos un poco los funtores de deformación en la teoría de deformar morfismos en el contexto de geometría algebraica [22] y luego pasando por el caso afín lo traduciremos al caso algebraico.
Sea $X \xrightarrow{f} Y$ un morfismo de esquemas algebraicos, y sea $A \in Art$.
Una familia infinitesimal de deformaciones de $f$ parametrizada por $A$ es

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & \mathcal{X} \arrow[d, "F"] \\
Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "\psi"] \\
\mathrm{spec}(k) \arrow[r] & \mathrm{spec}(A)
\end{tikzcd}$$

donde $\psi$, $\psi F$ playas. Si se reemplaza $\mathrm{spec}(A)$ por un esquema punteado $(S, s)$ se tendrá una familia de deformaciones de $f$. Esencialmente una deformación de $f$ es un morfismo $F$ entre deformaciones de $X$ y de $Y$ tal que la restricción de $F$ a la fibra cerrada es $f$.

La noción de deformación trivial será cuando $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y} \equiv X \times S \xrightarrow{f \times S} Y \times S$, de esta manera se tiene también la noción de rigidez que es que toda deformación sea equivalente a la trivial.
La equivalencia entre estas deformaciones es la existencia de isomorfismos que hagan conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"] & & \mathcal{X} \arrow[dd, "F"] \\
& \mathcal{X}' \arrow[ur] \arrow[dd, "F'"] & \\
Y \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathcal{Y} \arrow[dd, "\psi"] \\
& \mathcal{Y}' \arrow[ur] \arrow[dd, "\psi'"] & \\
\operatorname{spec}(k) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \operatorname{spec}(A) \\
& \operatorname{spec}(A') \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dada una extensión pequeña (12.2.1) $0 \longrightarrow k \longrightarrow \hat{A} \longrightarrow A \longrightarrow 0$ se dirá que se tiene una extensión de una deformación dada cuando ([22]§3.4 pp.186):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & \hat{\mathcal{X}} \arrow[d, "\hat{F}"'] \\
Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & \hat{\mathcal{Y}} \arrow[d, "\hat{\psi}"'] \\
\operatorname{spec}(k) \arrow[r] & \operatorname{spec}(A) \arrow[r] & \operatorname{spec}(\hat{A})
\end{tikzcd}$$

con $\hat{\psi}$, $\hat{\psi}\hat{F}$ playas. Claramente la extensión define una deformación de $f$.
Veamos dos casos particulares. El primero será deformar sólo el morfismo dejando $X$ e $Y$ fijos y el segundo variando también $Y$.
Una deformación de $f$ con $X$ e $Y$ fijos será:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & X \times S \arrow[d, "F"'] \\
Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & Y \times S \arrow[d, "\pi_2"'] \\
\operatorname{spec}(k) \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Luego se define el funtor de anillos de Artin
$Def_f(A) := \{$deformaciones de $f$ sobre spec$(A)$ dejando fijos $X$ y $Y\}/\sim$
Una deformación de $f$ con $X$ fijo será

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & X \times S \arrow[d, "F"] \\ Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "\psi"] \\ \mathrm{spec}(k) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Se define el funtor de anillos de Artin
$Def_{f,Y}(A) := \{$deformaciones de $f$ sobre spec$(A)$ dejando $X$ fijo$\}/\sim$
Pasemos ahora a las deformaciones infinitesimales de morfismos de álgebras: recordar que hemos construido una $DGLA$ para el problema de deformar un morfismo $S \xrightarrow{f} T$ de $k$-álgebras asociativas dejando $S$ y $T$ fijos, con lo cual el funtor asociado a este problema ya lo tenemos: sea $(A, m_A) \in Art \Longrightarrow Def_1(A) := MC_E(A)/G_E(A)$ donde

$$MC_E(A) = \{x \in E^1 \otimes m_A \mid dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0\}$$

$$G_E(A) = exp(E^0 \otimes m_A) := \{e^x \mid x \in E^0 \otimes m_A\} \in \mathcal{G}r$$

Recordar que $E^0 \otimes m_A$ es nilpotente y por consiguiente tiene una estructura de grupo mediante el producto de Campbell-Baker-Hausdorff.
Más concretamente, analizando el caso geométrico, podemos decir que una deformación infinitesimal de un morfismo de álgebras dejando el dominio y el codominio fijos es:

$$\begin{tikzcd} S \otimes A \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & T \otimes A \arrow[d] \\ S \arrow[r, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

donde $g$ es un morfismo de $A$-álgebras asociativas.
Por otro lado defino el segundo funtor de anillos de Artin
$Def_2(A) := \{$deformaciones de $f$ dejando fijo $S\}/\sim$ donde estas deformaciones significarán:

$$\begin{tikzcd} S \otimes A \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & \mathcal{T} \arrow[d] \\ S \arrow[r, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

con $g$ morfismo de $A$-álgebras asociativas y $\mathcal{T}$ $A$-álgebra tal que $T \cong \mathcal{T} \underset{A}{\otimes} k$.
Recordar que $A/m_A = k$, luego el morfismo $S \underset{A}{\otimes} A \longrightarrow S$ es la proyección.
También notar que las deformaciones triviales serán las equivalentes a $S \underset{A}{\otimes} A \xrightarrow{f \otimes id} T \underset{A}{\otimes} A$.
Por ultimo cabe mencionar que se tiene una transformación natural entre los funtores $Def_1 \longrightarrow Def_2$ pues toda deformación de sólo $f$ será una deformación dejando $S$ fija.

## Referencias

[1] L. Ahlfors. *Complex Analisis.* Second Edition McGraw-Hill (1966).

[2] M. Artin. *Deformations of singularities.* Tata institute of foundamental research, Bombay (1976).

[3] P. Deligne. *Cartas a Milson y a otros.* Versión electrónica.

[4] A. Frolicher, A. Nijenhuis. *A theorem on stability of complex structures.* Proc. Nat. Acad. ScL, USA, 43 (1957), 239-241.

[5] M. Gerstenhaber. *The cohomology structure of an associative ring.* Annals of Mathematics 78 (1963), 267-288.

[6] M. Gerstenhaber. *On the deformation of rings and algebras.* Annals of Mathematics 79 (1964).

[7] M. Gerstenhaber, C. Wilkerson. *On the deformation of rings and algebras V: Deformation of differential graded algebras.* McCleary, J. ed. Contemp. Math 227. American Mathematical Society (1999), 89-101.

[8] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* (capítulo 2). Publications de l′institut de mathématique de l′université de Strasbourg, XIII. Paris (1964).

[9] A. Grothendieck. *FGA, Fondements de la Géometrié Algébrique.* Extraits du Séminaire Bourbaki. 1957-1962.

[10] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. III: Étude cohomologique des faisceaux cohérents. II.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1963), no. 17, 91.

[11] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1).* Lecture Notes in Math., 224, Springer-Verlag, Berlin, 1964, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960-61, Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud.

[12] L. Illusie. *Complexe cotangent et déformations I et II.* Springer LNM 239 (1971) and 283 (1972).

[13] K. Kodaira, D.C. Spencer. *On deformations of complex analytic structures, I-II, III.* Annals of Math. 67 (1958) 328-466; 71 (1960) 43-76.

[14] M. Kontsevich. *Enumeration of rational curves via torus action. In Moduli Space of Curves.* (R. Dijkgraaf, C. Faber, G. van der Geer Eds) Birkhäuser (1995) 335-368.

[15] M. Kontsevich. *Deformation quantization of Poisson manifolds, I.* q-alg/9709040.

[16] M. Manetti. *Deformation theory via differential graded Lie algebras.* arXiv:math.AG/0507284 v1 14 Jul 2005.

[17] A. Nijenhuis, R. Richardson. *Cohomology and deformation in graded Lie algebras.* Bull. Amer. Math. Soc. (January-1966).

[18] A. Nijenhuis, R.Richardson. *Cohomology and deforations of algebraic structures.* Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 406-411.

[19] M. Noether. *Anzahl der Modulen einer Classe algebraischer Feldchen.* Sitz. Koniglich. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, erster Halbband (1888), 123-127.

[20] B. Riemann. *Theorie der Abel'schen Functionen.* J. Reine Angew. Math., 54 (1857), pp. 115-155; Werke, pp. 88-142.

[21] M. Schlessinger. *Functors of Artin rings.* Trans. Ams 130, (1968)

[22] E. Sernesi. *Deformations of Algebraic Scheme.* Versión electrónica.

[23] S. Shnider, M. Markl. *Cohomology of Drinfel'd algebras: a homological algebra approach* International Mathematics Research Notices, vol. 1996, no. 9, (1996) 431-445.

[24] F. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Springer. (1983).

[25] Ch. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge University Press. (1997).

[26] D. Yau. *Deformation Theory of Modules.* arXiv:math.AC/0501514 v1 28 Jan 2005.